LES ORBITES DE COLLISION DU PROBLEME RESTREINT

Fernand S. Nahon
Universite P. et M. Curie, Paris, France

ABSTRACT: The article studies collisions with the smaller primary, m_2, in the planar restricted problem of three bodies. The formulation is in polar coordinates and the corresponding momenta. The results are based on the fact that the collisions correspond to a solution of a partial differential equation.

Considérons pour fixer les idées les orbites de collision avec le primaire M_2 de faible masse.

Soit : $F(r,\theta,R,\Theta) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) - \Theta - (U + \nu r \cos\theta)$

où : $U = \frac{\mu}{r} + \frac{\nu}{\Delta}$, Δ distance de M au primaire M_1 le hamiltonien du problème restreint en coordonnées "jovicentriques", c'est-à-dire d'origine M_2. Levi-Civita a montré que les orbites de collision vérifient sur la surface F = - C une relation invariante :

$$\Theta = \varphi(r,\theta;C)$$

où φ est développable en série entière de $\sqrt{r} = \rho$. Les coefficients a_n de φ^n sont des fonctions périodiques de période 2π de la variable θ . Nous nous proposons de simplifier la procédure de Levi-Civita et de mettre en évidence, pour la valeur critique de la constante de Jacobi, la famille qui généralise les orbites de collision du problème képlérien.

Nous nous appuierons sur le théorème suivant que nous donnons sans démonstration :

Proposition 1 - Aux orbites de collision avec M_2 correspond une solution $S(r,\theta,C)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{\partial S}{\partial \theta} = U + \nu r \cos\theta - C$$

C'est la solution unique de cette équation qui est développable en série entière de $\rho = \sqrt{r}$ au voisinage de $\rho = 0$.

Cas où μ est petit :

Si $\mu \longrightarrow 0$, on peut montrer que les orbites de collision

R. L. Duncombe (ed.), Dynamics of the Solar System, 37–39.

https://doi.org/10.1017/S0074180900012468 Published online by Cambridge University Press

a) n'existent que pour $C \leqslant 3/2$

b) pour $C < 3/2$, elles peuvent être représentées en première approximation par un assemblage d'orbites képlériennes qui se raccordent en M_2.

Le cas intéressant est le cas $C = 3/2$; pour l'étudier on peut poser

$$r = \mu^{1/3}\,\bar{r}.$$

Cela revient :

1) à remplacer F par l'approximation de Hill :

$$H = \tfrac{1}{2}\left(\bar{R}^2 + \frac{\bar{\Theta}^2}{\bar{r}^2}\right) - \bar{\Theta} - \left[\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{r}^2}{2}\,(3\cos^2\bar{\theta} - 1)\right]$$

2) à considérer l'intégrale $H = -h$ qui correspond à $C = 3/2$.

On peut montrer que :

$$C = \frac{3}{2} + \mu^{2/3}\,h + o(\mu^{2/3})$$

On est donc ramené (en supprimant les barres)

1°) à étudier les orbites de collision avec l'origine du hamiltonien :

$$H = \tfrac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) - \Theta - \left[\frac{1}{r} + \frac{r^2}{r}\,(3\cos^2\theta - 1)\right] \qquad (1)$$

2°) et ceci est équivalent d'après la proposition (1) au problème de chercher la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{1}{r} + \frac{r^2}{2}\,(3\cos^2\theta - 1) \qquad (2)$$

développable en série entière de $r = \rho^2$ autour de l'origine.

Le cas des orbites de collision képlériennes suggère de poser

$$r = a\,\tau^{2/3}$$

c'est-à-dire de faire le changement de variables

$$\left.\begin{aligned} a^3 &= \frac{9}{2} \\ \rho &= \sqrt{a}\;\tau^{1/3} \\ S &= 2\sqrt{2a}\;\tau^{1/3} + a^2\,\tau^{7/3}\,\varphi(\tau,\theta) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Passons sur le détail des calculs est donnons le théorème récapitulatif

<u>Proposition 2</u> - Soit la famille des orbites de collision avec le primaire de masse μ pour la valeur $C = 3/2$ de la constante de Jacobi relative au barycentre.

1°) Ces orbites généralisent les orbites de collision képlériennes en ce sens que le paramètre est le temps fictif τ défini par la relation képlérienne :

$$r^3 = \frac{9}{2}\,\mu\,\tau^2 \qquad (4)$$

https://doi.org/10.1017/S0074180900012468 Published online by Cambridge University Press

2°) Soit Θ_o la limite de Θ lorsque $r \longrightarrow 0$. Les orbites dépendent de Θ_o suivant la formule :

$$\Theta = \Theta_o - \tau - \frac{9}{14} \sin 2\,\Theta_o \frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2) \tag{5}$$

où les termes non écrits représentent une série entière en τ à coefficients périodiques de période 2π en Θ_o.

3°) Elles vérifient sur la variété $F = - 3/2$ une relation invariante :

$$\textcircled{H} = \left(\frac{9}{2}\right)^{2/3} \tau^{7/3} f(\Theta, \tau) \tag{6}$$

où f est la solution unique développable en série entière de τ, à coefficients périodiques de période 2π en Θ, de l'équation :

$$7\varphi + 3\tau(\varphi'_\tau - \varphi'_\Theta) + o(\tau^2) = \frac{3}{2}\left(3 \cos^2\Theta - 1\right) \tag{7}$$

Les premiers termes du développement sont donnés par

$$f(\Theta, \tau) = - \frac{9}{14} \sin 2\,\Theta - \left(\frac{27}{70}\right) \cos 2\,\Theta\,\tau + o(\tau^2) \tag{8}$$

où τ est positif pour les orbites d'éjection et négatif pour les orbites de collision.

<u>Référence</u> :

Levi-Civita, T.: 1903, "C.R. Acad. Sc. Paris", t. 136, p. 221.