Canad. Math. Bull. Vol. **23** (2), 1980

ADJONCTION OU SUPPRESSION D'OBJECTIFS EN PROGRAMMATION À OBJECTIFS LINÉAIRES MULTIPLES

PAR

L. BRAGARD ET J. VANGELDÈRE

INTRODUCTION. La portée et les buts de cet article sont signalés au début des différents paragraphes et dans les remarques qui suivent le théorème 3, le lemme 5 et le théorème 21. Limitons-nous à mentionner ici que le sujet traité est à la fois en relation avec la théorie des systèmes d'inéquations linéaires (théorie des polyèdres coniques), avec le concept de point Λ-extrême, avec les diverses notions d'efficacité par rapport à un système d'objectifs linéaires et avec la programmation à objectifs linéaires multiples.

1. **Notations et préliminaires.** Soit A une partie quelconque de l'espace euclidien à n dimensions $\mathbb{R}^n$. ${}^1A$ et ${}^cA$ désignent respectivement les *enveloppes affine* et *convexe* de A [6, p. 32]. L'*adhérence* de A (pour la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^n$) et l'*intérieur relatif* de A (intérieur de A pour la topologie euclidienne de ${}^1A$) sont respectivement notés $\bar{A}$ et ${}^iA$. Le symbole $A \backslash B$ est réservé pour la différence ensembliste de A et B.

Si x, y sont deux points quelconques, les notations un peu lourdes ${}^1\{x, y\}$, ${}^c\{x, y\}$ et ${}^c\{x, y\}\backslash\{x, y\}$ sont respectivement remplacées par $(x:y)$, $[x:y]$ et $]x:y[$.

Un *cône* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble non vide Λ tel que $x \in \Lambda$ et $\alpha \geq 0$ impliquent $\alpha x \in \Lambda$ [9, p. 322]. Il s'agit donc de cônes dont le sommet coïncide avec l'origine 0 de $\mathbb{R}^n$ et qui sont pointés (le sommet est un élément du cône).

A tout couple (X, Λ) (X partie de $\mathbb{R}^n$, Λ cône de $\mathbb{R}^n$) est associé $\text{Ext}[X; \Lambda]$, ensemble des *points Λ-extrêmes de X*. Par définition [9, p. 336], $x \in \text{Ext}[X; \Lambda] \Leftrightarrow x \in X$ et $(x - \Lambda) \cap X = \{x\}$.

Dans ce texte, f désigne toujours une application $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et les f_i sont toujours des formes linéaires non nulles de $\mathbb{R}^n$ appelées *objectifs à maximiser*. A l'application f, qui synthétise le système d'objectifs considérés, on associe les ensembles suivants:

$$\Lambda_{sf} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p\},$$
$$S_f = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, p\},$$
$$\Lambda_f = (\Lambda_{sf} \backslash S_f) \cup \{0\},$$
$$\Lambda_{rwf} = {}^i\Lambda_f \cup \{0\},$$
$$J_f = \{j \in \{1, 2, \ldots, p\} : f_j(x) = 0, \qquad \forall x \in \Lambda_{sf}\},$$
$$I_f = \{1, 2, \ldots, p\} \backslash J_f.$$

Reçu par les rédacteurs le 25 avril 1978 et, dans sa version révisée, le 3 janvier 1979.

2

Notons que la détermination de J_f et I_f conduit au problème de programmation linéaire de la recherche du maximum de f_j sur Λ_{sf} $(j=1, 2, \ldots, p)$.

Les propriétés suivantes sont simples à démontrer [7, pp. 8–9]. Certaines sont des conséquences de propriétés plus générales [2, lemmes 2, 3 et 7].

Lemme 1. (a) Λ_{sf} *est un cône convexe et fermé.*

(b) S_f *est le sous-espace caractéristique de* $\Lambda_{sf}: S_f=(-\Lambda_{sf})\cap\Lambda_{sf}$.

(c) Λ_f *et* Λ_{rwf} *sont des cônes convexes.*

(d) ${}^1\Lambda_{sf}=\{x\in\mathbb{R}^n : f_j(x)=0,\ \forall j\in J_f\}$.

(e) $I_f=\emptyset \Leftrightarrow \Lambda_{sf}=S_f$.

(f) *Lorsque* I_f *n'est pas vide, on a les égalités suivantes*:

$$
{}^1\Lambda_{sf}={}^1\Lambda_f={}^1\Lambda_{rwf}; \qquad \bar{\Lambda}_{sf}=\bar{\Lambda}_f=\bar{\Lambda}_{rwf}={}^i\bar{\Lambda}_f=\Lambda_{sf};
$$
$$
{}^i\Lambda_{sf}={}^i\Lambda_f={}^i\Lambda_{rwf}=\{x\in{}^1\Lambda_{sf}: f_i(x)>0, \qquad \forall i\in I_f\}.
$$

Un point x d'une partie X de $\mathbb{R}^n$ est appelé point *efficace de X pour f* s'il n'existe pas de point $y\in X$ tel que $f_i(y)\geq f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ et $f(y)\neq f(x)$ [5, p. 208], [9, p. 321]. Il s'agit donc d'un point extrême de X par rapport au cône $-\Lambda_f$.

Par définition, un point *strictement efficace* (resp. *relativement faiblement efficace*) de *X pour f* est un point de $\mathrm{Ext}[X; -\Lambda_{sf}]$ (resp. $\mathrm{Ext}[X; -\Lambda_{rwf}]$).

Les ensembles des points efficaces, strictement efficaces et relativement faiblement efficaces de X pour f sont respectivement notés $E[X;f]$, $E_s[X;f]$ et $E_{rw}[X;f]$. Des exemples simples illustrant ces diverses notions sont donnés dans [1], [7] et [8]. Par ailleurs, lorsque ${}^1\Lambda_{sf}=\mathbb{R}^n$, un point relativement faiblement efficace est un point faiblement efficace au sens de J. G. Lin [4, p. 47].

Il est simple de prouver les trois théorèmes suivants. Le premier n'est qu'une légère extension d'un lemme de P. L. Yu [9, p. 336]; le second n'est qu'une redite du théorème 6.5 de [7, p. 15] et traduit, en fait, les définitions adoptées ici; le troisième résulte directement des deux premiers après avoir observé que $\Lambda_{rwf}\subset\Lambda_f\subset\Lambda_{sf}$.

Théorème 1. *Soient Λ et Λ' deux cônes de $\mathbb{R}^n$.*

(a) $\mathrm{Ext}[X; \Lambda']\subset\mathrm{Ext}[X; \Lambda]$, $\forall X\subset\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \Lambda\subset {}'$.

(b) $\mathrm{Ext}[X; \Lambda']=\mathrm{Ext}[X; \Lambda]$, $\forall X\subset\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \Lambda=\Lambda'$.

Théorème 2. *Pour tout ensemble X de $\mathbb{R}^n$,* $E_s[X;f]=\mathrm{Ext}[X; -\Lambda_{sf}]$, $E[X;f]=\mathrm{Ext}[X; -\Lambda_f]$ *et* $E_{rw}[X;f]=\mathrm{Ext}[X; -\Lambda_{rwf}]$.

Théorème 3. $\forall X\subset\mathbb{R}^n$, $E_s[X;f]\subset E[X;f]\subset E_{rw}[X;f]$.

Remarque. Les trois types de points efficaces ne sont donc que des cas particuliers du concept de points Λ-extrêmes. Toutefois, ce dernier est trop général pour fournir certaines propriétés "fines" des divers types d'efficacité.

En particulier, certaines propriétés importantes de [9] ne sont pas applicables puisque, à l'exception de situations trés particulières, Λ_{sf} n'est pas acute, Λ_f n'est ni ouvert ni fermé, $\mathrm{Ext}[X; \Lambda_f] \neq \mathrm{ext}[X; \bar{\Lambda}_f]$.

Par contre, les cônes Λ_{sf}, Λ_f et Λ_{rwf} sont des caractéristiques du système d'objectifs f. En effet, si f et f' sont deux systèmes d'objectifs tels que $\Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'}$, alors, pour toute partie X de $\mathbb{R}^n$, $E_s[X; f] = E_s[X; f']$, $E[X; f] = E[X; f']$ et $E_{rw}[X; f] = E_{rw}[X; f']$. De plus, si, par exemple, $\Lambda_f \neq \Lambda_{f'}$, il existe au moins un sous-ensemble Y de $\mathbb{R}^n$ pour le quel $E[Y; f] \neq E[Y; f']$. En fait, les théorèmes 1 et 2 permettent de comparer des systèmes d'objectifs via la comparaison, pour l'inclusion ensembliste, des cônes associés. De même, ils permettent également de comparer les trois types de points efficaces pour un même système d'objectifs. Cette comparaison pourrait être qualifiée de "globale" puisque, dans les premiers membres des équivalences du théorème 1, il est important d'indiquer $\forall X \subset \mathbb{R}^n$. En particulier, ceci signifie que l'on pourrait avoir, pour une partie fixée T de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Ext}[T; \Lambda] = \mathrm{Ext}[T; \Lambda']$ sans avoir $\Lambda = \Lambda'$. Il s'agit ici de comparaison de points extrêmes (pour des cônes différents) relativement à un ensemble fixé T. Ce problème est certes intéressant, mais ne sera pas considéré dans cet article.

Dans la suite, nous nous limiterons très souvent aux comparaisons pour l'inclusion ensembliste des divers cônes et nous laisserons au lecteur le soin de les traduire, via les théorèmes 1 et 2, en termes des trois notions d'efficacité sous-jacentes. De plus, certaines conditions peuvent parfois s'exprimer sous des formes distinctes bien que trivialement équivalentes compte tenu des définitions. Dans cette éventualité, nous nous limiterons à l'indication, entre parenthèses, de ces équivalences.

2. **Comparison des divers types d'efficacité pour *f*.** Le théorème 4 caractérise la discordance de f sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. $E[X; f] = X$, $\forall X \subset \mathbb{R}^n$). Celle-ci constitue une éventualité assez particulière qui, très souvent, devra être examinée séparément. Les deux théorèmes suivants traitent de la coïncidence entre l'efficacité et, respectivement, la stricte efficacité et la relative efficacité faible.

THÉORÈME 4. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\Lambda_{sf} = S_f (\Leftrightarrow \Lambda_f = \{0\} \Leftrightarrow \Lambda_{rwf} = \{0\})$;
(b) $I_f = \emptyset$;
(c) *il existe* $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ *tels que* $\sum_1^p \lambda_i f_i = 0$.

Preuve. L'équivalence entre (a) et (c) résulte de [2, th. 21 et 22]; celle entre (a) et (b) provient du lemme 1.

THÉORÈME 5. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\Lambda_{sf} = \Lambda_f (\Leftrightarrow \Lambda_{sf} \subset \Lambda_f \Leftrightarrow S_f = \{0\})$;
(b) *il existe, parmi les* f_i, *n formes linéairement indépendantes.*

Preuve. Il s'agit de conséquences simples.

THÉORÈME 6. *Si $S_f \neq \Lambda_{sf}$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\Lambda_{rwf} = \Lambda_f (\Leftrightarrow \Lambda_f \subset \Lambda_{rwf} \Leftrightarrow {}^i\Lambda_{sf} = \Lambda_{sf} \setminus S_f)$;

(b) *quel que soit l'indice k de I_f, $\Lambda_{sf} = \{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) \geq 0\}$;*

(c) *quel que soit l'indice k de I_f, $S_f = \{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) = 0\}$;*

(d) *pour tout couple (i, k) d'indices de I_f, il existe un réel $\tau_{ik} > 0$ tel que $f_i - \tau_{ik} f_k$ est une conbinaison linéaire, éventuellement nulle, des f_j $(j \in J_f)$;*

(e) *pour tout indice k de I_f, il existe $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ tels que $f_k = \sum_1^p \lambda_i f_i$;*

(f) *S_f est un hyperplan de ${}^1\Lambda_{sf}$* (i.e. $\dim S_f = \dim {}^1\Lambda_{sf} - 1$).

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). Il est clair que $\Lambda_{sf} \subset \{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) \geq 0\}$. Si l'inclusion inverse n'est pas vérifiée, il existe un point v tel que $v \notin \Lambda_{sf}$, $v \in {}^1\Lambda_{sf}$ et $f_k(v) \geq 0$. Par ailleurs, il existe $u \in {}^i\Lambda_{sf}$ [6, 3.2.8 p. 89]. Le segment $[u : v]$ rencontre la frontière de Λ_{sf} en un point t distinct de u $(u \in {}^i\Lambda_{sf})$ et de v ($v \notin \Lambda_{sf}$ et Λ_{sf} est fermé). Dès lors, $t \notin {}^i\Lambda_{sf}$ et $t \in \Lambda_{sf}$. De plus, les inégalités $f_k(u) > 0$ et $f_k(v) \geq 0$ livrent $f_k(t) > 0$ $(t \in]u : v[)$. Dès lors, $t \notin S_f$ et la dernière forme de la condition (a) est contredite.

(b) $\Rightarrow$(c). Les sous-espaces caractéristiques de Λ_{sf} et de $\{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) \geq 0\}$ sont respectivement S_f et $\{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) = 0\}$, ce qui permet de conclure.

(c)$\Rightarrow$(d). De $S_f = \{x \in {}^1\Lambda_{sf} : f_k(x) = 0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0\}$, on déduit qu'il existe un réel τ_{ik} tel que $f_i - \tau_{ik} f_k$ est une combinaison linéaire des f_j $(j \in J_f)$ (combinaison nulle lorsque $J_f = \emptyset \Leftrightarrow {}^1\Lambda_{sf} = \mathbb{R}^n$). Par ailleurs, il existe $u \in {}^i\Lambda_{sf}$ [6, p. 89]. Moyennant le lemme 1, $f_j(u) = 0$, $\forall j \in J_f$ et $f_j(u) > 0$, $\forall j \in I_f$. Dès lors, τ_{ik}, quotient de $f_i(u)$ par $f_k(u)$, est strictement positif.

(d)$\Rightarrow$(a). Supposons qu'il existe $t \in \Lambda_f \setminus \Lambda_{rwf}$. Puisque $t \in \Lambda_f \setminus \{0\}$, $f_j(t) = 0$ $\forall j \in J_f$, $f_j(t) \geq 0$ $\forall j \in J_f$ et $f_k(t) > 0$ pour au moins un indice k de I_f. Puisque $t \notin \Lambda_{rwf}$, il existe un indice i de I_f tel que $f_i(t) = 0$. Ceci contredit (d).

(a)$\Leftrightarrow$(e). Moyennant le lemme 1, ${}^i\Lambda_{sf} = \Lambda_{sf} \setminus S_f \Leftrightarrow \forall k \in I_f$, $\forall u \in \Lambda_{sf} \setminus S_f$, $f_k(u) > 0$. Il suffit alors d'utiliser le lemme 8 de [2] pour conclure.

(c)$\Leftrightarrow$(f). Cette équivalence est immédiate puisque, par la définition de I_f, on n'a jamais ${}^1\Lambda_{sf} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) = 0\}$ quel que soit $k \in I_f$.

3. **Adjonction ou suppression d'objectifs.** Soit $f' = (f_1, f_2, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$ l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{p+r}$ obtenue par l'adjonction des objectifs linéaires non nuls $f_{p+1}, \ldots, f_{p+r}$ aux objectifs $f_1, \ldots, f_p$ qui constituent f.

L'étude comparative de f et f' comprendra à la fois celle de l'adjonction et celle de la suppression d'objectifs puisque f se déduit de f' par suppression des objectifs $f_{p+1}, \ldots, f_{p+r}$.

Désignons par g l'application $(f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^r$. En plus des ensembles Λ_{sf}, S_f, Λ_f, Λ_{rwf}, J_f et I_f associés à f, nous introduisons les ensembles correspondants pour f' et g. Par exemple, $\Lambda_{sf'} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq 0,\ i = 1,$

$2, \ldots, p+r\}$, $\Lambda_{sg} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \geq 0,\ i = p+1, \ldots, p+r\}$. On notera que $J_{f'}$ et $I_{f'}$ sont des parties de $\{1, 2, \ldots, p+r\}$ alors que J_g et I_g sont des parties de $\{p+1, \ldots, p+r\}$. En outre, on introduira les ensembles $L_1 = J_{f'} \cap I_f$ et $L_2 = J_{f'} \cap I_g$.

Les quatre lemmes suivants rassemblent diverses propriétés élémentaires qui se déduisent simplement des définitions.

LEMME 2. *On a toujours:*
(a) $\Lambda_{sf'} = \Lambda_{sf} \cap \Lambda_{sg}$; *partant* $\Lambda_{sf'} \subset \Lambda_{sf}$ *et* $\Lambda_{sf'} \subset \Lambda_{sg}$;
(b) $S_{f'} = S_f \cap S_g$; *partant* $S_{f'} \subset S_f$ *et* $S_{f'} \subset S_g$;
(c) ${}^1\Lambda_{sf'} \subset {}^1\Lambda_{sf}$ *et* ${}^1\Lambda_{sf'} \subset {}^1\Lambda_{sg}$; *partant* ${}^1\Lambda_{sf'} \subset {}^1\Lambda_{sf} \cap {}^1\Lambda_{sg}$;
(d) $J_f \subset J_{f'}$ *et* $J_g \subset J_{f'}$; *partant* $J_{f'} = J_f \cup J_g \cup L_1 \cup L_2$;
(e) $I_{f'} = (I_f \backslash L_1) \cup (I_g \backslash L_2)$; *partant* $I_{f'} \subset I_f \cup I_g$.

LEMME 3. *Quelle que soit la partie X de $\mathbb{R}^n$,*
(a) $E_s[X; f] \subset E[X; f] \subset E_{rw}[X; f]$;
(b) $E_s[X; f'] \subset E[X; f'] \subset E_{rw}[X; f']$;
(c) $E_s[X; f] \subset E_s[X; f']$.

LEMME 4. ${}^1\Lambda_{sf'} = {}^1\Lambda_{sf} \Leftrightarrow \forall k \in J_{f'} \backslash J_f$, f_k *est une combinaison linéaire des* f_j $(j \in J_f)$.

LEMME 5. *Si* ${}^1\Lambda_{sf'} = {}^1\Lambda_{sf}$, *alors* $L_1 = \emptyset$.

REMARQUES. 1. Un point strictement efficace d'un ensemble X pour f reste toujours strictement efficace pour f' (donc, a fortiori, efficace et relativement faiblement efficace pour f'). Cette propriété confère une situation privilégiée à ces points strictement efficaces et aux situations particulières pour lesquelles il y a coïncidence entre les notions d'efficacité et de stricte efficacité (théorème 5). En particulier, il est connu [9, p. 351] que $f(E[X; f]) = \mathrm{Ext}[f(X); \Lambda]$ lorsque Λ est l'orthant négatif de $\mathbb{R}^p$. Or, pour cet orthant négatif, il y a coïncidence entre les notions d'efficacité et de stricte efficacité.

2. Ainsi qu'il le sera démontré aux théorèmes 9 et 10, sous les conditions assez peu restrictives $L_1 = \emptyset$ et $S_f \neq \Lambda_{sf}$ (qui sont automatiquement vérifiées lorsque ${}^1\Lambda_{sf} = {}^1\Lambda_{sf'}$ et $S_f \neq \Lambda_{sf}$), on a toujours $E_{rw}[X; f] \subset E_{rw}[X; f']$. Dès lors, la notion de relative efficacité faible se comporte d'une manière presque aussi régulière que celle de stricte efficacité pour l'adjonction d'objectifs.

Il n'en est plus de même pour la notion d'efficacité. Dans [8], des exemples simples montrent que, lors de l'adjonction d'un seul objectif, l'ensemble des points efficaces peut diminuer, grandir ou même ne plus être comparable pour l'inclusion ensembliste.

3. La condition $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f$ est étudiée au théorème 7 et un cas particulier intéressant est signalé au théorème 8. La condition $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf}$ fait l'objet du théorème 9 lorsque f et f' ne sont pas discordants et du théorème 11 en cas de discordance. Un cas particulier est signalé au théorème 10.

Le théorème 12 est concerné par $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'}$. Les conditions $\Lambda_f \subset \Lambda_{f'}$ et $\Lambda_{rwf} \subset \Lambda_{rwf'}$ vont toujours de pair; elles sont toujours vérifiées lorsque f est discordant et sont traitées dans le théorème 13 sinon.

Finalement, dans les théorèmes 14 à 18, nous signalons, rapidement et sans démonstration, quelques comparaisons de points efficaces (pour f et f') de types différents.

THÉORÈME 7. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f$;

(b) $\Lambda_{sg} \cap S_f \subset S_g$;

(c) $\Lambda_{sg} \cap S_f = S_{f'} (\Leftrightarrow \Lambda_{sf'} \cap S_f = S_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf'} \cap S_f \subset S_{f'})$;

(d) $E[X; g] = X$, $\forall X \subset S_f$ (i.e. g *est discordant sur* S_f);

(e) *il existe* r *réels strictement positifs* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *et* p *réels quelconques* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *tels que* $\sum_1^r \lambda_k f_{p+k} + \sum_1^p \mu_i f_i = 0$.

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). S'il existe $u \in (\Lambda_{sg} \cap S_f) \backslash S_g$, alors $f_i(u) = 0$ $(i = 1, \ldots, p)$ puisque $u \in S_f$, $f_{p+k}(u) \geq 0$ $(k = 1, \ldots, r)$ puisque $u \in \Lambda_{sg}$ et, pour un t de $\{1, \ldots, r\}$ au moins, $f_{p+t}(u) > 0$ car $u \notin S_g$. On a alors à la fois $u \in \Lambda_{f'}$ et $u \notin \Lambda_f$, ce qui est absurde.

(b)$\Rightarrow$(c). Ceci est trivial puisque l'on a toujours $S_{f'} = S_f \cap S_g \subset \Lambda_{sg} \cap S_f$.

(c)$\Rightarrow$(a). Supposons qu'il existe $u \in \Lambda_{f'} \backslash \Lambda_f$. Des inclusions $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_{sf'} \subset \Lambda_{sf}$, on déduit que $u \in \Lambda_{sf} \backslash \Lambda_f = S_f \backslash \{0\}$. Dès lors, $u \in \Lambda_{f'} \cap S_f \subset \Lambda_{sg} \cap S_f$. Moyennant (c), $u \in \Lambda_{f'} \cap (S_{f'} \backslash \{0\}) = \emptyset$, ce qui est absurde.

(c)$\Leftrightarrow$(d)$\Leftrightarrow$(e). Il suffit de faire appel à [2, th. 20 et 23].

THÉORÈME 8. *Si* $S_f \subset S_{f'}$, *alors* $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f$.

Preuve. Si $u \in \Lambda_{f'}$, alors $u \in \Lambda_{sf'} \subset \Lambda_{sf}$ et $u \notin S_{f'} \backslash \{0\}$. A fortiori, $u \notin S_f \backslash \{0\}$ (puisque $S_f \subset S_{f'}$) de sorte que $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f$.

THÉORÈME 9. *Si* $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$ *et si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf}$;

(b) $L_1 = \emptyset$;

(c) $I_f \subset I_{f'}$.

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). Puisque $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$, il existe $u \in {}^i\Lambda_{f'} \backslash \{0\}$ (théorème 4). Grâce à (a), $u \in {}^i\Lambda_f$. Si $t \in L_1$, on doit donc avoir simultanément $f_t(u) = 0$ $(t \in J_{f'}$ et $u \in \Lambda_{sf'})$ et $f_t(u) > 0$ $(t \in I_f$ et $u \in {}^i\Lambda_f)$, ce qui est absurde.

(b)$\Rightarrow$(c). Il suffit de faire appel au lemme 2(e).

(c)$\Rightarrow$(a). Si $u \in \Lambda_{rwf'} \backslash \{0\}$, alors $f_j(u) = 0$ $\forall j \in J_{f'}$ et $f_i(u) > 0$ $\forall i \in I_{f'}$ (puisque $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$). Or $J_f \subset J_{f'}$ (lemme 2 d) et $I_f \subset I_{f'}$ (par hypothèse). Par conséquent, $u \in {}^i\Lambda_f \subset \Lambda_{rwf}$ (puisque $S_f \neq \Lambda_{sf}$).

THÉORÈME 10. *Si* ${}^1\Lambda_{sf} = {}^1\Lambda_{sf'}$ *et si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *alors* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-020-9 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Ceci résulte du théorème 9 et du lemme 5 lorsque $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$ et est évident sinon.

THÉORÈME 11. *Si* $S_{f'} = \Lambda_{sf'}$, *on a toujours* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf}$. *Si* $S_f = \Lambda_{sf}$, *on a les équivalences:* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf} \Leftrightarrow \Lambda_{f'} \subset \Lambda_f \Leftrightarrow S_{f'} = \Lambda_{sf'}$.

Preuve. Il s'agit de propriétés assez simples à démontrer.

THÉORÈME 12. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'} (\Leftrightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'})$;

(b) *pour tout k de* $\{1, 2, \ldots, r\}$, *il existe des réels non tous nuls* $\lambda_{ik} \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ *tels que* $f_{p+k} = \sum_1^p \lambda_{ik} f_i$.

Preuve. L'implication (b)$\Rightarrow$(a) est triviale. L'implication inverse provient de [2, lemme 6] et du fait que f_{p+k} appartient au dual de $\Lambda_{sf'}$ qui, grâce à (a), coïncide avec le dual de Λ_{sf}.

THÉORÈME 13. *Si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *on a les équivalences:* $\Lambda_f \subset \Lambda_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{rwf} \subset \Lambda_{rwf'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{rwf} = \Lambda_{rwf'} \Leftrightarrow \Lambda_f = \Lambda_{f'}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser l'isotonie de l'adhérence et le lemme 1(f) pour conclure.

THÉORÈME 14. *Si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *on a les équivalences:* $\Lambda_f \subset \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{rwf} \subset \Lambda_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{rwf} \subset \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'}$.

THÉORÈME 15. *On a toujours* $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_{sf}$. *Par contre,* $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'}$ *et* $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_f$.

THÉORÈME 16. $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'} = \Lambda_f = \Lambda_{f'}$.

THÉORÈME 17. *Si* $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$ *et si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *on a l'équivalence:* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_f \Leftrightarrow I_f \cap I_{f'} \neq \emptyset$.

THÉORÈME 18. $\Lambda_{rwf'} \cap \Lambda_f = \{0\} \Leftrightarrow I_{f'} \cap I_f = \emptyset \Leftrightarrow I_f \subset I_{f'} \Leftrightarrow \{1, 2, \ldots, p\} \subset J_{f'}$.

4. **Le cas particulier** $p = 1$. *Si* $p = 1$ (c'est-à-dire si $f = (f_1)$), S_f est un hyperplan, Λ_{sf} est un demi-espace fermé, $I_f = \{1\}$, $J_f = \emptyset$, ${}^1\Lambda_{sf} = \mathbb{R}^n$ et $\Lambda_{rwf} = \Lambda_f$. Dans ce cas, $E[X; f]$ est l'ensemble des maximants de f_1 sur X (i.e. les points de X qui réalisent le maximum de f_1 sur X), $E_s[X; f]$ est l'ensemble constitué par l'éventuel maximant strict de f_1 sur X et $E_{rw}[X; f] = E[X; f]$.

Supposons encore que f' se déduit de f par adjonction de r objectifs $f_2, f_3, \ldots, f_{r+1}$.

Les trois théorèmes suivants sont simples à démontrer. Ils résultent respectivement du lemme 3, du théorème 9 (après avoir remarqué que ${}^1\Lambda_{sf'} \not\subset S_f \Leftrightarrow L_1 = \emptyset$) et du théorème 7.

THÉORÈME 19. *Si t est un maximant strict de f_1 sur X, alors $t \in E_s[X; f']$, $t \in E[X; f']$ et $t \in E_{rw}[X; f']$.*

THÉORÈME 20. *Si t est un maximant de f_1 sur X et si $\Lambda_{sf'}$ n'est pas inclus dans l'hyperplan S_f, alors $t \in E_{rw}[X; f']$.*

THÉORÈME 21. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *pour toute partie X de $\mathbb{R}^n$, les maximants de f_1 sur X sont des points efficaces de X pour f';*

(b) $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f$;

(c) $\Lambda_{sg} \cap S_f = S_{f'}$;

(d) *il existe r réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ et un réel μ tels que $\sum_1^r \lambda_i f_{1+i} = \mu f_1$.*

REMARQUES. 1. La détermination des maximants d'un objectif (ici f_1) choisi parmi ceux d'un système d'objectifs (ici f') fournit donc divers renseignements pour l'étude des divers types de points efficaces de f'. En particulier, le théorème 19 englobe la remarque 3.3 de [10, p. 443]. Par ailleurs, il est clair que cette étude pourrait être poursuivie pour les valeurs 2, 3, ... de p.

2. Dans le théorème 21, les cas $\mu = 0$, $\mu < 0$ et $\mu > 0$ correspondent respectivement à la discordance de g, de f' et du système d'objectifs $(-f_1, f_2, \ldots, f_{1+r})$ [2, th. 22].

5. **Le cas particulier** $r = 1$. La nature du cas $r = 1$ est similaire à celle de $p = 1$. Il suffit, en effet, d'intervertir les rôles de f et g pour passer de l'un à l'autre. Toutefois, la présentation adoptée dans ce texte fait que les résultats de ce paragraphe sont complémentaires de ceux du précédent.

Le théorème 22 correspond aux théorèmes 12 et 13. Il caractérise la *redondance* "*globale*" de f_{p+1} dans $f' = (f_1, \ldots, f_p, f_{p+1})$ et admet comme cas particulier [3, th. 2.3, p. 177]. Notons que cette redondance est simultanée pour les trois notions d'efficacité (par ailleurs, ceci reste vrai sous la forme plus générale des théorèmes 12 et 13 lorsqu'on évite la situation très particulière $\Lambda_{sf} = S_f$, $\Lambda_{sf'} = S_{f'}$ et $S_f \neq S_{f'}$).

Le théorème 23 est une traduction directe du théorème 7, qui prend ici une forme assez simple. Finalement, la suite de ce paragraphe conduit au théorème 28 qui caractérise les deux cas assez particuliers pour lesquels on n'a pas $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf}$.

THÉORÈME 22. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\Lambda_{sf} \subset \Lambda_{sf'}$;

(b) $\Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'} (\Leftrightarrow E_s[X; f] = E_s[X; f'], \forall X \subset \mathbb{R}^n)$;

(c) $\Lambda_f = \Lambda_{f'} (\Leftrightarrow E[X; f] = E[X; f'], \forall X \subset \mathbb{R}^n)$;

(d) $\Lambda_{rwf} = \Lambda_{rwf'} (\Leftrightarrow E_{rw}[X; f] = E_{rw}[X; f'], \forall X \subset \mathbb{R}^n)$;

(e) *il existe $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ tels que $f_{p+1} = \sum_1^p \lambda_i f_i$.*

Preuve. Si $S_f \neq \Lambda_{sf}$, il suffit de faire appel aux théorèmes 12 et 13. Si $S_f = \Lambda_{sf}$, les conditions (c) et (d) sont équivalentes à $\Lambda_{sf'} = S_{f'}$. Pour conclure, il suffit alors de tenir compte du théorème 12 et de remarquer que, lorsque $r = 1$, on ne peut pas avoir simultanément $S_f = \Lambda_{sf}$ et $S_{f'} = \Lambda_{sf'}$ sans avoir $S_f = S_{f'}$.

THÉORÈME 23. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\Lambda_{f'} \subset \Lambda_f (\Leftrightarrow E[X; f] \subset E[X; f'], \forall X \subset \mathbb{R}^n)$;
(b) f_{p+1} *est une combinaison linéaire de* $f_1, f_2, \ldots, f_p$;
(c) $S_f = S_{f'}$.

Preuve. Il suffit de faire appel au théorème 7.

NOTATIONS. Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes: $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_{p+1}(x) \geq 0\}$, $H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_{p+1}(x) \leq 0\}$ et $H = H_1 \cap H_2$.

THÉORÈME 24. *Si* $\Lambda_{sf} = S_f$, *alors* ${}^1\Lambda_{sf} = {}^1\Lambda_{sf'}$ *et* $S_{f'} = \Lambda_{sf'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf'}$.

Preuve. Si $S_f \subset H$, alors $S_f = \Lambda_{sf} \cap H_1 = \Lambda_{sf'}$. Dans ce cas, $\Lambda_{sf'} = \Lambda_{sf} = S_f = S_{f'}$ et ${}^1\Lambda_{sf} = {}^1\Lambda_{sf'}$.

Si $S_f \not\subset H$, $\Lambda_{sf'}$ est un demi-espace de S_f et, par conséquent, ${}^1\Lambda_{sf'} = S_f = {}^1\Lambda_{sf}$ et $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$.

THÉORÈME 25. $\Lambda_{sf} \subset H_2 \Leftrightarrow p+1 \in J_{f'}$.

Preuve. Ce théorème résulte directement des évidences suivantes: $\Lambda_{sf'} = \Lambda_{sf} \cap H_1$ et $p+1 \in J_{f'} \Leftrightarrow \Lambda_{sf'} \subset H$.

THÉORÈME 26. *Si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$, *les conditions suivantes sont équivalentes:*
(a) ${}^1\Lambda_{sf'} \neq {}^1\Lambda_{sf}$ (*i.e.* ${}^1\Lambda_{sf'}$ *est strictement inclus dans* ${}^1\Lambda_{sf}$);
(b) $\Lambda_{sf} \subset H_2$ *et* $\Lambda_{sf} \not\subset H$;
(c) *il existe* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ *tels que* $\lambda_i \leq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, $\lambda_i < 0$ *pour au moins un i de* I_f *et* $f_{p+1} = \sum_1^p \lambda_i f_i$.

Preuve. (a)$\Rightarrow$(b). La seconde condition de (b) est triviale puisque $\Lambda_{sf} \subset H \Rightarrow \Lambda_{sf} = \Lambda_{sf}'$.

Soit $t \in {}^i\Lambda_f \cap (H_1 \backslash H)$. On a donc $f_j(t) = 0$ $\forall j \in J_f$ et $f_j(t) > 0$ $\forall j \in I_f \cup \{p+1\}$. Dans ces conditions, $J_f = J_{f'}$, ce qui conduit à l'absurdité ${}^1\Lambda_{sf} = {}^1\Lambda_{sf'}$. Par conséquent, ${}^i\Lambda_f \subset H_2$ et il suffit de tenir compte de l'hypothèse $S_f \neq \Lambda_{sf}$ et du lemme 1(*f*) pour obtenir $\Lambda_{sf} \subset H_2$.

(b)$\Rightarrow$(a). La condition $\Lambda_{sf} \not\subset H$ signifie que f_{p+1} n'est pas une combinaison linéaire des f_j $(j \in J_f)$. Le théorème 25 et le lemme 1(d) permettent alors de conclure directement.

(b)$\Leftrightarrow$(c). Cette équivalence provient assez simplement du théorème 22.

https://doi.org/10.4153/CMB-1980-020-9 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE. *Si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$ *et si* ${}^1\Lambda_{sf'}, = {}^1\Lambda_{sf}$, *alors* $\Lambda_{sf'} \neq S_{f'}$.

Preuve. Si l'on avait $\Lambda_{sf'} = S_{f'}$, la condition (c) du théorème 26 serait vérifiée en vertu du théorème 4 et conduirait à l'absurdité ${}^1\Lambda_{sf'} \neq {}^1\Lambda_{sf}$.

THÉORÈME 27 (a). *Si* $S_f = \Lambda_{sf}$, *on a l'équivalence:* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf} \Leftrightarrow S_{f'} = \Lambda_{sf'}$.
(b) *Si* $S_f \neq \Lambda_{sf}$ *et si* ${}^1\Lambda_{sf'} \neq {}^1\Lambda_{sf}$, *on a l'équivalence:* $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf} \Leftrightarrow S_{f'} = \Lambda_{sf'}$.

Preuve. Lorsque $S_{f'} = \Lambda_{sf'}$, on a toujours $\Lambda_{rwf'} = \{0\} \subset \Lambda_{rwf}$.

L'implication inverse de (a) est une conséquence implicite de la démonstration du théorème 24. Quant à celle de (b), il suffit de remarquer que $S_f \neq \Lambda_{sf}$ et ${}^1\Lambda_{sf} \neq {}^1\Lambda_{sf'}$ impliquent $\Lambda_{rwf} \setminus \{0\} \subset H_2 \setminus H$ (théorème 26). Or, on a toujours $\Lambda_{rwf'} \subset H_1$. Par conséquent, $\Lambda_{rwf'} \subset \Lambda_{rwf} \Rightarrow \Lambda_{rwf'} = \{0\}$, ce qui exige $\Lambda_{sf'} = S_{f'}$ (théorème 4).

THÉORÈME 28. $\Lambda_{rwf'}$ *n'est pas inclus dans* Λ_{rwf} *si et seulement si l'une des deux éventualités suivantes se présente:*

cas 1. $S_f = \Lambda_{sf}$ *et* $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$ (i.e. $\Lambda_{sf'}$ *est un demi-espace du sous-espace vectoriel* S_f);
cas 2. $S_f \neq \Lambda_{sf}$, $S_{f'} \neq \Lambda_{sf'}$ *et* ${}^1\Lambda_{sf} \neq {}^1\Lambda_{sf'}$ (i.e. $\Lambda_{sf} \subset H_1$, $\Lambda_{sf} \not\subset H$ *et* $(\Lambda_{sf} \setminus S_f) \cap H \neq \emptyset$.)

Preuve. Il suffit de tenir compte de ce qui précède et du théorème 10 pour conclure. Remarquons que la condition $(\Lambda_{sf} \setminus S_f) \cap H \neq \emptyset$ provient du théorème 26 combiné avec [2, lemme 8].

RÉFÉRENCES

1. L. Bragard, *Points efficaces en programmation à objectifs multiples*, C.R.E.D.E.L..
2. L. Bragard et J. Vangeldère, *Points efficaces en programmation à objectifs multiples*, Bull. Soc. Roy. Sc. Liège, **46,** 1977, pp. 27–41.
3. J. Gal and H. Leberling, *Redundant objective functions in linear vector maximum problems and their determination*, European Journal of Operational Research, **1,** 1977, pp. 176–184.
4. J. G. Lin, *Maximal vectors and multi-objective optimization*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **18,** No. 1, 1977, pp. 41–63.
5. J. Philip, *Algorithms for the vector maximization problem*, Mathematical Programming, **2,** 1972, pp. 207–229.
6. J. Stoer and C. Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions I*, Springer Verlag, 1970.
7. J. Vangeldère, *Programmation à objectifs multiples et ordre linéaire*, Notes stencilées, Université de Liège, 1977.
8. J. Vangeldère, *Quelques problèmes en programmation à objectifs multiples*, Revista della Associazione Italiana di Ricerca Operativa, No. 5, 1978, pp. 59–71.
9. P. L. Yu, *Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. **14,** No. 3, 1974, pp. 319–377.

10. P. L. Yu and M. Zeleny, *The set of all nondominated solutions in linear cases and a multicriteria simplex method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **49,** 1975, pp. 430–468.

11. M. Zeleny, *Linear multiobjective programming*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 95, Springer Verlag, 1974.

L. Bragard,
Université de Liége
Place du XX Août, 32
B-4000 Liege
Belgique

J. Vangeldère,
Université de Liège
Institut de Mathématique
Avenue des Tilleuls, 15
B-4000 Liege
Belgique