Can. J. Math. Vol. **50** (6), 1998 pp. 1323–1336.

L'INVARIANT DE HASSE-WITT DE LA FORME DE KILLING

JORGE MORALES

RÉSUMÉ. Nous montrons que l'invariant de Hasse-Witt de la forme de Killing d'une algèbre de Lie semi-simple L s'exprime à l'aide de l'invariant de Tits de la représentation irréductible de L de poids dominant $\rho = \frac{1}{2}$ (somme des racines positives), et des invariants associés au groupe des symétries du diagramme de Dynkin de L.

1. **Introduction.** Soit k un corps de caractéristique nulle et soit L une algèbre de Lie semi-simple définie sur k. Nous rappelons que la forme de Killing sur L est la forme quadratique définie par

$$Q_L(x) = \mathrm{Tr}\Big(\mathrm{ad}(x)^2\Big), \tag{1}$$

où $\mathrm{ad}(x)\colon L \longrightarrow L$ est l'opérateur linéaire défini par $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$, où $[\ ,\ ]$ est le produit de Lie. Il est classiquement connu que L est semi-simple si et seulement si Q_L est non-dégénérée [1, Chap. I, Section 6].

Dans cet article nous nous proposons de déterminer l'invariant de Hasse-Witt de Q_L pour une algèbre de Lie semi-simple quelconque L. Rappelons que pour une forme quadratique $Q = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$, donnée sous forme diagonale, l'invariant de Hasse-Witt de Q est défini par

$$h(Q) = \sum_{i<j} \left[\frac{a_i, a_j}{k}\right] \in \mathrm{Br}(k), \tag{2}$$

où $[a_i, a_j/k]$ est la classe dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$ de l'algèbre de quaternions $(a_i, a_j/k)$. Il est bien connu que $h(Q)$ est indépendant de la diagonalisation choisie pour Q (voir, par exemple, [17, Chap. 2, 12.8]).

La détermination de l'invariant de Hasse-Witt de la forme Q_L est un problème naturel qu'on peut se poser plus généralement pour toute k-algèbre qui possède une forme «trace» non-dégénérée. Ce problème et certaines de ses variantes ont été étudiés notamment dans le cadre des algèbres commutatives étales [20], [8], [5], [22] et des algèbres centrales simples [21], [24], [13], [16], [4].

Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, nous montrons que $h(Q_L)$ est en étroite relation avec un invariant défini par Tits dans [25] pour les représentations de L (théorème 4.2). La définition de cet invariant est rappelée au paragraphe 3.

Au paragraphe 4 nous établissons une formule de comparaison entre $h(Q_L)$ et $h(Q_{L_{\text{qdép}}})$, où $L_{\text{qdép}}$ est une algèbre quasi-déployée du même type interne que L (théorème 4.2).

Reçu par les éditeurs le 19 mars 1998; revisée le 30 juillet 1998.

L'auteur remercie le *Louisiana Education Quality Support Fund* pour son soutien financier durant la préparation de ce travail (contrat LEQSF (RF1995-97)-RD-A-40).

Classification (AMS) par sujet : primaire: 11E04, 11E72, 17B10, 17B20; secondaire: 11E88, 15A66.

Finalement, au paragraphe 5, nous calculons $h(Q_{L_{\text{qdép}}})$ pour une algèbre quasi-déployée (théorème 5.2 et corollaire 5.3). Ce résultat, combiné avec ceux du paragraphe 4, donne la formule générale pour $h(Q_L)$ d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque L.

La notation ci-dessous sera utilisée tout au long de cet article:

k	un corps de caractéristique nulle
$\bar{k}$	la clôture algébrique de k
Γ_k	le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$
$\mathrm{Br}(k)$	le groupe de Brauer de k, identifié à $H^2(k, \mathrm{GL}_1)$ et écrit additivement
$[a]$	l'image de $a \in k^\times/k^{\times 2}$ par l'isomorphisme canonique $k^\times/k^{\times 2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$
L	une algèbre de Lie semi-simple sur k
Q_L	la forme de Killing de L
$h(L)$	l'invariant de Hasse-Witt de Q_L (au lieu de $h(Q_L)$)
$d(L)$	le déterminant de Q_L (au lieu de $d(Q_L)$)
H	une sous-algèbre de Cartan de L définie sur k
$\overline{V}$	le produit tensoriel $V \otimes_k \bar{k}$, où V est un espace vectoriel sur k.
$\Phi(L, H)$	le système de racines de $\overline{L}$ par rapport à $\overline{H}$.

REMERCIEMENT. L'auteur remercie le referee pour ses commentaires et pour avoir suggéré d'inclure l'exemple 2.

2. **Quelques rappels sur les algèbres de Lie.** Avec les notations précédentes, soit $\Phi = \Phi(L, H) \subset \overline{H}^*$ l'ensemble des racines de $\overline{L}$. Comme H est définie sur k, l'ensemble Φ porte naturellement une action du groupe de Galois Γ_k.

DÉFINITION 1. Nous disons que H est *déployée* sur k si l'action de Γ_k sur Φ est triviale (c'est-à-dire si toutes les racines sont définies sur k). Nous dirons que L est déployée si elle admet une sous-algèbre de Cartan déployée.

Nous aurons aussi besoin de la notion plus générale d'algèbre *quasi-déployée*.

DÉFINITION 2. Une algèbre de Lie semi-simple L définie sur k est dite *quasi-déployée* si L admet une sous-algèbre de Borel B définie sur k.

Étant donné une algèbre de Lie semi-simple L définie sur k, nous pouvons lui associer l'unique algèbre de Lie déployée $L_{\text{dép}}$ sur k ayant le même système de racines [2, Ch. VIII, Section 4, No 3]. Ceci permet de considérer L comme une forme tordue de l'algèbre déployée associée $L_{\text{dép}}$ et d'appliquer le formalisme général de la descente galoisienne avec $L_{\text{dép}}$ comme «point base».

Soit $\mathrm{Aut}(\overline{L}_{\text{dép}})$ le groupe des automorphismes de $\overline{L}_{\text{dép}}$, pris comme groupe algébrique défini sur k. Soit $f \colon \overline{L} \longrightarrow \overline{L}_{\text{dép}}$ un isomorphisme sur $\bar{k}$. L'application $c \colon \Gamma_k \longrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{L}_{\text{dép}})$ définie par $c(\gamma) = f \circ \gamma(f)^{-1}$ est un 1-cocycle dont la classe dans $H^1\big(k, \mathrm{Aut}(\overline{L}_{\text{dép}})\big)$ est indépendante du choix de f. Cette classe sera notée par $[L]$. Par le formalisme général de descente galoisienne [19, Chap. 10], la correspondance $L \longmapsto [L]$ donne lieu à une bijection

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Classes d'isomorphisme}\\ \text{d'algèbres de Lie } L \text{ sur } k\\ \text{avec } \bar{L} \simeq \bar{L}_{\text{dép}}\end{array}\right\} \longleftrightarrow H^1\big(k, \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})\big). \tag{3}$$

Comme nous le verrons par la suite, le fait qu'en général le groupe $\operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})$ n'est pas connexe au sens de la géométrie algébrique pose certains problèmes techniques pour les applications que nous avons en vue. Nous allons donc avoir à considérer la composante connexe de l'élément neutre $\operatorname{Aut}_0(\bar{L}_{\text{dép}})$ et le quotient fini $\Sigma := \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}}) / \operatorname{Aut}_0(\bar{L}_{\text{dép}})$. Il est bien connu que Σ s'identifie canoniquement au groupe des symétries du diagramme de Dynkin de $L_{\text{dép}}$ [2, Chap. VIII, Section 5, No 1].

Soit $H_{\text{dép}} \subset L_{\text{dép}}$ une sous-algèbre de Cartan. Nous fixons une fois pour toutes un *épinglage* $E_{\text{dép}}$ de $(\bar{L}_{\text{dép}}, H_{\text{dép}})$ au sens de [2, Ch. VIII, Section 4, No 1]. Le sous-groupe Σ' de $\operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})$ qui préserve $E_{\text{dép}}$ s'identifie à Σ par la projection canonique $j\colon \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}}) \longrightarrow \Sigma$; donc la suite exacte

$$1 \longrightarrow \operatorname{Aut}_0(\bar{L}_{\text{dép}}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}}) \xrightarrow{j} \Sigma \longrightarrow 1 \tag{4}$$

est scindée sur k [2, Chap. VIII, Section 5, No 3, corollaire 1].

Soit $s\colon \Sigma \longrightarrow \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})$ la section de j d'image Σ'. Nous noterons par π le k-endomorphisme idempotent de $\operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})$ donné par $\pi = s \circ j$.

DÉFINITION 3. Nous disons que deux algèbres de Lie semi-simples L et L' sur k sont *du même type interne* si L' s'obtient en tordant L par un 1-cocycle à valeurs dans $\operatorname{Aut}_0(\bar{L})$.

LEMME 2.1. *Soit* $\pi_*\colon H^1\big(k, \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})\big) \longrightarrow H^1\big(k, \operatorname{Aut}(\bar{L}_{\text{dép}})\big)$ *l'application induite par* π *en cohomologie. Alors:*

(i) L_1 *et* L_2 *sont du même type interne si et seulement si* $\pi_*[L_1] = \pi_*[L_2]$

(ii) L *est quasi-déployée si et seulement si* $\pi_*[L] = [L]$.

DÉMONSTRATION. (i) Soient $f_i\colon \bar{L}_i \longrightarrow \bar{L}_{\text{dép}}$ $(i = 1, 2)$ des isomorphismes et soient c_i les 1-cocycles associés, c'est-à-dire, $c_i(\gamma) = f_i\gamma(f_i)^{-1}$ pour $\gamma \in \Gamma_k$. Quitte à remplacer c_1 par un cocycle dans la même classe de cohomologie, nous pouvons supposer $\pi c_1(\gamma) = \pi c_2(\gamma)$. Posons $g = f_1{}^{-1} f_2$. Nous avons par calcul direct que $g\gamma(g)^{-1} = f_1^{-1} c_2(\gamma) c_1(\gamma)^{-1} f_1$. Comme $c_1(\gamma)c_2(\gamma)^{-1}$ est dans la composante neutre, il en est de même pour $g\gamma(g)^{-1}$; par conséquent L_1 et L_2 sont du même type interne.

Réciproquement, si $g\colon \bar{L}_2 \longrightarrow \bar{L}_1$ est un isomorphisme tel que $g\gamma(g)^{-1} \in \operatorname{Aut}_0(\bar{L}_1)$, nous définissons $f_2 = f_1 g$ et par le même calcul nous voyons que $\pi c_1(\gamma) = \pi c_2(\gamma)$.

(ii) Supposons $\pi_*[L] = [L]$. La classe $[L]$ est alors représentée par un 1-cocycle $c\colon \Gamma_k \longrightarrow \Sigma'$. Le sous-groupe Σ' préserve en particulier une sous-algèbre de Borel $\bar{B}_{\text{dép}}$ définie sur k. La forme de $B_{\text{dép}}$ tordue par c est une k-sous-algèbre de Borel de L; donc L est quasi-déployée.

Réciproquement, comme L a une sous-algèbre de Borel définie sur k, nous pouvons choisir un épinglage E de $\bar{L}$ qui est préservé par le groupe de Galois Γ_k. Soit $f\colon \bar{L} \longrightarrow \bar{L}_{\text{dép}}$ un $\bar{k}$-isomorphisme. Le groupe $\operatorname{Aut}_0(\bar{L}_{\text{dép}})$ opérant transitivement sur l'ensemble des épinglages de $\bar{L}_{\text{dép}}$, nous pouvons supposer que $f(E) = E_{\text{dép}}$; donc nous avons $c(\gamma) := f\gamma(f)^{-1} \in \Sigma'$ pour tout $\gamma \in \Gamma_k$. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-064-x Published online by Cambridge University Press

3. **L'invariant de Tits.** Dans ce paragraphe, nous rappellerons brièvement une construction due à Tits [25] pour les représentations des groupes réductifs. Nous avons exprimé cette construction dans le langage des algèbres de Lie.

Soit $L_{\text{qdép}}/k$ une algèbre de Lie semi-simple quasi-déployée fixée.

DÉFINITION 4. Deux k-sous-algèbres de Lie $L_1, L_2 \subset \overline{L}_{\text{qdép}}$ avec $\overline{L}_1 = \overline{L}_2 = \overline{L}_{\text{qdép}}$ sont dites *strictement équivalentes* s'il existe $f \in \mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$ tel que $f(L_1) = L_2$. (Rappelons que $\mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$ désigne la composante neutre du groupe des automorphismes de $\overline{L}_{\text{qdép}}$.)

Il est facile de voir que l'ensemble des classes d'équivalence strictes est en correspondance biunivoque avec l'ensemble de cohomologie $H^1\big(k, \mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})\big)$. Deux classes strictes correspondent à la même classe d'isomorphisme si et seulement si elles ont la même image par l'application canonique $H^1\big(k, \mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})\big) \longrightarrow H^1\big(k, \mathrm{Aut}(\overline{L}_{\text{qdép}})\big)$ induite par l'inclusion.

Soit Λ le réseau des poids de $\overline{L}_{\text{qdép}}$ et soit Λ_r le réseau des racines. Soit Λ_+ le monoïde des poids dominants. Comme $L_{\text{qdép}}$ est quasi-déployée, le groupe de Galois $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ préserve les racines positives et donc opère aussi sur Λ_+.

THÉORÈME 3.1 (TITS [25, COROLLAIRE 3.5]). *Pour toute k-sous-algèbre de Lie $L \subset \overline{L}_{\text{qdép}}$ avec $\overline{L} = \overline{L}_{\text{qdép}}$, il y a un homomorphisme*

$$\beta_L : (\Lambda/\Lambda_r)^{\Gamma_k} \longrightarrow \mathrm{Br}(k), \tag{5}$$

ne dépendant que de la classe d'équivalence stricte de L, tel que pour tout poids dominant $\lambda \in \Lambda_+^{\Gamma_k}$, l'algèbre à division D déterminée par $\beta_L(\overline{\lambda}) \in \mathrm{Br}(k)$, où $\overline{\lambda}$ est l'image de λ par la projection canonique $\Lambda \longrightarrow \Lambda/\Lambda_r$, est caractérisée par l'existence d'une représentation sur k

$$r : L \longrightarrow \mathfrak{gl}_m(D)$$

de poids dominant simple λ.

Nous allons rappeler ci-dessous la description cohomologique de l'homomorphisme β_L du théorème 3.1 d'après [25, Section 4].

Posons $G_{\text{qdép}} = \mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$. Soit $\tilde{G}_{\text{qdép}}$ le revêtement universel de $G_{\text{qdép}}$ et soit $C_{\text{qdép}}$ son centre. Nous identifions toujours le réseau des poids Λ de $L_{\text{qdép}}$ au groupe des caractères d'un tore maximal de $\tilde{G}_{\text{qdép}}$.

Soit $\lambda \in (\Lambda_+)^{\Gamma_k}$ et soit $R : \tilde{G}_{\text{qdép}} \longrightarrow \mathrm{GL}_n$ la représentation irréductible de poids λ, définie sur k. Considérons le diagramme commutatif associé où les lignes sont exactes:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & C_{\text{qdép}} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & \tilde{G}_{\text{qdép}} \arrow[r] \arrow[d, "R"'] & G_{\text{qdép}} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{GL}_1 \arrow[r] & \mathrm{GL}_n \arrow[r] & \mathrm{PGL}_n \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-064-x Published online by Cambridge University Press

L'application à ce diagramme du foncteur de cohomologie mène à un carré commutatif

$$
\begin{array}{ccc}
H^1(k, G_{\text{qdép}}) & \xrightarrow{\partial} & H^2(k, C_{\text{qdép}}) \\
{\scriptstyle R_*}\big\downarrow & & {\scriptstyle \lambda_*}\big\downarrow \\
H^1(k, \mathrm{PGL}_n) & \xrightarrow{\partial} & H^2(k, \mathrm{GL}_1) = \mathrm{Br}(k).
\end{array}
\tag{6}
$$

où ∂ est l'opérateur de cobord [19, Appendix].

Définissons un élément $\beta_L(\lambda) \in \mathrm{Br}(k)$ en posant

$$\beta_L(\lambda) := \partial R_*(a_L). \tag{7}$$

où $a_L \in H^1(k, G_{\text{qdép}})$ est l'élément qui correspond à la classe stricte de L. Du fait de la commutativité du diagramme (6), l'élément $\beta_L(\lambda)$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\beta_L(\lambda) = \lambda_* \partial(a_L). \tag{8}$$

Il suit immédiatement de cette identité que la correspondance $\lambda \longmapsto \beta_L(\lambda)$ définit un homomorphisme

$$\beta_L \colon \mathbf{X}(C_{\text{qdép}})^{\Gamma_k} \longrightarrow \mathrm{Br}(k), \tag{9}$$

où $\mathbf{X}(C_{\text{qdép}})$ est le groupe des caractères de $C_{\text{qdép}}$.

L'homomorphisme du théorème 3.1 s'obtient de (9) en remplaçant le groupe $\mathbf{X}(C_{\text{qdép}})$ par le groupe Λ/Λ_r qui lui est canoniquement isomorphe.

4. **Un théorème de comparaison.** Dans ce paragraphe, nous établirons une formule qui compare les déterminants et les invariants de Hasse-Witt de L et de $L_{\text{qdép}}$, où $L_{\text{qdép}}$ est l'algèbre quasi-déployée associée à L par la condition $[L_{\text{qdép}}] = \pi_*[L]$, où π est comme au Lemme 2.1. Nous regardons toujours L comme une k-sous-algèbre de $\overline{L}_{\text{qdép}}$.

Comme $G_{\text{qdép}} = \mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$ préserve la forme de Killing, l'image de la représentation adjointe $\mathrm{Ad}\colon G_{\text{qdép}} \longrightarrow \mathrm{GL}(\overline{L}_{\text{qdép}})$ est contenue dans le groupe orthogonal $\mathrm{O}(\overline{L}_{\text{qdép}})$. Soit $\mathrm{Ad}_*\colon H^1(k, G_{\text{qdép}}) \longrightarrow H^1\big(k, \mathrm{O}(\overline{L}_{\text{qdép}})\big)$ l'application induite. Nous vérifions facilement que la classe d'isométrie de Q_L est donnée par

$$\mathrm{Ad}_*(a_L) \in H^1\big(k, \mathrm{O}(\overline{L}_{\text{qdép}})\big),$$

où $a_L \in H^1(k, G_{\text{qdép}})$ correspond à la classe stricte de L (mais $\mathrm{Ad}_*(a_L)$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de L au sens habituel, *i.e.*, non strict).

PROPOSITION 4.1. *$d(L) = d(L_{\text{qdép}})$.*

DÉMONSTRATION. Par la connexité de $G_{\text{qdép}}$, le groupe $\mathrm{Ad}(G_{\text{qdép}})$ est contenu dans $\mathrm{SO}(\overline{L}_{\text{qdép}})$; donc $\det \mathrm{Ad}_*(a_L) = 1$. Il s'ensuit que $d(L) = d(L_{\text{qdép}})$. ∎

Soit Φ le système de racines associé à $L_{\text{qdép}}$. Posons

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha, \tag{10}$$

où la somme s'étend à toutes les racines positives de Φ (par rapport à un choix de sous-algèbre de Borel de $L_{\text{qdép}}$ définie sur k). Il est à noter que comme $L_{\text{qdép}}$ est quasi-déployée, Γ_k ne fait que permuter les racines positives; il en résulte que ρ est invariant par Γ_k.

Le poids ρ intervient dans la formule classique de Weyl [2, Chap. 8, Section 9, Théorème 2] et la représentation qu'il détermine a été étudiée notamment par Kostant [11], [9], [10].

THÉORÈME 4.2. *Soient L une algèbre de Lie semi-simple sur k et $L_{\text{qdép}}$ une algèbre de Lie quasi-déployée du même type interne que L. Soit ρ le poids défini par (10). Alors*

$$h(L) = h(L_{\text{qdép}}) + \beta_L(\rho).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \tilde{G}_{\text{qdép}} \longrightarrow \mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}})$ le relèvement de l'application adjointe $\mathrm{Ad}\colon G_{\text{qdép}} \longrightarrow \mathrm{SO}(\overline{L}_{\text{qdép}})$.

Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & C_{\text{qdép}} & \longrightarrow & \tilde{G}_{\text{qdép}} & \longrightarrow & G_{\text{qdép}} & \longrightarrow & 1\\
 & & {\scriptstyle\widetilde{\mathrm{Ad}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\widetilde{\mathrm{Ad}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{Ad}}\big\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}}) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(\overline{L}_{\text{qdép}}) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

En appliquant le foncteur de cohomologie à ce diagramme, nous obtenons le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^1(k, G_{\text{qdép}}) & \xrightarrow{\partial} & H^2(k, C_{\text{qdép}})\\
{\scriptstyle\mathrm{Ad}_*}\big\downarrow & & {\scriptstyle\widetilde{\mathrm{Ad}}_*}\big\downarrow\\
H^1\big(k, \mathrm{SO}(\overline{L}_{\text{qdép}})\big) & \xrightarrow{\partial} & H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),
\end{array} \tag{11}$$

où ∂ est l'opérateur de cobord. Par le théorème de Springer [23, formule 4.7], nous avons la formule

$$h(L) = h(L_{\text{qdép}}) + \partial\ \mathrm{Ad}_*(a_L),$$

que nous exprimons, en utilisant la commutativité du diagramme (11), sous la forme

$$h(L) = h(L_{\text{qdép}}) + \widetilde{\mathrm{Ad}}_*\partial\,(a_L). \tag{12}$$

Nous allons déterminer explicitement l'homomorphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}_*\colon H^2(k, C_{\text{qdép}}) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; pour cela nous aurons besoin du résultat ci-dessous, dû à Kostant.

THÉORÈME 4.3 (KOSTANT [9], [11]). *Soit $\sigma\colon \mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}}) \longrightarrow \mathrm{GL}(S)$ la représentation spinorielle* [1] *de $\mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}})$. Alors la représentation de $\tilde{G}_{\text{qdép}}$ donnée par la composition*

$$\tilde{G}_{\text{qdép}} \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Ad}}} \mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}}) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{GL}(S)$$

est primaire en la représentation irréductible de $\tilde{G}_{\text{qdép}}$ de poids dominant ρ.

COROLLAIRE 4.4. *Pour $c \in C_{\text{qdép}}$ nous avons $\widetilde{\mathrm{Ad}}(c) = \rho(c)$.*

[1] Voir [6, Lecture 20] ou [3, Chap. IV, 6] pour une définition sur $\mathbb{C}$, ou [2, Chap. VIII, Section 13, No 2].

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-064-x Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. Il suit de la construction de S (voir [6, Lecture 20]) que l'algèbre de Clifford paire $C_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$ en tant que $\mathrm{Spin}(\overline{L}_{\text{qdép}})$-module par multiplication à gauche est une somme de copies de S. En particulier, par le théorème 4.3, ρ est un poids de $C_0(\overline{L}_{\text{qdép}})$ en tant que $\tilde{G}_{\text{qdép}}$-module via $\widetilde{\mathrm{Ad}}$.

Soit c un élément du centre $C_{\text{qdép}}$. Nous avons d'une part que $\widetilde{\mathrm{Ad}}(c)$ est un opérateur scalaire (en fait ± 1) et d'autre part nous savons que $\widetilde{\mathrm{Ad}}(c)$ admet $\rho(c)$ comme valeur propre, du fait que $C_{\text{qdép}}$ est contenu dans le tore maximal de $\tilde{G}_{\text{qdép}}$. Donc $\widetilde{\mathrm{Ad}}(c) = \rho(c)$. ■

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.2. Par le corollaire 4.4 nous avons $\widetilde{\mathrm{Ad}}_*\partial(a_g) = \rho_*\partial(a_L) = \beta_L(\rho)$, la dernière égalité résultant de (8). Nous terminons la démonstration du théorème 4.2 en combinant cette égalité avec (12). ■

EXEMPLE 1. Soit A une algèbre centrale simple sur k et soit $L = \{x \in A : \mathrm{tr}(x) = 0\}$. Alors $L_{\text{qdép}} = \mathfrak{sl}_n(k)$, où n est l'indice de A sur k. Dans cet exemple nous avons $\mathrm{Aut}_0(\overline{L}_{\text{qdép}}) = \mathrm{PSL}_n$ et nous vérifions facilement que si $a_L \in H^1(k, \mathrm{PSL}_n)$ est l'élément qui correspond à la classe stricte de L, alors $\partial a_L \in H^2(k, \boldsymbol{\mu}_n) = \mathrm{Br}_n(k)$ coïncide avec la classe $[A]$ de A dans le groupe de Brauer.

Soit $H \subset \mathfrak{sl}_n(k)$ la sous-algèbre de Cartan des matrices diagonales et soit $\varepsilon_i : H \longrightarrow k$ la forme linéaire donnée par $\varepsilon_i\big(\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)\big) = h_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Il est bien connu (voir par exemple [14, p. 294]) que le poids ρ de (10) s'exprime sous la forme

$$\rho = (n-1)\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}.$$

Nous avons ici $\tilde{G}_{\text{qdép}} = \mathrm{SL}_n$, donc le centre $C_{\text{qdép}}$ est composé de matrices scalaires de la forme $\Xi = \xi I$ où $\xi^n = 1$. En regardant maintenant ρ comme un caractère multiplicatif du sous-groupe des matrices diagonales de SL_n, nous avons

$$\begin{aligned} \rho(\Xi) &= \xi^{n-1}\xi^{n-2}\cdots\xi^1 \\ &= \xi^{n(n-1)/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Par conséquent, l'application $\rho_* : H^2(k, C_{\text{qdép}}) = \mathrm{Br}_n(k) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathrm{Br}_2(k)$ est donnée, en notation additive, par $\rho_*(x) = \frac{n(n-1)}{2}x$. Il s'ensuit que dans cet exemple l'invariant de Tits est

$$\begin{aligned} \beta_L(\rho) &= \rho_*\partial(a_L) \\ &= \frac{n(n-1)}{2}[A]. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons par le théorème 4.2:

$$h(L) = h(\mathfrak{sl}_n) + \frac{n(n-1)}{2}[A]. \tag{14}$$

Du fait de l'identité $Q_L(x) = 2n \cdot \mathrm{tr}_{A/k}(x^2)$, facile à vérifier, la formule (14) est essentiellement équivalente à la formule pour l'invariant de Hasse-Witt de la forme trace d'une algèbre à division [21], [24], [13].

EXEMPLE 2. Soit $E = k[t]/(t^2 - a)$, où $a \in k^\times$ est un élément fixé une fois pour toutes. Nous noterons par $\iota\colon E \longrightarrow E$ l'automorphisme non trivial de E et par χ le caractère de E/k, c'est-à-dire l'homomorphisme $\chi\colon \Gamma_k \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donné par $\gamma(\sqrt{a})/\sqrt{a} = (-1)^{\chi(\gamma)}$ pour $\gamma \in \Gamma_k$.

Soit A une algèbre semi-simple de dimension $2n^2$ sur k de centre E et munie d'une involution E-sesquilinéaire (*i.e.*, coïncidant avec ι sur E) $\sigma\colon A \longrightarrow A$.

Dans [16], Anne Quéguiner a étudié la forme quadratique $T(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{A/k}\big(x\sigma(x)\big)$ sur A et ses restrictions T^+ et T^- aux sous-espaces propres de l'involution A^+ et A^-. Elle a montré en particulier que l'invariant de Hasse-Witt $h(T^+)$ est déterminé par la *classe discriminante* de (A, σ) (voir [16, Section 3]). Dans cet exemple, nous nous proposons de retrouver ce résultat à partir du théorème 4.2.

Posons

$$L = \big\{x \in A : x + \sigma(x) = 0 \text{ et } \operatorname{tr}_{A/k}(tx) = 0\big\}. \tag{15}$$

On vérifie facilement que L est une algèbre de Lie pour l'opération $[x, y] = xy - yx$ et qu'elle est isomorphe à $\mathfrak{sl}_n$ sur la clôture algébrique $\bar{k}$.

La forme trace $T(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_{A/k}\big(x\sigma(x)\big)$ restreinte à L et la forme de Killing Q_L satisfont la relation

$$Q_L(x) = -2nT^-(x) \quad \text{pour} \quad x \in L.$$

Nous déduisons de cette relation et de la décomposition orthogonale $A^- = kt \oplus L$ que $T^- \simeq \langle -na\rangle \perp \langle -2n\rangle Q_L$. D'autre part, nous savons aussi que $T^+ \simeq -aT^-$; donc

$$T^+ \simeq \langle n\rangle \perp \langle 2na\rangle Q_L. \tag{16}$$

Il s'ensuit que les invariants de Q_L peuvent facilement être déduits de ceux de T^+ et réciproquement.

Soit $P = (p_{ij})$ la matrice $n \times n$ définie par $p_{ij} = \delta_{i,n+1-j}$. Considérons l'algèbre à involution $\big(M_n(E), \tau\big)$ où τ est donné par

$$\tau(x) = P^{-1}\iota(x)^t P.$$

L'algèbre de Lie associée à $\big(M_n(E), \tau\big)$ est l'algèbre de la forme hermitienne sur E de matrice P:

$$L_0 := \big\{x \in M_n(E) : Px + \iota(x)^t P = 0 \text{ et } \operatorname{Tr}(tx) = 0\big\}.$$

Cette algèbre est quasi-déployée sur k. En effet, nous pouvons regarder L_0 comme la forme tordue de $\mathfrak{sl}_n$ par le 1-cocycle φ donné par

$$\varphi\colon \gamma \longmapsto u^{\chi(\gamma)} \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{sl}_n).$$

où u est l'automorphisme de $\mathfrak{sl}_n$ défini par $u(x) = -Px^tP^{-1}$. Or, cet automorphisme préserve la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{sl}_n$ formée des matrices triangulaires supérieures, donc elle est aussi préservée par l'action de Γ_k tordue par φ. Il en résulte que L_0 est quasi-déployée (d'où le choix de P).

En identifiant $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n)$ avec $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n)$ par différentiation, nous désignerons aussi par u l'élément de $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n)$ donné par $x \longmapsto P(x^t)^{-1}P^{-1}$ et par φ le cocycle correspondant à valeurs dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n)$. Nous noterons par ${}_\varphi\,\mathrm{SL}_n$ et ${}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n$ les groupes obtenus en tordant SL_n et PSL_n respectivement par φ.

Dans [16, 3.1], A. Quéguiner montre qu'il y a une suite exacte de groupes algébriques sur k

$$1 \longrightarrow {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}\big(\overline{M_n}(E), \tau\big) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Les algèbres à involution de deuxième espèce (A, σ) de centre E et de dimension $2n^2$ sur k sont classifiées par l'image de l'application $i_*\colon H^1(k, {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n) \longrightarrow H^1\big(k, \mathrm{Aut}\,(M_n(E)\big)$, ou, ce qui revient au même, par l'ensemble quotient

$$H^1(k, {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \tag{17}$$

où le générateur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur ${}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n$ par u. Or, l'ensemble (17) classifie aussi les algèbres de Lie sur k du type interne de $L_0 = {}_\varphi\mathfrak{sl}_n$ et il est facile de voir que la bijection est donnée par la correspondance $(A, \sigma) \longmapsto L$ où L est définie par (15).

L'opérateur de cobord associé à la suite exacte

$$1 \longrightarrow {}_\varphi\boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow {}_\varphi\,\mathrm{SL}_n \longrightarrow {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n \longrightarrow 1$$

induit une application

$$\partial\colon H^1(k, {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(k, {}_\varphi\boldsymbol{\mu}_n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Nous notons $[A, \sigma]$ l'élément de $H^1(k, {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui correspond à (A, σ). La *classe discriminante* de (A, σ) est définie par

$$\mathfrak{D}(A, \sigma) = \partial\,[A, \sigma] \in H^2(k, {}_\varphi\boldsymbol{\mu}_n)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}). \tag{18}$$

(voir [16, 3.5.2]).

Soit ρ le poids défini en (10). Par (6) et (8) avec $G_{\text{qdép}} = {}_\varphi\,\mathrm{PSL}_n$ (donc $C_{\text{qdép}} = {}_\varphi\boldsymbol{\mu}_n$) et $\lambda = \rho$, nous avons que l'invariant de Tits $\beta_L(\rho)$ est donné par

$$\beta_L(\rho) = \rho_*\mathfrak{D}(A, \sigma). \tag{19}$$

Donc, par le théorème 4.2 et (19), nous avons

$$h(L) = h(L_0) + \rho_*\mathfrak{D}(A, \sigma). \tag{20}$$

Nous remarquons qu'en vertu de (13) l'application $\rho_*\colon {}_\varphi\boldsymbol{\mu}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_1$ induite par ρ est donnée par $\rho_*(\xi) = \xi^{n(n-1)/2}$. Donc, compte tenue de la relation (16), l'égalité (20) est essentiellement équivalente à [16, Theorem 2].

Le terme $h(L_0)$ de (20) peut être déterminé explicitement par calcul élémentaire direct (par (23) ci-dessous, il suffit de calculer la restriction de Q_{L_0} à une sous-algèbre de Cartan), ou on peut aussi utiliser les formules générales du paragraphe 5 (corollaire 5.3) pour les algèbres quasi-déployées.

5. **Le cas des algèbres quasi-déployées.** Soit $L_{\text{dép}}$ une algèbre semi-simple sur k déployée par une sous-algèbre de Cartan $H_{\text{dép}} \subset L_{\text{dép}}$ fixée une fois pour toutes. Soit Φ le système de racines associé à la paire $(L_{\text{dép}}, H_{\text{dép}})$.

Soit Σ le groupe des symétries du diagramme de Dynkin de Φ. Nous rappelons que Σ s'identifie au sous-groupe de $\operatorname{Aut}(\overline{L}_{\text{dép}})$ qui préserve un épinglage de $(L_{\text{dép}}, H_{\text{dép}})$ [2, Chap. VIII, Section 5, No 3, corollaire 1].

Soit $L_{\text{qdép}}$ une algèbre quasi-déployée donnée par un homomorphisme $\varphi\colon \Gamma_k \longrightarrow \Sigma$. Pour $\alpha \in \Phi$, soit $\overline{L}^{\alpha}_{\text{dép}}$ le sous-espace primaire de $\overline{L}_{\text{dép}}$ relatif à α. Posons $\overline{N}^{+}_{\text{dép}} = \oplus_{\alpha>0}\overline{L}^{\alpha}_{\text{dép}}$ et $\overline{N}^{-}_{\text{dép}} = \oplus_{\alpha>0}\overline{L}^{-\alpha}_{\text{dép}}$, où l'on somme sur l'ensemble des racines positives.

Il est bien connu ([18, Chap. IV] ou [2, Chap. VIII, Section 2, No 2]) que $\overline{L}_{\text{dép}}$ se décompose en somme directe

$$\overline{L}_{\text{dép}} = \overline{H}_{\text{dép}} \oplus (\overline{N}^{+}_{\text{dép}} \oplus \overline{N}^{-}_{\text{dép}}). \tag{21}$$

Nous considérons l'action de Γ_k sur $\overline{L}_{\text{dép}}$ tordue par φ, c'est-à-dire, donnée par la formule $\gamma * x = \varphi(\gamma)\gamma(x)$ pour $\gamma \in \Gamma_k$ et $x \in \overline{L}_{\text{dép}}$. Comme Σ permute les racines positives, l'action $*$ préserve les sous-espaces $\overline{N}^{+}_{\text{dép}}$, $\overline{N}^{-}_{\text{dép}}$ et $\overline{H}_{\text{dép}}$; donc en prenant les points fixes de l'action $*$ en (21) nous obtenons une décomposition sur k de l'algèbre quasi-déployée $L_{\text{qdép}}$

$$L_{\text{qdép}} = H_{\text{qdép}} \oplus (N^{+}_{\text{qdép}} \oplus N^{-}_{\text{qdép}}). \tag{22}$$

Il est bien connu que la forme de Killing met en dualité $N^{+}_{\text{qdép}}$ et $N^{-}_{\text{qdép}}$, par conséquent la restriction de $Q_{L_{\text{qdép}}}$ à $N^{+}_{\text{qdép}} \oplus N^{-}_{\text{qdép}}$ est une forme hyperbolique; donc

$$Q_{L_{\text{qdép}}} = Q_{H_{\text{qdép}}} \perp \text{ (forme hyperbolique)}, \tag{23}$$

où $Q_{H_{\text{qdép}}}$ est la restriction de $Q_{L_{\text{qdép}}}$ à la sous-algèbre de Cartan $H_{\text{qdép}}$.

En vertu de (23), il suffit d'étudier la forme $Q_{H_{\text{qdép}}}$. Nous remarquons que la classe d'isométrie de cette forme est déterminée par le 1-cocycle

$$\Gamma_k \xrightarrow{\varphi} \Sigma \longrightarrow \mathrm{O}(\overline{H}_{\text{dép}}).$$

Pour $\sigma \in \Sigma$ nous noterons $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ en tant que permutation des racines simples et nous l'écrirons additivement.

Nous rappelons que pour $a \in k^{\times}/k^{\times 2}$, le symbole $[a]$ désigne l'image de a par l'isomorphisme canonique $k^{\times}/k^{\times 2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

PROPOSITION 5.1. *Avec ces notations, nous avons*

$$\big[d(H_{\text{qdép}})\big] = \big[d(H_{\text{dép}})\big] + \varepsilon_*(\varphi). \tag{24}$$

DÉMONSTRATION. Comme la forme $Q_{H_{\text{qdép}}}$ est déterminée par la classe de φ dans $H^1\big(k, \mathrm{O}(\overline{H}_{\text{dép}})\big)$, nous avons

$$\big[d(H_{\text{qdép}})\big] = \big[d(H_{\text{dép}})\big] + \det\varphi.$$

D'autre part, en prenant comme base de $H_{\text{dép}}$ la base duale de la base de $H^*_{\text{dép}}$ formée de racines simples, on voit aisément que $\det\varphi = \varepsilon_*(\varphi)$; d'où la proposition. ∎

Soit $p\colon \mathrm{Pin}(\overline{H}_{\text{dép}}) \longrightarrow \mathrm{O}(\overline{H}_{\text{dép}})$ la projection canonique et soit $\tilde{\Sigma} = p^{-1}(\Sigma)$. Comme l'action de Γ_k sur Σ est triviale, Γ_k opère sur les fibres de p au dessus de Σ. Soit $s\colon \Sigma \longrightarrow \tilde{\Sigma}$ une section ensembliste pour p. Pour $\sigma \in \Sigma$ et $\gamma \in \Gamma_k$ définissons le symbole $\{\sigma, \gamma\} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par la relation

$$\gamma\big(s(\sigma)\big) = (-1)^{\{\gamma,\sigma\}} s(\sigma).$$

Nous vérifions aussitôt que $\{\sigma, \gamma\}$ ne dépend pas du choix de la section s et qu'il définit un bihomomorphisme $\{\ ,\ \}\colon \Gamma_k \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En composant avec $\varphi\colon \Gamma_k \longrightarrow \Sigma$ sur le deuxième argument, nous obtenons un 2-cocycle

$$\begin{aligned} \Gamma_k \times \Gamma_k &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\longmapsto \{\gamma_1, \varphi(\gamma_2)\}, \end{aligned} \tag{25}$$

dont la classe dans $H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sera notée c_φ.

Soit $S \in H^2(\Sigma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'élément déterminé par l'extension $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma \longrightarrow 1$.

THÉORÈME 5.2. *Avec les notations ci-dessus nous avons*

$$h(H_{\text{qdép}}) = h(H_{\text{dép}}) + \varphi^* S + c_\varphi + \varepsilon_*(\varphi) \cdot \big[d(H_{\text{dép}})\big], \tag{26}$$

où $\cdot$ est le cup-produit.

DÉMONSTRATION. Soit $\partial\colon H^1\big(k, \mathrm{O}(\overline{H}_{\text{dép}})\big) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'opérateur de cobord associé à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Pin}(\overline{H}_{\text{dép}}) \longrightarrow \mathrm{O}(\overline{H}_{\text{dép}}) \longrightarrow 1.$$

D'une part, la formule de Springer [23, formule 4.7] nous donne l'égalité

$$h(H_{\text{qdép}}) = h(H_{\text{dép}}) + \partial(\varphi) + \big[-d(H_{\text{qdép}})\big] \cdot \big[d(H_{\text{dép}})\big], \tag{27}$$

et d'autre part nous calculons explicitement un 2-cocycle u représentant $\partial(\varphi)$ à l'aide d'une section ensembliste $s\colon \Sigma \longrightarrow \tilde{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} u(\gamma_1, \gamma_2) &= s\big(\varphi(\gamma_1\gamma_2)\big)^{-1} s\big(\varphi(\gamma_1)\big)\gamma_1\Big(s\big(\varphi(\gamma_2)\big)\Big) \\ &= s\big(\varphi(\gamma_1\gamma_2)\big)^{-1} s\big(\varphi(\gamma_1)\big) s\big(\varphi(\gamma_2)\big)(-1)^{\{\gamma_1,\varphi(\gamma_2)\}}. \end{aligned} \tag{28}$$

Nous remarquons que le 2-cocycle $(\gamma_1, \gamma_2) \longmapsto s\big(\varphi(\gamma_1\gamma_2)\big)^{-1} s\big(\varphi(\gamma_1)\big) s\big(\varphi(\gamma_2)\big)$ qui apparaît en (28) représente $\varphi^* S$; donc, en notation additive, nous avons

$$\partial(\varphi) = \varphi^* S + c_\varphi.$$

La formule annoncée s'obtient en combinant cette égalité avec (27) et (24). ∎

COROLLAIRE 5.3. *Soit $2r$ le nombre de racines. Alors*

$$h(L_{\text{qdép}}) = h(L_{\text{dép}}) + \varphi^* S + c_\varphi + \big[(-1)^r d(H_{\text{dép}})\big] \cdot \varepsilon_*(\varphi),$$

où $\cdot$ est le cup-produit.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-064-x Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION. Nous avons vu que $Q_{L_{\text{dép}}}$ et $Q_{L_{\text{qdép}}}$ se décomposent en somme orthogonale de leur restriction à une sous-algèbre de Cartan et de la forme hyperbolique de rang $2r$. Donc

$$h(L_{\text{dép}}) = h(H_{\text{dép}}) + \frac{r(r-1)}{2}[-1]\cdot[-1] + r[-1]\cdot\big[d(H_{\text{dép}})\big]$$

et

$$h(L_{\text{qdép}}) = h(H_{\text{qdép}}) + \frac{r(r-1)}{2}[-1]\cdot[-1] + r[-1]\cdot\big[d(H_{\text{qdép}})\big].$$

En additionnant ces deux égalités nous obtenons

$$\begin{aligned} h(L_{\text{dép}}) + h(L_{\text{qdép}}) &= h(H_{\text{dép}}) + h(H_{\text{qdép}}) + r[-1]\cdot\big[d(H_{\text{dép}})d(H_{\text{qdép}})\big] \\ &= h(H_{\text{dép}}) + h(H_{\text{qdép}}) + r[-1]\cdot\varepsilon_*(\varphi) \\ &= \varepsilon_*(\varphi)\cdot\big[d(H_{\text{dép}})\big] + \varphi^*S + c_\varphi + r[-1]\cdot\varepsilon_*(\varphi), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence de (24) et la troisième de (26). ■

EXEMPLE 3. Soit $L_{\text{dép}} = \mathfrak{sl}_2(k)\times\mathfrak{sl}_2(k)\times\cdots\times\mathfrak{sl}_2(k)$ (n fois). Dans cet exemple nous voyons facilement que $\Sigma = \mathfrak{S}_n$, le groupe symétrique en n lettres. En tant que groupe d'automorphismes, Σ agit sur $L_{\text{dép}}$ en permutant les facteurs $\mathfrak{sl}_2(k)$.

Soit $\varphi\colon\Gamma_k \longrightarrow \Sigma$ un homomorphisme et soit $L_{\text{qdép}}$ l'algèbre quasi-déployée déterminée par φ.

Nous allons calculer tous les termes de la formule du théorème 5.2. On voit aisément que $Q_{H_{\text{dép}}} \simeq \langle 2, 2, \ldots, 2\rangle$, donc $d(H_{\text{dép}}) = 2^n$ et $h(H_{\text{dép}}) = \frac{n(n-1)}{2}[2]\cdot[2] = 0$. Un calcul facile montre que $\tilde{\Sigma}$ est rationnel sur k; donc le cocycle (25) est trivial, c'est-à-dire, $c_\varphi = 0$. L'invariant S coïncide dans cet exemple avec la classe canonique $s_n \in H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ définie en [20, 1.5]. Donc, la formule du théorème 5.2 devient:

$$h(H_{\text{qdép}}) = n[2]\cdot\varepsilon_*(\varphi) + \varphi^*(s_n). \tag{29}$$

La formule (29) est en fait équivalente à la formule de Serre pour la forme trace des algèbres étales [20, Théorème 1]. En effet, soit E l'algèbre étale déterminée par φ. La relation entre la forme trace de E et la forme de Killing sur $H_{\text{qdép}}$ est donnée par l'identité $Q_{H_{\text{qdép}}} = 2\,\mathrm{Tr}_{E/k}(X^2)$, vérifiée facilement par calcul direct. Donc

$$h\big(\mathrm{Tr}_{E/k}(X^2)\big) = h(H_{\text{qdép}}) + (n-1)[2]\cdot[d_{E/k}], \tag{30}$$

où $d_{E/k}$ est le discriminant de E/k (voir [12, Formule 3.16]). Clairement $[d_{E/k}] = \varepsilon_*(\varphi)$; donc, en combinant les formules (29) et (30), nous retrouvons la formule de Serre [20]:

$$h\big(\mathrm{Tr}_{E/k}(X^2)\big) = [2]\cdot[d_{E/k}] + \varphi^*(s_n).$$

REMARQUES.

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines simples de Φ. Le groupe Σ agit en permutant ces racines; nous avons donc un plongement de Σ dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, unique à conjugaison près. L'homomorphisme composé

$$\Gamma_k \xrightarrow{\varphi} \Sigma \longrightarrow \mathfrak{S}_n$$

définit une algèbre étale E/k. L'invariant $\varepsilon_*(\varphi)$ du théorème 5.2 n'est autre que le discriminant de E/k.

2. Si $\varphi(\Gamma_k)$ est contenu dans le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, alors la formule du corollaire 5.3 prend la forme simplifiée

$$h(L_{\text{qdép}}) = h(L_{\text{dép}}) + \varphi^* S + c_\varphi.$$

3. En combinant le théorème 4.2 et le corollaire 5.3 nous obtenons une formule pour $h(L)$ d'une algèbre de Lie semi-simple quelconque L en termes d'invariants de l'algèbre déployée $L_{\text{dép}}$ de même système de racines. Pour $L_{\text{dép}}$, les invariants $d(L_{\text{dép}})$ et $h(L_{\text{dép}})$ sont faciles à calculer en pratique utilisant la base canonique dite «de Weyl» (voir [18, Chap. 6, Section 4]).

REFERENCES

1. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 1, 2 et 3*. Hermann, 1972.

2. ———, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8*. Hermann, 1975.

3. T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact groups*. Springer-Verlag, 1985.

4. R. Brusamarello and J. Morales, *On the second Stiefel-Whitney class of scaled trace forms of central simple algebras*. Preprint, 1997.

5. A. Fröhlich, *Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants*. J. Reine Angew. Math. **360**(1985), 84–123.

6. W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*. Springer-Verlag, 1991.

7. V. P. Gallagher, *The Cartan-Killing form on simple $\mathfrak{p}$-adic Lie algebras*. Ph.D. thesis, University of Notre Dame, 1975.

8. B. Kahn, *Classes de Stiefel-Whitney de formes quadratiques et de représentations galoisiennes réelles*. Invent. Math. **78**(1984), 223–256.

9. B. Kostant, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*. Ann. of. Math. (2) **74**(1961), 329–387.

10. ———, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight* ρ. Selecta Math. New Ser. **2**(1996), 43–91.

11. ———, *Clifford algebra analogue of the Hopf-Koszul-Samelson theorem, the ρ-decomposition $C(\mathfrak{g}) = \operatorname{End} V_\rho \otimes C(P)$, and the $\mathfrak{g}$-module structure of $\wedge\mathfrak{g}$*. Adv. Math. **125**(1997), 275–350.

12. T. Y. Lam, *The algebraic theory of quadratic forms*. W. A. Benjamin, 1973.

13. D. W. Lewis and J. F. Morales, *The Hasse invariant of the trace form of a central simple algebra*. Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Théorie des nombres **92/93-93/94**, 1994.

14. O. L. Onishchick and E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*. Springer-Verlag, 1990.

15. A. Quéguiner, *Invariants d'algèbres à involution*. Ph.D. thesis, Université de Franche-Comté, Besançon, 1996.

16. ———, *Cohomological invariants of algebras with involution*. J. Algebra (1997), 299–330.

17. W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms*. Grundlehren Math. Wiss. **270**, Springer-Verlag, 1985.

18. J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. Benjamin, 1966.

19. ———, *Local fields*. Graduate Texts in Math. **67**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

20. ———, *L'invariant de Witt de la forme* $\operatorname{Tr}(x^2)$. Comment. Math. Helv. **59**(1984), 651–676.

21. ———, *Cohomologie galoisienne*. 5e édition, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer Verlag, 1994.

22. V. Snaith, *Stiefel-Whitney classes of a symmetric bilinear form—a formula of Serre*. Can. Math. Bull. (2) **28**(1985), 218–222.
23. T. A. Springer, *On the equivalence of quadratic forms*. Proc. Neder. Acad. Sci. **62**(1959), 241–253.
24. J.-P. Tignol, *La norme des espaces quadratiques et la forme trace des algèbres simples centrales*. Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Théorie des nombres **92/93-93/94**, 1994.
25. J. Tits, *Répresentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque*. J. Reine Angew. Math **247**(1971), 198–220.

Louisiana State University
Department of Mathematics
Bâton Rouge, LA 70803
USA
email: morales@math.lsu.edu