Canad. Math. Bull. Vol. **25** (3), 1982

OPÉRATEURS À ITÉRÉS UNIFORMEMENT BORNÉS

PAR
JOSÉ I. NIETO

RÉSUMÉ. Dans un espace de Banach complexe $(X, |\ |)$ on considère un opérateur linéaire borné A de spectre $\sigma(A)$ et de rayon spectral $r(A)=1$. On établit des conditions, en termes du spectre périphérique de $A: \sigma_\pi(A)=\{\lambda \in \sigma(A): |\lambda|=1\}$, qui garantissent l'existence d'une norme $|\ |_0$, équivalente à $|\ |$, définie par un produit scalaire si $|\ |$ l'est et telle que $\|A\|_0=\text{Sup}\{|Ax|_0: |x|_0=1\}=1$. Si A est à itérés uniformément bornés ($\|A^n\| \le M$ pour $n=1, 2, \ldots$) une telle norme peut ne pas exister.

0. **Introduction.** Soit $(X, |\ |)$ un espace normé, réel ou complexe, et soit $\mathscr{L}(X)$ l'algèbre normée des opérateurs linéaires bornés dans X, munie de la norme $\|A\|=\text{Sup}\{|Ax|: |x|=1\}$. Si la norme $|\ |$ est définie par un produit scalaire, on dira qu'elle est *hilbertienne.* Pour $A \in \mathscr{L}(X)$ on désigne par $r(A)= \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ le *rayon spectral* de A. On dira que A est *à itérés uniformément bornés* s'il existe une constante $M>0$ tel que $\|A^n\| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$ (On suppose que A^0 est l'opérateur identité I). Pour un tel opérateur, on a $r(A) \le 1$ et on sait qu'il existe une norme $|\ |_0$, à savoir $|x|_0=\text{Sup}\{|A^n x|: n \in \mathbb{N}\}$ pour $x \in X$, qui est équivalente à $|\ |$ ($|x| \le |x|_0 \le M\,|x|$) et telle que $\|A\|_0=\text{Sup}\{|Ax|_0: |x|_0=1\} \le 1$. Cependant, si la norme $|\ |$ est hilbertienne, la norme $|\ |_0$ n'est pas en général une norme hilbertienne. Par exemple, pour la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ et la norme hilbertienne $|(\xi, \eta)|=(|\xi|^2+|\eta|^2)^{1/2}$ dans $\mathbb{C}^2$ on a $\text{Sup}\{\|A^n\|: n \in \mathbb{N}\}=4, r(A)=1$, mais la norme $|x|_0= \text{Sup}\{|A^n x|: n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas hilbertienne, car elle ne satisfait pas la loi du parallélogramme: pour $x=(1, 0)$, $y=(0, 1)$ on a $|x+y|_0^2+|x-y|_0^2=32\frac{2}{16} \ne 34= 2(|x|_0^2+|y|_0^2)$. Ceci nous amème à considérer le problème suivant: Si A est à itérés uniformément bornés, existe-t-il une norme $|\ |_0$ (qui dépendera de A) telle que:

(i) $|\ |_0$ est équivalente à $|\ |$
(ii) $|\ |_0$ est hilbertienne si $|\ |$ l'est
(ii) $\|A\|_0 \le 1$.

Dans ce problème, il faut distinguer deux cas. Tout d'abord, si $r(A)<1$, il n'est pas nécessaire de supposer que A est à itérés uniformément bornés, cette

Reçu par la redaction le 20 novembre 1980.
AMS Subject Classification Numbers: 47A10, 47A30, 47B05.

propriété étant une conséquence de $r(A)<1$. Dans le cas où $r(A)<1$, Kurepa [8] a montré que la norme

$$|x|_0=(|x|^2+|Ax|^2+|A^2x|^2+\cdots)^{1/2} \tag{1}$$

déjà considérée par Rota [10], [5, Problème 122] lorsque X est un espace de Hilbert, est une solution au problème précédent, et l'on a $\|A\|_0<1$.

Dans la section 1 de cet article, on étudie les opérateurs A à itérés uniformément bornés avec $r(A)=1$ et on montre dans une proposition que pour ces opérateurs le problème peut ne pas avoir de solution si X est de dimension infinie. Pour établir cela, nous nous servons d'un contre-exemple donné par Foguel [3] à un problème soulevé par Sz-Nagy. Etant donné que dans le cas $r(A)=1$ les conditions (i), (iii) entraînent $\|A\|_0=r(A)=1$, on est amené à considérer un deuxième problème, relié au premier, qui est le suivant: si X est un espace de Banach complexe et si $A\in\mathscr{L}(X)$ est un opérateur avec $r(A)>0$, quelles conditions, sur le spectre de A, sont suffisantes pour qu'il existe une norme $|\ |_0$ satisfaisant (i) et (ii), et telle que $\|A\|_0=r(A)$? De telles conditions, faisant intervenir seulement les points λ du spectre de A avec $|\lambda|=r(A)$, sont formulées dans un théorème à la section 2.

1. Soit $(H,|\ |)$ un espace de Hilbert et soit $\langle,\rangle$ son produit scalaire. On dit qu'un opérateur $W\in\mathscr{L}(H)$ est *uniformément positif* s'il existe une constante $m>0$ tel que $\langle Wx, x\rangle\geq m\,|x|^2$ pour tout $x\in H$. A un tel opérateur W on peut associer le produit scalaire $\langle,\rangle_0$, défini par $\langle x, y\rangle_0=\langle Wx, y\rangle$, qui est équivalent à $\langle,\rangle$ (c'est-à-dire leurs normes sont équivalentes). C'est bien connu aussi que, réciproquement, tout produit scalaire $\langle,\rangle_0$, équivalent à $\langle,\rangle$, est de la forme $\langle x, y\rangle_0=\langle Wx, y\rangle$, où W est uniformément positif, et par conséquent $|x|_0^2=\langle Wx, x\rangle=|W^{1/2}x|^2$, c'est-à-dire $|x|_0=|W^{1/2}x|$. Etant donné que l'opérateur $Q=W^{1/2}$ est uniformément positif, donc inversible dans l'algèbre $\mathscr{L}(H)$, si $|\ |_0$ est une norme hilbertienne, équivalente à $|\ |$, il existe un opérateur uniformément positif Q tel que

$$\|A\|_0=\|QAQ^{-1}\| \quad \text{pour chaque} \quad A\in\mathscr{L}(H), \tag{2}$$

car

$$\begin{aligned}\|A\|_0&=\operatorname{Sup}\{|Ax|_0:|x|_0=1\}=\operatorname{Sup}\{|QAx|:|Qx|=1\}\\&=\operatorname{Sup}\{|QAQ^{-1}y|:|y|=1\}=\|QAQ^{-1}\|.\end{aligned}$$

De (2) et des propriétés d'un opérateur A avec $r(A)<1$ on obtient:

(I) Pour un opérateur $A\in\mathscr{L}(H)$ on a $\|A\|_0\leq 1$ pour une certaine norme hilbertienne $|\ |_0$, équivalente à $|\ |$, si et seulement si $\|QAQ^{-1}\|\leq 1$ pour un certain opérateur uniformément positif Q.

(II) Tout opérateur $A\in\mathscr{L}(H)$ avec $r(A)<1$ est semblable à une contraction stricte.

PROPOSITION. *Soit* $(H, | \ |)$ *un espace de Hilbert de dimension infinie. Alors il existe un opérateur à itérés uniformément bornés* $A \in \mathscr{L}(H)$, *avec* $r(A)=1$, *pour lequel il n'existe aucune norme hilbertienne* $| \ |_0$, *équivalente à* $| \ |$, *satisfaisant* $\|A\|_0 = 1$.

Démonstration. Foguel [3] (Cf. [6]) a montré qu'on peut construire un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ à itérés uniformément bornés qui n'est semblable à aucune contraction. Donc, d'après (II), on doit avoir $r(A)=1$. Alors, d'après (I), il n'existe aucune norme hilbertienne $| \ |_0$, équivalente à $| \ |$, telle que $\|A\|_0 = 1$.

§2. Soit $(X, | \ |)$ un espace de Banach complexe et soit $\sigma(A)$ le spectre d'un opérateur $A \in \mathscr{L}(X)$. La partie non vide $\sigma_\pi(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| = r(A)\}$ du spectre sera appelée le *spectre périphérique* de A.

THÉORÈME. *Soit* $A \in \mathscr{L}(X)$ *avec* $r(A) > 0$. *Si*

(a) Pour chaque $\lambda \in \sigma_\pi(A)$:

$$X = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \oplus (A - \lambda I)X \text{ (somme directe algébrique),}$$

alors

(b) Chaque $\lambda \in \sigma_\pi(A)$ est une valeur propre isolée.

(c) L'opérateur $A/r(A)$ est à itérés uniformément bornés.

(d) Il existe une norme $| \ |_0$, équivalente à $| \ |$, qui est hilbertienne si $| \ |$ l'est, et qui satisfait: $\|A\|_0 = r(A)$, et $\|P_\lambda\|_0 = 1$ pour chaque $\lambda \in \sigma_\pi(A)$, où P_λ est le projecteur spectral associé à λ.

(e) Pour chaque $\lambda \in \sigma_\pi(A)$:

$$|x + (A - \lambda I)y|_0 \geq |x|_0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \text{ et pour tour } y \in X.$$

Démonstration. (b): Soit $\lambda \in \sigma_\pi(A)$. La condition (a) entraîne que λ est une valeur propre et que $(A - \lambda I)X$ est fermé [7, Proposition 36.2] [4, Théorème IV.1.12]. Etant donné que la restriction de $A - \lambda I$ à $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ a $\{0\}$ comme spectre et que la restriction de $A - \lambda I$ à $(A - \lambda I)X$ est bijective, (a) entraîne que $A - \mu I$ est inversible dans l'algèbre $\mathscr{L}(X)$ pour tout μ, $0 < |\mu - \lambda| < \delta$, pour un certain $\delta > 0$. Donc λ est un point isolé du spectre de A. (c): $\sigma_\pi(A)$ étant compact, (b) entraîne que $\sigma_\pi(A)$ est constitué d'un nombre fini de points $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$. Etant donné que l'ensemble $\sigma_0(A)$ des points de $\sigma(A)$ qui n'appartiennent pas à $\sigma_\pi(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$ est contenu dans un disque $\{z : |z| \leq r_1\}$ pour un certain $r_1 < r(A)$, on peut associer à $\sigma_0(A)$ et aux points $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ des projecteurs spectraux $P_0, P_1, \ldots, P_q$, et l'on a $P_i(X) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$, donc $AP_i = \lambda_i P_i$, pour $i = 1, \ldots, q$. D'autre part, étant donné que $X_i = P_i(X)$, $i = 0, 1, \ldots, q$ sont des sous-espaces fermés invariants de A et que

$$X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_q,$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-050-9 Published online by Cambridge University Press

on a

$$(3) \qquad A^n = A_0^n + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^n P_i \quad \text{pour tout} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

où $A_0 = AP_0$ est la restriction de A à X_0. Le spectre de $A_0 \in \mathscr{L}(X_0)$, étant $\sigma_0(A)$, on a $r(A_0/r(A)) < 1$. Grâce à (3) on a que $A/r(A)$ est à itérés uniformément bornés. (d): étant donné que $r(A_0/r(A)) < 1$, il existe une norme $| \ |_*$ dans X_0 (par exemple la norme définie par (1)), équivalente à $| \ |$ (dans X_0), telle que $\|A_0/r(A)\|_* < 1$ et qui est hilbertienne si $| \ |$ l'est. Pour $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_q$, $x_i \in X_i$, on pose

$$|x|_0 = (|x_0|_*^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_q|^2)^{1/2}.$$

Il est facile de vérifier que la norme $| \ |_0$ ainsi définie dans X est équivalente à la norme de départ $| \ |$ et qu'elle est hibertienne si $| \ |$ l'est. En plus, $\|P_i\|_0 = 1$ pour $i = 1, \ldots, q$, car $P_i \neq 0$ et $|P_i(x)|_0^2 = |x_i|_0^2 = |x_i|^2 \leq |x|_0^2$. D'autre part, étant donné que $|Ax_0|_* \leq r(A)\,|x_0|_*$, on a

$$\begin{aligned} |Ax|_0^2 &= |Ax_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_q x_q|_0^2 = |Ax_0|_*^2 + r^2(A)(|x_1|^2 + \cdots + |x_q|^2) \\ &\leq r^2(A)(|x_0|_*^2 + |x_1|^2 + \cdots + |x_q|^2) = r^2(A)\,|x|_0^2. \end{aligned}$$

D'où $\|A\|_0 = r(A)$. (e): Soit $\lambda_i \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\} = \sigma_\pi(A)$. Etant donné que $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) = P_i(X)$, $(A - \lambda_i I)X = \operatorname{Ker} P_i$ et que $\|P_i\|_0 = 1$, on a $|x|_0 = |P_i(x + (A - \lambda_i I)y)|_0 \leq |x + (A - \lambda_i I)y|_0$, pour tout $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ et pour tout $y \in X$.

RÉMARQUES. (1) L'inégalité dans (e) exprime que $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ est orthogonal à $(A - \lambda I)X$ (au sens de Birkhoff [1]), par rapport à norme $| \ |_0$. Si λ et μ sont des valeurs propres distinctes appartenants à $\sigma_\pi(A)$ on a, donc, que $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}(A - \mu I)$, par rapport à la la norme $| \ |_0$, car $z \in \operatorname{Ker}(A - \mu I)$ entraîne $z = (A - \lambda I)(z/\mu - \lambda) \in (A - \lambda I)X$.

(2) Si $(X, | \ |)$ est un espace de Hilbert, (d) entraîne que le projecteur spectral P_i associé à $\lambda_i \in \sigma_\pi(A)$ est un projecteur orthogonal, par rapport à la norme hilbertienne $| \ |_0$.

On dit qu'un opérateur $A \in \mathscr{L}(X)$ est *quasi-compact* si $\|A^p - K\| < 1$ pour un certain entier positif p et un certain opérateur compact $K \in \mathscr{L}(X)$. Si X est de dimension finie, tout opérateur $A \in \mathscr{L}(X)$, étant compact, est donc quasi-compact.

COROLLAIRE 1. *Soit $A \in \mathscr{L}(X)$ un opérateur quasi-compact avec $r(A) = 1$. Alors la condition (a) est équivalente à chacune des conditions suivantes:*

(a_1) *A est à itérés uniformément bornés*

(a_2) $\lim_{n\to\infty} (A^n x/n) = 0$ *pour tout* $x \in X$

(a_3) $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ *pour chaque* $\lambda \in \sigma_\pi(A)$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-050-9 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. $(a) \Rightarrow (a_1)$ est une conséquence du théorème, $(a_1) \Rightarrow (a_2)$ est évident, et $(a_2) \Rightarrow (a_3)$ est une conséquence de [2, Lemme 1, page 709], toutes ces implications étant valables sans l'hypothèse de la quasi-compacité de A. $(a_3) \Rightarrow (a)$: soit $\lambda \in \sigma_\pi(A)$. D'après [2, Lemme 2, page 709] et [11, Théorème 5.8-A], (a_3) entraîne que $X = \operatorname{Ker}(A - \lambda I) \oplus (A - \lambda I)X$, avec $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) < \infty$. D'où (a).

Si X est de dimension finie, la condition (a_3) exprime que les racines du polynôme minimal de A de valeur absolue égale à $r(A)$ sont simples [2, Théorème page 556]. Dans ce cas, l'équivalence de (a_1) et (a_3) avait été démontrée par Mott et Schneider [9].

Remarque 3. Le Corollaire 1 n'est pas vrai si A n'est pas quasi-compact. Par exemple, dans l'espace de Hilbert $X = L^2[0, 1]$, soit $A = I + K$, où K est l'opérateur $(K\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds$, $t \in [0, 1]$, qui est compact et $\sigma(K) = \{0\}$. On a $\sigma(A) = \sigma_\pi(A) = \{1\}$, $\operatorname{Ker}(A - I)^2 = \operatorname{Ker}(A - I) = \{0\}$, mais les itérés de A ne sont pas uniformément bornés, car l'inégalité $(A^n\varphi)(t) \geq nt$, vraie pour la fonction $\varphi(t) = 1$, de norme 1, entraîne $\|A^n\| \geq n/\sqrt{3}$. L'opérateur A n'est pas quasi-compact: s'il existait un opérateur compact K' et un entier $p \geq 1$ tels que $\|A^p - K'\| < 1$, le fait que les opérateurs compacts forment un idéal dans $\mathscr{L}(X)$ entraînerait que $\|(I + K)^p - K'\| = \|I + K''\| < 1$ pour un certain opérateur compact K'', ce qui aurait comme conséquence que K'' est inversible dans $\mathscr{L}(X)$, mais ceci est impossible.

Remarque 4. Si $(X, |\ |)$ est un espace de Hilbert, on a, d'après (I), le Théorème et le Corollaire 1, que tout opérateur $A \in \mathscr{L}(X)$ quasi-compact, avec $r(A) = 1$, satisfaisant une des conditions $(a), (a_1), (a_2), (a_3)$, est semblable à une contraction. Ceci généralise un résultat de Sz-Nagy [10, Théorème 3].

Corollaire 2. *Soit $(X, |\ |)$ un espace de Hilbert de dimension finie, et soit $A \in \mathscr{L}(X)$ tel que $r(A) = 1$. Si une des conditions $(a), (a_1), (a_2)$ ou (a_3) est satisfaite, alors $\|A\|_0 = 1$ et, pour chaque $\lambda \in \sigma_\pi(A)$, son projecteur spectral P_λ est orthogonal, par rapport à une certaine norme hilbertienne $|\ |_0$.*

Il est à noter que, d'après la Remarque 4, dans le contre-exemple de Foguel l'opérateur ne peut pas être quasi-compact.

Pour finir nous suggérons le problème suivant: soit A et B des opérateurs avec $r(A) = r(B) = 1$, qui commutent. Quelles conditions, sur les spectres de A et B, sont suffisantes pour qu'il existe une norme $|\ |_0$, satisfaisant (i) et (ii), telle que $\|A\|_0 = \|B\|_0 = 1$? On sait déjà [8] que si A et B commutent et $r(A) < 1$, $r(B) < 1$, alors il existe une norme $|\ |_0$, satisfaisant (i) et (ii) telle que $\|A\|_0 < 1$, $\|B\|_0 < 1$.

Références

1. G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.
2. N. Dunford et J. Schwartz, *Linear Operators I* (Interscience, New York, 1964).

3. S. R. Foguel, A counterexample to a problem of Sz-Nagy, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 788–790.

4. S. Goldberg, *Unbounded Linear Operators* (McGraw-Hill, New York, 1966).

5. P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book* (Van Nostrand, Princeton, 1967).

6. P. R. Halmos, On Foguel's answer to Nagy's question, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 791–793.

7. H. Heuser, *Funktionalanalysis* (Teubner, Stuttgart, 1975).

8. S. Kurepa, Some properties of the spectral radius on a finite set of operators, *Glasnik Mat.* Ser. III **14**(34), (1979), 283–288.

9. J. L. Mott, et H. Schneider, Matrix algebras and groups relatively bounded in norm, *Arch. Math.* **10** (1959), 1–6.

10. G. C. Rota, On models for linear operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 469–472.

11. A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, (Wiley, New York, 1966).

Université de Montréal
Département de Mathématiques
et de Statistique
Montréal, Québec
H3C 3J7

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-050-9 Published online by Cambridge University Press