Canad. J. Math. Vol. **54** (5), 2002 pp. 916–944

Convexité, complète monotonie et inégalités sur les fonctions zêta et gamma, sur les fonctions des opérateurs de Baskakov et sur des fonctions arithmétiques

G. Bastien et M. Rogalski

Abstract. We give optimal upper and lower bounds for the function $H(x,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^s}$ for $x \geq 0$ and $s > 1$. These bounds improve the standard inequalities with integrals. We deduce from them inequalities about Riemann's ζ function, and we give a conjecture about the monotonicity of the function $s \mapsto [(s-1)\zeta(s)]^{\frac{1}{s-1}}$. Some applications concern the convexity of functions related to Euler's Γ function and optimal majorization of elementary functions of Baskakov's operators. Then, the result proved for the function $x \mapsto x^{-s}$ is extended to completely monotonic functions. This leads to easy evaluation of the order of the generating series of some arithmetical functions when z tends to 1. The last part is concerned with the class of non negative decreasing convex functions on $]0,+\infty[$, integrable at infinity.

Résumé. Nous prouvons un encadrement optimal pour la quantité $H(x,s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(x+n)^s}$ pour $x \geq 0$ et $s > 1$, qui améliore l'encadrement standard par des intégrales. Cet encadrement entraîne des inégalités sur la fonction ζ de Riemann, et amène à conjecturer la monotonie de la fonction $s \mapsto [(s-1)\zeta(s)]^{\frac{1}{s-1}}$. On donne des applications à l'étude de la convexité de fonctions liées à la fonction Γ d'Euler et à la majoration optimale des fonctions élémentaires intervenant dans les opérateurs de Baskakov. Puis, nous étendons aux fonctions complètement monotones sur $]0,+\infty[$ les résultats établis pour la fonction $x \mapsto x^{-s}$, et nous en déduisons des preuves élémentaires du comportement, quand z tend vers 1, des séries génératrices de certaines fonctions arithmétiques. Enfin, nous prouvons qu'une partie du résultat se généralise à une classe de fonctions convexes positives décroissantes.

Introduction

L'origine de ce travail se trouve dans les deux problèmes suivants, qui nous ont été posés par Vijay Gupta (*cf.* [10]) :

Problème 1 Trouver la meilleure constante $C > 0$ telle qu'on ait, pour tout $x \in]0,1[$, et tout entier $n \geq 1$, et $0 \leq k \leq n$, l'inégalité

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{C}{\sqrt{nx(1-x)}}.$$

Ces fonctions, qui interviennent dans les polynômes de Bernstein, ont été utilisées par Durrmeyer dans une version modifiée de ces polynômes (voir [18]).

Reçu par la rédaction le 1 juin, 2001; revu le 2 février, 2002.
Classification (AMS) par sujet: 26A51, 26D15.
Mots clés: arithmetical functions, Baskakov's operators, completely monotonic functions, convex functions, inequalities, gamma function, zeta function.
©Société Mathématique du Canada 2002.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Problème 2 Trouver la meilleure constante $C > 0$ telle qu'on ait, pour $x \in]0, +\infty[$, et n, k entiers, $k \geq 0$ et $n \geq 1$

$$\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(x+1)^{n+k}} \leq \frac{C}{\sqrt{nx(1+x)}}.$$

Ces fonctions interviennent dans les opérateurs de Baskakov (*cf.* [4]).

Ces deux problèmes sont en effet à l'origine de questions que nous nous sommes posées sur les fonctions f_a définies (pour $a > 0$) sur $[0, +\infty[$ par

$$f_a(x) = \ln \frac{\Gamma(x+1)}{(x+a)^{x+a}},$$

puis sur l'encadrement de la fonction zêta d'Hurwitz (voir [9]).

Nous partons donc de cette dernière fonction : pour $x \geq 0$ et $s > 1$ on pose

$$H(x, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(x+n)^s}.$$

On a alors $H(0, s) = \zeta(s)$. Il faut noter ici que nous ne prenons pas tout à fait la convention habituelle, pour laquelle on somme pour $n \geq 0$ (et on aurait alors $H(1, s) = \zeta(s)$).

Par comparaison avec une intégrale, on a pour $x > 0$ l'encadrement

$$\frac{1}{(s-1)x^{s-1}} > H(x, s) > \frac{1}{(s-1)(x+1)^{s-1}}.$$

On peut alors se proposer de chercher a et b vérifiant $0 < a < b < 1$ tels que, pour tout $x \geq 0$ et tout $s > 1$, on ait

$$\frac{1}{(s-1)(x+a)^{s-1}} > H(x, s) \geq \frac{1}{(s-1)(x+b)^{s-1}}. \tag{1}$$

Nous cherchons le plus grand a possible et le plus petit b possible. Il y a des contraintes évidentes sur des nombres a et b vérifiant (1) : on a nécessairement

$$a \leq \frac{1}{2} \leq b \quad \text{et} \tag{2}$$

$$a \leq [(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}} \leq b. \tag{3}$$

En effet, la formule d'Euler-Maclaurin (*cf.* [5]) donne, pour p entier tendant vers l'infini, le développement limité

$$H(p, s) = \sum_{k \geq p+1} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{(s-1)p^{s-1}} - \frac{1}{2p^s} + O\Big(\frac{1}{p^{s+1}}\Big).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

En comparant avec un développement limité du majorant et du minorant dans (1), on obtient (2). Les inégalités (3) s'obtiennent simplement en faisant $x = 0$ dans (1). ■

Remarquons qu'on tire de l'inégalité de droite du lemme 1, pour $x = 0$, l'inégalité classique $(s-1)\zeta(s) > 1$, qui montre que $[(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}} < 1$. Pour déterminer les valeurs optimales de a et b, il faut déjà comparer $\frac{1}{2}$ et $[(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}}$. Et cette comparaison est possible si la majoration dans (1) est vraie avec $a = \frac{1}{2}$: si on fait $x = 0$ dans cette majoration, on obtient précisément $\frac{1}{2} < [(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}}$, c'est-à-dire $(s-1)\zeta(s) < 2^{s-1}$.

1 L'encadrement de la fonction H

Il se trouve effectivement que $\frac{1}{2}$ est la meilleure valeur possible pour a dans la majoration de (1), et que de même $[(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}}$ est la meilleure valeur possible de b dans la minoration de (1).

Théorème 1 *Si $s > 1$ et $x \geq 0$ on a*

$$\frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2})^{s-1}} > H(x,s) \geq \frac{1}{(s-1)\left[x + [(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}}\right]^{s-1}}, \tag{4}$$

la deuxième inégalité étant stricte si $x > 0$.

Corollaire 1 *Pour $s > 1$ on a*

$$(s-1)\zeta(s) < 2^{s-1}. \tag{5}$$

Signalons que Olivier Ramaré, de l'Université Lille I, nous a fourni une preuve, utilisant des évaluations numériques et le développement classique de $(s-1)\zeta(s)$ au voisinage de 1, d'une inégalité meilleure que celle de ce corollaire ; nous l'énonçons dans le lemme suivant (*cf.* [15]), bien que nous ne l'utiliserons que pour un aspect de la proposition 3 :

Lemme 1 (**[O. Ramaré]**) *En désignant par γ la constante d'Euler, on a, si $s > 1$,*

$$(s-1)\zeta(s) < e^{\gamma(s-1)}. \tag{6}$$

1. Démonstration de l'inégalité de gauche dans le théorème 1

Nous proposons deux méthodes.

1. Méthode particulière utilisant une comparaison de séries terme à terme On a

$$\frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2})^{s-1}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2}+n)^{s-1}} - \frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2}+n+1)^{s-1}}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Si on pose $x + n + 1 = c \geq 1$, on voit qu'il suffit de montrer que l'on a, si $s > 1$

$$\frac{1}{(s-1)(c-\frac{1}{2})^{s-1}} - \frac{1}{(s-1)(c+\frac{1}{2})^{s-1}} > \frac{1}{c^s}. \tag{7}$$

On achève donc la preuve de cette première partie du théorème 1 en montrant que l'inégalité (7) est vraie pour $c \geq 1$ et $s > 1$.

En posant $s - 1 = y > 0$ et $u = \frac{1}{2c}$, (7) se ramène à l'inégalité

$$(1-u)^{-y} - (1+u)^{-y} - 2uy > 0 \tag{8}$$

pour $y > 0$ et $0 < u \leq \frac{1}{2}$. En fait, (8) est vraie pour $0 < u < 1$ (et donc (7) est vraie pour $c > \frac{1}{2}$), par développement en série entière du premier membre, qui vaut

$$2 \sum_{p \geq 1} \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} y(y+1)(y+2)\cdots(y+2p),$$

quantité qui est strictement positive dès que $u > 0$ et $y > 0$.

Une variante pour la preuve consiste à écrire l'égalité

$$\frac{(1-u)^{-y} - (1+u)^{-y}}{2uy} = \frac{1}{2u} \int_{-u}^{u} \frac{dt}{(1-t)^{y+1}},$$

et à remarquer que le second membre est strictement minoré par 1, grâce à l'inégalité de Hadamard-Hermite que nous rappelons : si f est convexe continue sur $[a, b]$, on a

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt.$$

On l'applique à la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{y+1}}$, et l'inégalité est stricte car cette fonction est strictement convexe (voir [12], **125**, p. 98). ■

2. Méthode intégrale : point de vue des fonctions complètement monotones Posons

$$M(x, s) = \frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2})^{s-1}} - H(x, s). \tag{9}$$

Il est immédiat que l'on a

$$\frac{\partial^n M}{\partial x^n} = (-1)^n s(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1) M(x, s+n).$$

Il en résulte que dire que $M \geq 0$ c'est dire que cette fonction de x est complètement monotone sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que sa dérivée n-ème a le signe de $(-1)^n$. Nous reviendrons au V sur les fonctions complètement monotones. Retenons juste, pour

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

l'instant, que cette propriété de la fonction M implique l'existence, d'après le théorème de Bernstein (voir [17]), d'une mesure de Radon $\mu_s \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ telle que

$$M(x,s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\, d\mu_s(t).$$

Inversement, l'existence d'une telle mesure prouvera la positivité de la fonction M, c'est-à-dire l'inégalité de gauche du théorème 1. Celle-ci résulte donc immédiatement du lemme suivant, compte-tenu de la stricte positivité pour $t > 0$ de la fonction sous le signe intégrale :

Lemme 2 *Si $x \geq 0$ et $s > 1$, on a*

$$M(x,s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{t^s}{\Gamma(s)} \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2} - t}{t^2(\mathrm{e}^t - 1)}\, dt. \tag{10}$$

Démonstration du lemme 2 On applique l'égalité facile $\Gamma(\alpha)u^{-\alpha} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tu} t^{\alpha-1} dt$ ($\alpha > 0$ et $u > 0$), pour remplacer $\frac{1}{(s-1)(x+\frac{1}{2})^{s-1}}$ et $\frac{1}{(x+n)^s}$ par des intégrales ; on somme sur n et on obtient le résultat souhaité. D'ailleurs, la représentation intégrale de la fonction zêta d'Hurwitz est bien classique (voir [2] ou [8]). ∎

Nous obtenons en prime le fait que la fonction $x \mapsto M(x,s)$ est complètement monotone sur $]0, +\infty[$, pour tout $s > 1$. Comme nous l'avons annoncé, nous retrouverons l'utilisation des fonctions complètement monotones au paragraphe V, où nous étendrons le théorème 1 à ces fonctions.

2. Démonstration de l'inégalité de droite dans le théorème 1

Nous poserons dans la suite $\alpha(s) = [(s-1)\zeta(s)]^{-\frac{1}{s-1}}$; on a vu que $\frac{1}{2} < \alpha(s) < 1$. La preuve de l'inégalité cherchée utilise une représentation intégrale de la fonction

$$N(x,s) = H(x,s) - \frac{1}{(s-1)[x+\alpha(s)]^{s-1}},$$

que nous énonçons sous forme de lemme :

Lemme 3 *Si $x \geq 0$ et $s > 1$, on a*

$$N(x,s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{t^s}{\Gamma(s)} \frac{t - \mathrm{e}^{t[1-\alpha(s)]} + \mathrm{e}^{-t\alpha(s)}}{t^2(\mathrm{e}^t - 1)}\, dt. \tag{11}$$

Le calcul est analogue à celui qui donne la représentation (10) de la fonction M.

On peut écrire cette représentation intégrale sous la forme $N(x,s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} g_s(t)\, dt$, et la fonction g_s est du signe de la fonction $t \mapsto n_s(t) = t - \mathrm{e}^{t[1-\alpha(s)]} + \mathrm{e}^{-t\alpha(s)}$. Supposons que nous ayons montré qu'il existe un nombre $c \in]0, \infty[$ tel qu'on ait $n_s > 0$ sur $]0, c[$, et $n_s < 0$ sur $]c, \infty[$. Alors la fonction g_s vérifie

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

les mêmes inégalités, et ceci permet de minorer l'intégrale représentant la fonction N grâce à la décroissance stricte de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ si $x > 0$: on a en effet dans ce cas

$$\begin{aligned} N(x,s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} g_s(t)\,dt = \int_0^c \mathrm{e}^{-tx} g_s(t)\,dt + \int_c^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} g_s(t)\,dt \\ &> \mathrm{e}^{-cx} \int_0^c g_s(t)\,dt + \mathrm{e}^{-cx} \int_c^{+\infty} g_s(t)\,dt = \mathrm{e}^{-cx} \int_0^{+\infty} g_s(t)\,dt = 0 \end{aligned}$$

car la dernière intégrale n'est rien d'autre que $N(0,s)$, qui est nul.

Tout se ramène donc à l'étude des variations de la fonction n_s, ce qui ne présente pas de difficultés : on dérive trois fois, et le tableau de variation est aisé à construire en utilisant les inégalités $\frac{1}{2} < \alpha(s) < 1$ (voir aussi le paragraphe V, où cette étude est évoquée dans le contexte plus général des fonctions complètement monotones). ∎

2 Applications à la fonction zêta de Riemann

Proposition 1 *Si $s > 1$, on a*

$$1 + \frac{1}{(s-1)(\frac{3}{2})^{s-1}} \geq \zeta(s) \geq 1 + \frac{1}{(s-1)\bigl(1+\alpha(s)\bigr)^{s-1}}. \tag{12}$$

On a l'égalité $\zeta(s) = 1 + H(1,s)$. Les deux inégalités résultent de l'encadrement de $H(1,s)$ donné par le théorème 1. Remarquons qu'on a $1 + \mathrm{e}^{-\gamma} < 1 + \alpha(s) < 2$ (lemme 1), et que de plus la limite quand s tend vers $+\infty$ de $1 + \alpha(s)$ est 2. ∎

Remarquons qu'une autre manière d'écrire l'inégalité de droite dans (12) est (pour $s > 1$)

$$(s-1)^{\frac{1}{s-1}} [\zeta(s) - 1]^{\frac{1}{s-1}} + \left[1 - \frac{1}{\zeta(s)}\right]^{\frac{1}{s-1}} \geq 1. \tag{13}$$

Proposition 2 *On a l'inégalité, pour $s > 1$,*

$$[(s-1)\zeta(s)]^{\frac{1}{s-1}} \geq [s\zeta(s+1)]^{\frac{1}{s}}, \tag{14}$$

c'est-à-dire $\alpha(s+1) \geq \alpha(s)$.

Preuve de la proposition 2 Soit $f(x,s)$ la quantité minorante de $H(x,s)$ dans l'inégalité du théorème. De l'inégalité pour $x \geq 0$ entre les fonctions de x : $H(x,s) \geq f(x,s)$, et de leur égalité en 0, on déduit l'inégalité de leurs dérivées en $x = 0$. En écrivant cette inégalité entre ces dérivées, on obtient (14). ∎

Il est facile de voir que la fonction $s \mapsto h(s) = [(s-1)\zeta(s)]^{\frac{1}{s-1}}$ est décroissante pour $s \geq 1 + e$ (voir la proposition 3 ci-dessous), ce qui prouve l'inégalité (14) de la proposition 2 pour ces valeurs de s. Ceci peut être comparé à [7], où l'inégalité prouvée montre que la fonction $s \mapsto (s-1)\zeta(s)$ est au contraire croissante.

Ce qui précède et l'inégalité (14) amènent à conjecturer l'énoncé :

Conjecture 1 *La fonction $s \mapsto h(s) = [(s-1)\zeta(s)]^{\frac{1}{s-1}}$ est décroissante pour $s > 1$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

En fait, il suffit de prouver la conjecture sur l'intervalle $]1, \frac{5}{2}]$, grâce au résultat partiel suivant :

Proposition 3 *La fonction h est décroissante pour $s \geq \frac{5}{2}$, et $\forall s > 1$ on a l'inégalité $h(s) < \lim_{t\to 1} h(t) = \mathrm{e}^{\gamma}$.*

Preuve de la proposition 3 (a) La décroissance de h s'obtient immédiatement, pour $s \geq 1 + e$, en calculant sa dérivée logarithmique :

$$\frac{h'(s)}{h(s)} = \frac{1}{s-1}\left[\frac{1-\ln(s-1)}{s-1} - \left(Z(s) + \frac{\ln\zeta(s)}{s-1}\right)\right],$$

où $Z(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Il résulte clairement de cette formule que $\frac{h'(s)}{h(s)} \leq 0$ si $s \geq 1 + e$.

(b) Posons $u(s) = \frac{1-\ln(s-1)}{s-1}$ et $v(s) = Z(s) + \frac{\ln\zeta(s)}{s-1}$. Il est clair que v est décroissante, et on voit immédiatement que pour $s \leq 1 + e^2$ la fonction u est aussi décroissante. Pour montrer que sur un intervalle $[\beta, 1+e]$ on a $u \leq v$, il suffit de trouver une suite de points $\beta = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, avec $1 + e \leq x_n \leq 1 + e^2$, telle qu'on ait $v(x_{i+1}) \geq u(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (cette méthode est utilisée dans [15]). En utilisant une table numérique des fonctions Z et ζ (*cf.* [8]), on vérifie ces inégalités pour $x_0 = 2,5$, $x_1 = 2,6, \ldots, x_{14} = 3,8$. Ce qui achève de prouver la décroissance de la fonction h pour $s \geq \frac{5}{2}$. La relation $\mathrm{e}^{\gamma} > h(s)$ résulte du lemme 1. ■

Bien sûr, l'usage d'une table numérique donnant les valeurs de Z et ζ de centième en centième permettrait d'abaisser la borne $\frac{5}{2}$, mais il n'y a aucune chance de prouver la conjecture pour $s > 1$ par cette méthode, car les fonctions u et v deviennent infinies en 1.[1] Par ailleurs, nous verrons au paragraphe V.3. une généralisation de cette conjecture.

3 Application à la fonction Gamma d'Euler

La connaissance du signe des fonctions M et N permet, dans le cas $s = 2$, d'obtenir des renseignements sur des fonctions particulières associées à la fonction Γ. De plus, la représentation intégrale de la fonction M permet de prouver aisément des formules intégrales remarquables, en général déjà connues ou retrouvables par d'autres moyens (voir [2] et [5]).

1. Résultats de convexité

Posons, pour $x \geq 0$ et $a > 0$:

$$f_a(x) = \ln\frac{\Gamma(x+1)}{(x+a)^{x+a}}. \tag{15}$$

[1] Ajouté aux éprouves : en utilisant la convexité de u et v, on peut abaisser la borne $\frac{5}{2}$ à 2, 2.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

On se pose la question de la convexité ou de la concavité de ces fonctions, selon les valeurs de a ; nous verrons au paragraphe IV les raisons de cette question. Le résultat est le suivant :

Théorème 2 *Si $0 < a \leq \frac{1}{2}$, f_a est concave (et $-f_a''$ est complètement monotone) ; si $\frac{6}{\pi^2} \leq a$, f_a est convexe ; si $\frac{1}{2} < a < \frac{6}{\pi^2}$, f_a n'est ni convexe ni concave.*

Démonstration du théorème 2 Il est immédiat qu'on a $f_a'' = H(x,2) - \frac{1}{x+a}$. Si on est dans le cas où $0 < a \leq \frac{1}{2}$, on écrit $f_a'' = -M(x,2) + (\frac{1}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+a})$; le premier terme est négatif par le théorème 1, et le second l'est parce que $a \leq \frac{1}{2}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$ est complètement monotone, ainsi que $x \mapsto M(x,2)$, on voit d'ailleurs que $-f_a''$ l'est aussi. Si maintenant $a \geq \frac{6}{\pi^2}$, on écrit $f_a'' = N(x,2) + (\frac{1}{x+\frac{6}{\pi^2}} - \frac{1}{x+a})$; le premier terme est positif par le théorème 1, et le second l'est parce que $a \geq \frac{6}{\pi^2}$.

Enfin, si $\frac{1}{2} < a < \frac{6}{\pi^2}$, on a $f_a''(0) = H(0,2) - \frac{1}{a} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{a} < 0$. Et si on prend $x = p$, entier tendant vers l'infini, on obtient

$$f_a''(p) = H(p,2) - \frac{1}{p+a} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} - \frac{1}{2p^2} + O\Big(\frac{1}{p^3}\Big) = \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\frac{1}{p^2} + O\Big(\frac{1}{p^3}\Big) > 0$$

si p est assez grand. La fonction f_a'' n'a donc pas de signe constant sur $[0, +\infty[$. ■

La fonction $f_{1/2}$ jouera un rôle dans le paragraphe suivant et au paragraphe IV. Nous aurons alors besoin d'une propriété supplémentaire, que nous dégageons sous forme de lemme :

Lemme 4 *La fonction $f_{1/2}$ est concave décroissante (de $\frac{1}{2}\ln 2$ à $-\infty$) ; $f_{1/2}'$ est convexe décroissante négative.*

On a d'une part $f_{1/2}'(0) = -1 - \gamma + \ln 2$ (voir [2]), et de l'autre

$$f_{1/2}''(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2} - t}{e^t - 1}\, dt.$$

En intégrant alors en x sous le signe intégrale, on obtient la relation

$$f_{1/2}'(x) = -1 - \gamma + \ln 2 - \int_0^{+\infty} (1 - e^{-tx}) \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2} - t}{t(e^t - 1)}\, dt,$$

qui montre bien que $f_{1/2}'(x) \leq 0$, ce qui suffit à prouver le lemme. ■

Le caractère complètement monotone de la fonction M donne des renseignements supplémentaires sur la fonction f_a si $0 < a \leq \frac{1}{2}$: à partir de la dérivée seconde, le comportement est périodique avec l'ordre de dérivation, car $-f_a''$ est complètement monotone : f_a'' est concave croissante négative ; f_a''' est convexe décroissante positive ; $f_a^{(4)}$ est concave croissante négative ; *etc.*

Pour d'autres relations entre la fonction Γ et la complète monotonie, on peut voir [1] et sa bibliographie.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

2. Formules intégrales

Reprenons la relation $f''_{1/2}(x) = -M(x,2)$. Puisque nous avons une représentation intégrale de la fonction M, nous pouvons trouver simplement des représentations intégrales pour $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$ et pour $\Gamma(x+1)$. On obtient d'abord la relation

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln\Big(x+\frac{1}{2}\Big) - \gamma + \ln 2 - \int_0^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-tx}) \frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2} - t}{t(\mathrm{e}^t - 1)}\, dt;$$

puis on a pour $\Gamma(x+1)(x+\frac{1}{2})^{-(x+\frac{1}{2})}$ l'expression

$$\sqrt{2}\exp\Big[-x\Big(1+\gamma-\ln 2+\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t(\mathrm{e}^t-1)}\,dt\Big)\Big] \cdot \exp\Big[\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-tx})\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t^2(\mathrm{e}^t-1)}\,dt\Big]. \tag{16}$$

Compte-tenu des deux relations $f_{1/2}(0) = \frac{1}{2}\ln 2$ et $f'_{1/2}(0) = -1-\gamma+\ln 2$, il suffit d'intégrer en x sous le signe intégrale deux fois de suite (par le théorème de Fubini) la formule intégrale qui donne $f''_{1/2}(x)$.

En regroupant les termes et factorisant, l'expression (16) permet d'écrire alors

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2}x^x\sqrt{x}\Big(1+\frac{1}{2x}\Big)^x\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,\mathrm{e}^{-Kx}L\exp\Big[-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t^2(\mathrm{e}^t-1)}\,dt\Big],$$

où $K = 1+\gamma-\ln 2+\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t(\mathrm{e}^t-1)}\,dt$ et $L = \exp[\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t^2(\mathrm{e}^t-1)}\,dt]$. En comparant avec l'équivalent en $+\infty$ de $\Gamma(x+1)$ donné par la formule de Stirling, on obtient deux formules intégrales :

Proposition 4 *On a les deux relations*

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t(\mathrm{e}^t-1)}\,dt = \ln 2-\gamma, \tag{17}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t^2(\mathrm{e}^t-1)}\,dt = \ln\Big(\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{e}}}\Big). \tag{18}$$

En reportant les valeurs de ces intégrales dans l'expression de $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$, on obtient la formule suivante :

Proposition 5 *On a la représentation*

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln\Big(x+\frac{1}{2}\Big) + \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{t}{2}-t}{t(\mathrm{e}^t-1)}\,dt. \tag{19}$$

On peut remarquer que la formule (19), conjuguée à l'intégrale de Gauss (voir [2] ou [5])

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = -\gamma + \int_0^1\frac{1-(1-t)^x}{t}\,dt,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

dans laquelle on fait le changement de variable $1 - t = \mathrm{e}^{-u}$, permet de retrouver, en posant $x + \frac{1}{2} = z$, la relation classique (voir [2]), qui redonne d'ailleurs immédiatement (17)

$$\ln z = -\gamma + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{\mathrm{e}^{-tz}}{t} \right) dt.$$

4 Majoration de certaines fonctions élémentaires

Nous nous proposons maintenant de revenir aux deux problèmes d'inégalités évoqués dans l'introduction :

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{C}{\sqrt{nx(1-x)}} \quad \text{(problème 1)}$$

et

$$\binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(x+1)^{n+k}} \leq \frac{C}{\sqrt{nx(1+x)}} \quad \text{(problème 2).}$$

1. Majoration des fonctions de Bernstein

Dans [18], l'auteur résout le problème 1, en montrant le résultat suivant :

Proposition 6 **([Zeng Xiaoming])** *La meilleure constante dans le problème 1 est* $\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

Nous nous proposons de montrer que ce résultat est un corollaire simple du théorème 1 dans le cas $s = 2$. La démonstration obtenue diffère peu de celle de [18], mais celle-ci ne met pas en évidence le rôle joué par la convexité dans cette question.

Preuve de la proposition 6 Il s'agit de majorer, pour $t \in [0,1]$, n et k entiers, $n \geq 1$ et $k \in [0,n]$ la quantité $\binom{n}{k} t^{k+\frac{1}{2}}(1-t)^{n-k+\frac{1}{2}}$. D'abord, il est clair qu'à k et n fixés, le maximum pour $t \in [0,1]$ est atteint pour $t = \frac{k+\frac{1}{2}}{n+1}$. Tout revient donc à majorer

$$\binom{n}{k} \frac{(k+\frac{1}{2})^{k+\frac{1}{2}}(n-k+\frac{1}{2})^{n-k+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} F_n(x),$$

pour $x = k$ et $F_n(x) = \frac{(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}}}{\Gamma(x+1)} \frac{(n-x+\frac{1}{2})^{n-x+\frac{1}{2}}}{\Gamma(n-x+1)}$. On a bien sûr $F_n(x) = F_n(n-x)$. Soit $g_n(x) = \ln F_n(x) = -\big(f_{1/2}(x) + f_{1/2}(n-x)\big)$. On a $g_n''(x) = M(x,2) + M(n-x,2)$, donc $g_n''(x) \geq 0$ d'après le théorème 1. Ainsi g_n est convexe sur $[0,n]$, symétrique par rapport à $\frac{n}{2}$; donc g_n atteint son maximum pour $x = k = 0$ (et $x = n$), et il en est de même pour la fonction F_n.

Le maximum de la quantité $\binom{n}{k} t^{k+\frac{1}{2}}(1-t)^{n-k+\frac{1}{2}}$ est donc

$$m(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)^{n+1}.$$

Mais on a évidemment, par monotonie, $\sup_{n \geq 0} \sqrt{\frac{n}{n+\frac{1}{2}}} = 1$, et $\sup_{n\geq 0} (1 - \frac{1}{2(n+1)})^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Le maximum cherché est donc $\frac{1}{\sqrt{2n\mathrm{e}}}$, et c'est optimum. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

2. Majoration des fonctions élémentaires de l'opérateur de Baskakov

La résolution du problème 2 utilise aussi l'application du théorème 1 à la fonction $f_{1/2}$, c'est-à-dire le théorème 2.

Théorème 3 *La meilleure constante dans le problème 2 est* 1 *pour* $n = 1$. *Pour* $n \geq 2$, *cette meilleure constante vaut* $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ *si* $k = 0$. *Si* $n \geq 2$ *et* $k \geq 1$, *la meilleure constante à* n *donné est*

$$C_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}, \tag{20}$$

cette quantité C_n *étant décroissante, quand* n *augmente, depuis* $\frac{24}{25}\sqrt{\frac{3}{10}} = 0,525814\cdots$ *jusqu'à* $(\frac{3}{2e})^{\frac{3}{2}} = 0,409916\cdots$

Preuve du théorème 3

1. Cas $n = 1$ On a alors

$$\sup_{t\geq 0,\, k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{(t+1)^{n+k-\frac{1}{2}}} \sqrt{n} = \sup_{t\geq 0,\, k\geq 0} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{k+\frac{1}{2}} = 1. \tag{21}$$

2. Cas $n \geq 2$***,*** $k = 0$ On a

$$\sup_{t\geq 0, n\geq 2} \frac{\sqrt{t}\sqrt{n}}{(t+1)^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}. \tag{22}$$

En effet, le maximum en t est atteint pour $t = \frac{1}{2(n-1)}$, et sa valeur est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}.$$

Posons, pour $x \geq 2$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}})^{x-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$. On a alors

$$(\ln\phi)'(x) = \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{2x} = -\sum_{p\geq 2} \frac{1}{px^p}\left(1-\frac{1}{2^p}\right) < 0.$$

La fonction ϕ est donc décroissante, et $\sup_{x\geq 2}\phi = \phi(2) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

3. Cas $n \geq 2$***,*** $k \geq 1$ On a

$$\sup_{t\geq 0, k\geq 1} \binom{n+k-1}{k} \frac{t^{k+\frac{1}{2}}}{(t+1)^{n+k-\frac{1}{2}}} \sqrt{n} = C_n. \tag{23}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

En effet, le maximum en t est atteint pour $t = \frac{k+\frac{1}{2}}{n-1}$, et vaut $\frac{\sqrt{n}(n-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\, u_n(k)$, où

$$u_n(k) = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)} \frac{(k+\frac{1}{2})^{k+\frac{1}{2}}}{(n+k-\frac{1}{2})^{n+k-\frac{1}{2}}}.$$

L'entier n étant fixé, on pose $x = n+k-1$, variable avec $k \geq 1$ (donc $x \geq n$). Chercher le maximum en k de $u_n(k)$ est donc chercher le maximum en x de

$$h_n(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}}} \frac{\left(x-(n-1)+\frac{1}{2}\right)^{x-(n-1)+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(x-(n-1)+1\right)}.$$

On voit alors que $\ln h_n(x) = f_{1/2}(x) - f_{1/2}\left(x-(n-1)\right)$, donc $\ln h_n(x) \leq 0$, car la fonction $f_{1/2}$ est décroissante (lemme 4). De plus, on a $(\ln h_n)''(x) = f''_{1/2}(x) - f''_{1/2}\left(x-(n-1)\right) \geq 0$, car la fonction $f''_{1/2}$ est croissante (toujours le lemme 4). La fonction $\ln h_n$ est donc convexe négative sur $[n, +\infty[$, et prend donc son maximum en $x = n$. On a donc $\max_{k\geq 1} u_n(k) = u_n(1) = \Gamma(n+1)\frac{(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}}{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}$. Il en résulte que le maximum en $t \geq 0$ et $k \geq 1$ est $\frac{\sqrt{n}(n-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\Gamma(n+1)\frac{(\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}}{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}} = C_n$. Reste à établir la monotonie de C_n. Le logarithme ϕ de cette fonction de n s'écrit, en y remplaçant n par une variable x,

$$\phi(x) = \frac{3}{2}\ln x + (x-1)\ln(x-1) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2},$$

dont la dérivée vaut

$$\phi'(x) = \frac{3}{2x} + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) = -\sum_{p\geq 2}\frac{1}{px^p}\left(1-\frac{(-1)^p}{2^p}\right) < 0.$$

Le théorème s'ensuit évidemment. ■

Pour des détails sur les applications possibles à des classes d'opérateurs des majorations des fonctions élémentaires qui y apparaissent, voir [4], [11] et [18].

5 Extension du théorème 1 aux fonctions complètement monotones sur $]0, +\infty[$

1. L'énoncé général

La fonction $x \mapsto x^{-s}$ est complètement monotone sur $]0, +\infty[$. Il se trouve que les techniques d'intégrales utilisées pour prouver le théorème 1 dépendent essentiellement de la représentation intégrale $x^{-s} = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}\, dt$. Mais une telle représentation existe pour toute fonction complètement monotone f sur $]0, +\infty[$, d'après le théorème de Bernstein : $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, d\mu_f(t)$, où μ_f est une mesure ≥ 0 sur

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

$]0,+\infty[$ (non nécessairement bornée). Il en résulte que le théorème 1 peut s'étendre aux fonctions complètement monotones, avec pratiquement la même démonstration.

Rappels Une fonction $f\colon\,]0,+\infty[\ \mapsto \mathbb{R}$ est dite complètement monotone si f est C^∞ et si on a, pour tout entier $n \geq 0$, $(-1)^n f^{(n)} \geq 0$. Le théorème de Bernstein (*cf.* [17]) dit alors que f est complètement monotone si et seulement si il existe une mesure de Radon $\mu_f \geq 0$ (alors unique) sur $]0,+\infty[$, telle que pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ soit μ_f-intégrable, et vérifiant : pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\, d\mu_f(t)$.

Nous noterons CM le cône des fonctions complètement monotones non identiquement nulles sur $]0,+\infty[$, intégrables sur $[1,+\infty[$ (c'est-à-dire sur tout $[c,+\infty[$ pour tout $c > 0$). Les faits suivants sont alors classiques et faciles à établir, pour une fonction $f \in \mathrm{CM}$:

Fait 1 On a, $\forall n \geq 0$, entier, $(-1)^n f^{(n)} > 0$ sur $]0,+\infty[$;

Fait 2 Pour tout $n \geq 0$, $(-1)^n f^{(n)}(+\infty) = 0$;

Fait 3 Pour tout $n \geq 0$, la fonction $(-1)^n f^{(n)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et on a $\forall x \geq 0$

$$(-1)^n f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} t^n \, d\mu_f(t); \tag{24}$$

Fait 4 On a $\int_0^1 \frac{1}{t}\, d\mu_f(t) < +\infty$.

Notons, si $f \in \mathrm{CM}$, $S(x,f) = \sum_{n\geq 1} f(x+n)$, quantité définie pour $x \geq 0$. On a évidemment, pour $x > 0$ l'encadrement

$$\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \geq S(x,f) \geq \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Posons alors, pour $a, b \in\ ]0,1[$ et $x \geq 0$, $M_a(x,f) = \int_{x+a}^{+\infty} f(t)\, dt - S(x,f)$ et $N_b(x,f) = -M_b(x,f)$. On a alors l'analogue suivant du théorème 1 :

Théorème 4

(1) *Soit* $a \in\ ]0,1[$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

  (1a) $a \leq \frac{1}{2}$;

  (1b) *pour toute* $f \in \mathrm{CM}$, *on a* $M_a(x,f) \geq 0$ *pour tout* $x \geq 0$;

  (1c) *pour toute* $f \in \mathrm{CM}$, *l'application* $x \mapsto M_a(x,f)$ *est complètement monotone.*

(2) *Soit* $f \in \mathrm{CM}$. *Il existe un nombre* b_f, *unique, tel que pour* $b \in\ ]0,1[$ *les assertions suivantes soient équivalentes :*

  (2a) $b \geq b_f$;

  (2b) $N_b(x,f) \geq 0$ *pour tout* $x \geq 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

De plus, le nombre b_f est donné par l'équation $N_{b_f}(0, f) = 0$, vérifie les inégalités $\frac{1}{2} < b_f < 1$ et

$$f(b_f) \geq \sum_{n\geq 1} |f'(n)|. \tag{25}$$

Enfin, la suite $b_{(-1)^n f^{(n)}}$ est croissante.

Remarquons que si $f_s(x) = x^{-s}$, on a $S(x, f_s) = H(x, s)$, et alors $b_{f_s} = \alpha(s)$: on retrouve le théorème 1 ; et (25) redonne alors la proposition 2, qui traduit aussi dans ce cas la croissance de la suite $b_{(-1)^n f^{(n)}}$.

Démonstration du théorème 4 Le premier point est d'établir pour les fonctions M_a et N_b les représentations intégrales analogues à la formule (11) : on a, pour $a \in]0, 1[$ et $f \in \mathrm{CM}$

$$M_a(x, f) = -N_a(x, f) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-ta}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t - 1}\Big)\, d\mu_f(t). \tag{26}$$

Pour prouver cette formule, on remplace f par son expression intégrale dans la définition de $M_a(x, f)$, on somme la série sous le signe intégrale et on utilise le théorème de Fubini et le fait 4, qui assure que les intégrales écrites sont licites :

$$\begin{aligned} M_a(x, f) &= \int_{x+a}^{+\infty} \Big[\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ts}\, d\mu_f(s)\Big]\, dt - \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+n)}\, d\mu_f(t) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t(x+a)}}{t}\, d\mu_f(t) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\, d\mu_f(t), \end{aligned}$$

ce qui prouve (26).

Le signe de la fonction sous le signe intégrale dans (26) est celui de la fonction

$$t \mapsto n_a(t) = \mathrm{e}^{t(1-a)} - \mathrm{e}^{-ta} - t.$$

Il s'agit d'étudier les variations de cette fonction n_a. On calcule aisément les dérivées jusqu'à l'ordre 3, et on a $n_a''' > 0$; comme les valeurs en 0 et $+\infty$ de n_a, n_a' et n_a'' sont immédiates, on constate les faits suivants :

(α) si $0 < a \leq \frac{1}{2}$, la fonction n_a est strictement positive sur $]0, +\infty[$;
(β) si $\frac{1}{2} < a < 1$, $n_a < 0$ sur $]0, c(a)[$ et $n_a > 0$ sur $]c(a), +\infty[$, pour un certain nombre $c(a) > 0$.

Preuve du point (1) du théorème La preuve de (1a) $\Rightarrow$ (1b) résulte du fait (α). L'implication non(1a) $\Rightarrow$ non(1b) s'obtient, grâce au fait (β), en choisissant une mesure μ_f concentrée sur l'intervalle $]0, c(a)[$. On a évidemment (1c) $\Rightarrow$ (1b). Enfin, (1b) $\Rightarrow$ (1c) à cause de la relation évidente

$$\frac{d^n}{dx^n} M_a(x, f) = (-1)^n M_a\big(x, (-1)^n f^{(n)}\big) \tag{27}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

et du fait que si $f \in \mathrm{CM}$, alors pour tout n la fonction $(-1)^n f^{(n)} \in \mathrm{CM}$.

Preuve du point (2) du théorème On a, pour $b \in \,]0,1[$, $N_b(x,f) = -M_b(x,f)$. Donc N_b s'exprime par une intégrale portant sur une fonction dont le signe est celui de $m_b = -n_b$. Si $b \leq \frac{1}{2}$, alors $m_b < 0$ sur $]0,+\infty[$, et $N_b(x,f) < 0$. Si $b > \frac{1}{2}$, la décroissance stricte de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ sur $]0,+\infty[$ permet d'écrire les inégalités, compte-tenu du fait (β)

$$\begin{aligned} N_b(x,f) > \mathrm{e}^{-c(b)x} & \int_0^{c(b)} \Big(\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{\mathrm{e}^{-tb}}{t} \Big) \, d\mu_f(t) \\ & + \mathrm{e}^{-c(b)x} \int_{c(b)}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{\mathrm{e}^{-tb}}{t} \Big) \, d\mu_f(t) \\ & = \mathrm{e}^{-c(b)x} \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} - \frac{\mathrm{e}^{-tb}}{t} \Big) \, d\mu_f(t) = \mathrm{e}^{-c(b)x} N_b(0,f). \end{aligned}$$

On a ainsi l'inégalité

$$N_b(x,f) > \mathrm{e}^{-c(b)x} N_b(0,f). \tag{28}$$

On sait que $N_{1/2}(0,f) < 0$ et que $N_1(0,f) > 0$, et que la fonction $b \mapsto N_b(0,f)$ est strictement croissante, car sa dérivée est $f(b)$. Donc, il existe une unique solution b_f, incluse dans $]\frac{1}{2},1[$, à l'équation $N_b(0,f) = 0$. Si $b \geq b_f$, alors par (28) $N_b(x,f) \geq 0$. Si $b < b_f$, alors $N_b(0,f) < 0$, donc $N_b(x,f) < 0$ si $x > 0$ est assez petit. C'est l'équivalence de (2a) et (2b).

Par ailleurs, (25) se montre par le même argument de dérivation que celui utilisé pour la proposition 2, et l'encadrement

$$\int_{b_f}^{+\infty} -f'(t) \, dt \geq \sum_{n \geq 1} |f'(n)| = \int_{b_{-f'}}^{+\infty} -f'(t) \, dt$$

montre, par récurrence, la croissance de la suite $b_{(-1)^n f^{(n)}}$. ■

Quelques commentaires sur le théorème 4 (1) On peut trouver curieux le fait que le nombre $\frac{1}{2}$ convienne pour toutes les fonctions complètement monotones. En fait, la raison du rôle du nombre $\frac{1}{2}$ ne tient qu'à la convexité, et au théorème de Hadamard-Hermite. C'est cette généralisation que nous montrerons au paragraphe VII.

(2) A partir de la formule (26), il est facile de montrer que, si $f \in \mathrm{CM}$, alors $\forall a \in \,]0,\frac{1}{2}]$ la fonction $x \mapsto M_a(x,f)$ est non seulement complètement monotone, mais aussi appartient au cône CM (et est, de plus, définie en 0).

(3) Ce qui est intéressant, dans le théorème 4(2), n'est pas l'existence du nombre b_f, qu'on obtient évidemment par un argument de borne inférieure, mais le fait que ce nombre est donné par l'équation en b : $N_b(0,f) = 0$, grâce à l'inégalité $N_b(x,f) > \mathrm{e}^{-c(b)x} N_b(0,f)$; c'est ce qui entraîne (25).

(4) La suite $(b_{(-1)^n f^{(n)}})_n$ a une limite $\omega(f) \in \,]\frac{1}{2},1]$ quand n tend vers l'infini, et bien sûr on a $\omega(f) = \omega\big((-1)^p f^{(p)}\big)$ pour tout entier $p \geq 0$. Ce nombre $\omega(f)$ peut

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

être n'importe quel nombre de l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$: en effet, si $f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, avec $\lambda > 0$, alors la suite $(b_{(-1)^n f^{(n)}})_n$ est constante, égale à b_f, et nous verrons au paragraphe V.2.A que $b_f = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mathrm{e}^\lambda - 1}{\lambda}$, nombre qui prend exactement toutes les valeurs de $]\frac{1}{2}, 1[$ lorsque $\lambda > 0$. Et on peut avoir $\omega(f) = 1$: si $f(x) = x^{-s}$, il est immédiat de voir que $b_{(-1)^n f^{(n)}} = \alpha(s+n)$; or la limite en $+\infty$ de $\alpha(s)$ vaut 1, donc $\omega(f) = 1$. On peut aussi voir la remarque 2 plus loin.

(5) D'après le théorème 4(1), la fonction $x \mapsto M_{1/2}(x, f)$ est dans le cône CM, donc on peut à son tour lui appliquer le théorème 4(1), et obtenir de nouvelles inégalités. Cela ne présente d'intérêt que si les calculs sont faisables. Si on prend $f(x) = x^{-s}$, c'est le cas, et on obtient par exemple les inégalités suivantes sur les fonctions H et ζ, pour $s > 1$ et $x \geq 0$:

$$(x+1)H(x, s+1) + (2/s)H(x+1/2, s) - H(x, s) \leq \frac{1}{s(s-1)(x+1)^{s+1}},$$

$$\zeta(s+1) + \zeta(s)[(2/s)(2^s - 1) - 1] \leq \frac{2^{s+1}}{s} + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Pour $s = 3$ et $s = 5$, cette dernière inégalité coïncide avec une égalité à 2.10^{-3} près.

Quelques exemples

A. Quelques exemples de recherche du nombre b_f Nous donnons quelques exemples de recherche du nombre b_f associé à certaines fonctions f du cône CM, en énonçant simplement les résultats, faciles à obtenir par des calculs élémentaires.

(a) Nous avons vu que si $f(x) = x^{-s}$, alors $b_f = \alpha(s)$.

(b) Si $f(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, alors $b_f = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mathrm{e}^\lambda - 1}{\lambda}$.

(c) Si $f(x) = \frac{1}{\nu^x - 1}$, avec $\nu > 1$, alors $b_f = \frac{1}{\ln \nu} \ln \frac{\nu^{L_1(\frac{1}{\nu})}}{\nu^{L_1(\frac{1}{\nu})} - 1}$, où

$$L_1(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{u^n}{1 - u^n} = \sum_{r \geq 1} \tau(r) u^r, \quad 0 < u < 1,$$

est la série de Lambert associée à la suite constante $a(n) = 1$, et $\tau(r)$ est le nombre de diviseurs de l'entier $r \geq 1$ (voir le paragraphe VI).

(d) Si $f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$ (fonction associée à la mesure $d\mu_f = (1 - \cos t)\, dt$), alors

$$b_f = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\gamma + 2\Re e(\psi(i))} - 1}},$$

où ψ est la dérivée logarithmique de la fonction Γ.

(e) Si $f(x) = \frac{1}{q-p}(\frac{1}{x+p} - \frac{1}{x+q})$, avec des entiers $0 < p < q$, on a $b_f = \frac{q\mathrm{e}^{H_p} - p\mathrm{e}^{H_q}}{\mathrm{e}^{H_q} - \mathrm{e}^{H_p}}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Si p et q ne sont plus entiers, la fonction ψ intervient dans l'expression de b_f.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

(f) Si $f(x)=x^{-2}e^{\frac{1}{x}}$, fonction associée à la mesure

$$d\mu=\Big(\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{(k-1)!\,k!}\Big)\,dt=-i\sqrt{t}J_1(2i\sqrt{t})\,dt,$$

où J_1 est la fonction de Bessel, on a $b_f=(\ln[1+\sum_{k\geq 1}\frac{\zeta(k+1)}{(k-1)!}])^{-1}$.

(g) Si $f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$ le nombre b_f est solution de l'équation en b : $\int_b^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du=\ln(\frac{e}{e-1})$.

(h) Si $f(x)=\zeta(x+1)-1$, alors b_f est solution de l'équation en b :

$$\int_b^{+\infty}\big(\zeta(t+1)-1\big)\,dt=1.$$

(i) Si $f(x)=\sum_{p\geq 0}(x+p)^{-3}=x^{-3}+H(x,3)$, le nombre b_f est solution de l'équation en b : $\psi(b)=\frac{\pi^2}{3}$.

Des diverses inégalités qu'on peut alors déduire de (25), la plus simple à exprimer est celle obtenue à partir de la fonction du point (e) :

$$\text{(29)}\qquad \frac{4}{q-p}\,\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{q}\Big)\geq\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\cdots+\frac{1}{q^2}.$$

Remarque 1 L'application $f\mapsto b_f$ définie sur le cône CM a une propriété curieuse, qui se déduit facilement de sa définition : l'image du segment d'extrémités f et g du cône CM est exactement le segment réel d'extrémités b_f et b_g :

$$\{b_{\lambda f+(1-\lambda)g};\lambda\in[0,1]\}=[\min(b_f,b_g),\max(b_f,b_g)].$$

B. Un exemple d'application de la croissance de la suite $b_{(-1)^n f^{(n)}}$ Si $\lambda\geq 0$, soit $f_{s,\lambda}(x)=(x+\lambda)^{-s}$, avec $s>1$. Un calcul simple montre que l'on a

$$\text{(30)}\qquad b_{f_{s,\lambda}}=[(s-1)H(\lambda,s)]^{-\frac{1}{s-1}}-\lambda.$$

On peut d'ailleurs remarquer que si λ est un entier p, alors $H(p,s)=R_p(s)=\sum_{n\geq p+1}n^{-s}$, reste d'ordre p de la fonction ζ ; le théorème 4 donne ainsi, par exemple, l'inégalité $\sum_{n\geq p+1}\frac{1}{(x+n)^2}\geq\frac{1}{x+(\sum_{n\geq p+1}\frac{1}{n^2})^{-1}}$.

Posons donc $\alpha_\lambda(s)=b_{f_{s,\lambda}}+\lambda$; comme $(-1)^n f_{s,\lambda}^{(n)}=s(s+1)\cdots(s+n-1)f_{s+n,\lambda}$, on a alors $b_{(-1)^n f_{s,\lambda}^{(n)}}=\alpha_\lambda(s+n)-\lambda$. Il résulte donc du théorème 4 que la suite $n\mapsto\alpha_\lambda(s+n)$ est croissante. On a donc la généralisation suivante de la proposition 2 :

Proposition 7 *Pour tout $\lambda\geq 0$ et pour tout $s>1$ on a*

$$\text{(31)}\qquad [(s-1)H(\lambda,s)]^{\frac{1}{s-1}}\geq[sH(\lambda,s+1)]^{\frac{1}{s}}.$$

D'où une conjecture plus forte que la conjecture 1 :

Conjecture 2 *Pour tout $\lambda\geq 0$, la fonction $s\mapsto[(s-1)H(\lambda,s)]^{\frac{1}{s-1}}$ est décroissante sur* $]1,+\infty[$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Donnons une application de la proposition 7 :

Corollaire *La fonction $\lambda \mapsto b_{f_{s,\lambda}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$; sa limite quand λ tend vers l'infini est $\frac{1}{2}$, et sa limite en 0 est $\alpha(s)$.*

Démonstration On dérive $b_{f_{s,\lambda}}$ en λ, et on trouve $\frac{sH(\lambda,s+1)}{[(s-1)H(\lambda,s)]^{\frac{s}{(s-1)}}} - 1$, qui est négatif par la proposition 7. Puis on prend $\lambda = p$ entier, et on fait un développement limité de $b_{f_{s,p}}$ quand p tend vers $+\infty$, grâce à la formule d'Euler-Maclaurin. Et la limite en 0 est évidente. ■

Remarque 2 On peut montrer que la limite quand s tend vers $+\infty$ de $b_{f_{s,\lambda}}$ est 1, et que la limite en $s = 1$ de $b_{f_{s,\lambda}}$ vaut $e^{\psi(\lambda)+\frac{1}{\lambda}} - \lambda$. De la relation $(-1)^n f_{s,\lambda}^{(n)} = s(s+1)\cdots(s+n-1) f_{s+n,\lambda}$, on déduit donc que $\omega(f_{s,\lambda}) = 1$ (voir le commentaire (4) après le théorème 4).

6 Applications du théorème 4 à des séries entières génératrices de fonctions arithmétiques

1. L'énoncé général

Etant donnée une fonction arithmétique $\rho : k \mapsto \rho(k)$, définie pour $k \geq 1$, et que nous supposerons toujours positive ou nulle, nous lui associons sa série de Lambert notée $L_\rho(z)$ ou $L_{\rho(n)}(z)$, définie par $L_\rho(z) = \sum_{n\geq 1} \rho(n) \frac{z^n}{1-z^n}$ $(0 < z < 1)$. A la fonction ρ nous associons aussi sa fonction arithmétique sommatoire $\mathbf{1} \star \rho$ définie par $\mathbf{1} \star \rho(n) = \sum_{d|n} \rho(d)$ (somme étendue à tous les diviseurs d de n). Enfin, nous définissons la série entière génératrice de ρ par $G_\rho(z) = \sum_{n\geq 1} \rho(n) z^n$. On a classiquement la relation $L_\rho = G_{\mathbf{1}\star\rho}$.

Nous nous proposons d'utiliser le théorème 4 pour trouver des inégalités portant sur des séries de Lambert ou des séries génératrices de fonctions arithmétiques, et en particulier pour étudier l'ordre de grandeur de certaines séries $G_\rho(z)$, de rayon de convergence 1, quand $z \to 1$. Les résultats obtenus ne sont pas tous nouveaux, ou résultent aussi parfois classiquement de méthodes arithmétiques, mais nous en utiliserons peu ici, les résultats sont le plus souvent des corollaires très simples du théorème 4.

Le résultat de base s'énonce bien au moyen de la notation suivante : si ρ est une fonction arithmétique, on pose

$$\Theta_\rho(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{\rho(k)}{k} z^k. \tag{32}$$

On a alors l'énoncé suivant :

Théorème 5 *Etant donnée une fonction arithmétique $\rho \geq 0$ telle que la série $G_{\mathbf{1}\star\rho}$ soit de rayon de convergence 1, on a, pour $0 < z < 1$,*

$$\frac{1}{|\ln z|} \Theta_\rho(\sqrt{z}) \geq G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \geq G_\rho(z) + \frac{1}{|\ln z|} \Theta_\rho(z^2). \tag{33}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Dans cet énoncé, la première inégalité utilise toute la force du théorème 4(1), alors que la deuxième n'utilise le théorème 4(2) qu'en remplaçant b_f par 1 (faute de connaître ce nombre pour la fonction f qui intervient dans la démonstration, voir la remarque 13), ce qui se ramène à la minoration classique d'une série par une intégrale.

Corollaire *Si $\Theta_\rho(\sqrt{z})$ et $\Theta_\rho(z^2)$ sont équivalentes, quand $z \to 1$, à une même fonction $z \mapsto \delta(z)$, alors :*

(a) $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\delta(z)}{1-z}$;

(b) $G_\rho(z) = o\big(G_{\mathbf{1}\star\rho}(z)\big)$ *quand* $z \to 1$ *;*

(c) *si en particulier* $\Theta_\rho(1) = \sum_{k\geq 1} \frac{\rho(k)}{k} < +\infty$, *alors* $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\Theta_\rho(1)}{1-z}$.

Le point (c) de ce corollaire est classique, et peut s'obtenir directement en encadrant le dénominateur du terme général de la série de Lambert de ρ.

Démonstration du corollaire Le point (a) résulte de l'encadrement

$$\frac{1}{|\ln z|}\Theta_\rho(\sqrt{z}) \geq G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \geq \frac{1}{|\ln z|}\Theta_\rho(z^2),$$

et le point (c) en est clairement un cas particulier. Le point (b) résulte des inégalités $0 \leq G_\rho(z)\frac{1-z}{\delta(z)} \leq \alpha(z) - \beta(z)$, où $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ tendent vers 1 quand $z \to 1$.

Nous verrons sur des exemples que si $\Theta_\rho(\sqrt{z})$ et $\Theta_\rho(z^2)$ ne sont pas équivalentes au voisinage de $z = 1$, alors le point (b) n'est plus vrai, même si $\Theta_\rho(\sqrt{z})$ et $\Theta_\rho(z^2)$ sont du même ordre de grandeur. ■

Démonstration du théorème 5 Si $z \in]0,1[$, on considère la mesure $\mu_{z,\rho} = \sum_{k\geq 1} \rho(k)\varepsilon_{-k\ln z}$. La fonction $f_{z,\rho}$ du cône CM associée à $\mu_{z,\rho}$ est donnée, pour $x > 0$, par $f_{z,\rho}(x) = \sum_{k\geq 1} \rho(k) z^{kx}$. On a immédiatement, pour $y > 0$,

$$\int_y^{+\infty} f_{z,\rho}(t)\,dt = \frac{\Theta_\rho(z^y)}{|\ln z|}.$$

Pour $x \geq 0$, les égalités suivantes sont immédiates :

$$S(x, f_{z,\rho}) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \rho(k) z^{k(x+n)} = \sum_{k\geq 1} \rho(k) z^{kx} \frac{z^k}{1-z^k}.$$

On a en particulier $S(0, f_{z,\rho}) = L_\rho(z) = G_{\mathbf{1}\star\rho}(z)$. Par ailleurs, on a

$$S(1, f_{z,\rho}) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \rho(k) z^{k(n+1)} = \sum_{m\geq 2}\sum_{k\geq 1} \rho(k) z^{km} = G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) - G_\rho(z).$$

Par le théorème 4, en prenant successivement $y = \frac{1}{2}$ et $y = 1 + b_{f_{z,\rho}}$, on obtient

$$\frac{\Theta_\rho(\sqrt{z})}{|\ln z|} \geq G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \quad \text{et} \quad G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) - G_\rho(z) \geq \frac{\Theta_\rho(z^{1+b_{f_{z,\rho}}})}{|\ln z|}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

On sait que $b_{f_{z,\rho}} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, mais en général on ne sait rien de plus utilisable sur ce nombre (voir la remarque 3). On obtient une minoration en le remplaçant par 1, ce qui donne exactement l'encadrement (33) du théorème 5 (mais n'utilise pas vraiment le théorème 4(2)). ∎

Remarque 3 1. Le lecteur pourra montrer facilement la relation

$$b_{f_{z,\rho}} = \frac{\ln\big(\Theta_\rho^{-1}(|\ln z| L_\rho(z)\big)}{\ln z}, \tag{34}$$

et vérifier sur chacun des exemples qui suivent ce qu'elle donne.

2. Il est aisé de voir que l'inégalité de droite du théorème 5 peut être généralisée ainsi : $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) \geq \sum_{1\leq k\leq q} G_\rho(z^k) + \frac{1}{|\ln z|}\Theta_\rho(z^{q+1})$, inégalité qui devient une égalité pour q infini.

2. Des exemples

(a) $\rho(k) = \frac{1}{k}$.

On a alors $f_{z,\rho}(x) = -\ln(1-z^x)$, $\Theta_\rho(z) = \mathrm{li}_2(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{z^k}{k^2}$, $G_\rho(z) = -\ln(1-z)$, $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) = \sum_{n\geq 1}(\sum_{d|n}\frac{1}{d})z^n = \ln P(z)$, où $P(z) = \prod_{n\geq 1}\frac{1}{1-z^n} = 1 + G_p(z)$, et $p\colon n \mapsto p(n)$ est la fonction "nombre de partitions" de l'entier n.

Le théorème 5 donne alors l'encadrement

$$\frac{1}{|\ln z|}\,\mathrm{li}_2(\sqrt{z}) \geq \ln P(z) \geq -\ln(1-z) + \frac{1}{|\ln z|}\,\mathrm{li}_2(z^2),$$

ce qui redonne le résultat connu

$$\ln P(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\pi^2}{6}\frac{1}{1-z}, \tag{35}$$

d'ailleurs aussi rapide à prouver directement de la façon classique (*cf.* [6]).

(b) $\rho(k) = \lambda^k$, avec $\lambda \in \left]0, 1\right[$.

On a alors $f_{z,\rho}(x) = \frac{\lambda z^x}{1-\lambda z^x}$, $G_\rho(z) = \frac{1}{1-\lambda z}$ (avec un rayon de convergence $\frac{1}{\lambda} > 1$), $\Theta_\rho(z) = -\ln(1-\lambda z)$, défini en $z = 1$, et $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) = L_\rho(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{\lambda^k z^k}{1-z^k}$.

On obtient donc immédiatement par le corollaire du théorème 5 :

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{d|n}\lambda^d\Big) z^n \underset{z\to 1}{\sim} \frac{|\ln(1-\lambda)|}{1-z}. \tag{36}$$

(c) $\rho(k) = 1$

Dans ce cas, $f_{z,\rho}(x) = \frac{z^x}{1-z^x}$, $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) = G_\tau(z)$, où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de l'entier n. Le corollaire s'applique, car $\Theta_\rho(z) = -\ln(1-z)$, donc $\Theta_\rho(\sqrt{z})$ et $\Theta_\rho(z^2)$ sont équivalentes, quand $z \to 1$, à la fonction $z \mapsto |\ln(1-z)|$. On déduit de ce corollaire la relation

$$G_\tau(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{|\ln(1-z)|}{1-z}. \tag{37}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Remarque 4 Par la méthode d'Abel ou par un produit de séries, on a $\frac{1}{1-z}G_\tau(z) = \sum_{n\geq 1}\big(\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(n)\big)z^n$; mais on a la relation arithmétique classique

$$\tau(1)+\tau(2)+\cdots+\tau(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln n, \tag{38}$$

donc on a

$$\frac{G_\tau(z)}{1-z} \underset{z\to 1}{\sim} \sum_{n\geq 1} n(\ln n)z^n \underset{z\to 1}{\sim} \sum_{n\geq 1} nH_n z^n = z\frac{d}{dz}\Big(-\frac{\ln(1-z)}{1-z}\Big) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{|\ln(1-z)|}{(1-z)^2}.$$

On retrouve ainsi l'équivalent de G_τ au voisinage de 1 donné par (37), mais à l'aide de la relation (38), qui est fondamentalement de nature arithmétique (voir [3]).

(d) $\rho(k) = k^p$, où $p \geq 1$ est un entier

Nous avons besoin du lemme suivant, facile à prouver par récurrence :

Lemme 9 *Etant donné un entier $p \geq 1$, on a la relation*

$$\sum_{k\geq 1} k^p u^k = \frac{Q_p(u)}{(1-u)^{p+1}}, \tag{39}$$

où $Q_p(u) = u^p + \cdots + u$ est un polynôme de degré p à coefficients entiers strictement positifs, et vérifiant $Q_p(1) = p!$.

Des calculs simples montrent que $f_{z,\rho}(x) = \frac{Q_p(z^x)}{(1-z^x)^{p+1}}$, que $G_{\mathbf{1}\star\rho}(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{Q_p(z^n)}{(1-z^n)^{p+1}}$, que $G_\rho(z) = \frac{Q_p(z)}{(1-z)^{p+1}}$, et que $\Theta_\rho(z) = \frac{Q_{p-1}(z)}{(1-z)^p}$.

Dans le cas présent, les deux encadrements de $G_{\mathbf{1}\star\rho}$ donnés par le théorème 5 ne sont pas équivalents, mais du même ordre de grandeur, fournissant deux inégalités asymptotiques qu'on peut écrire, compte-tenu du lemme 9 et de la positivité des fonctions :

$$\begin{aligned} 2^p(p-1)! &\geq \limsup_{z\to 1} G_{\mathbf{1}\star\mathrm{id}^p}(z)(1-z)^{p+1} \\ &\geq \liminf_{z\to 1} G_{\mathbf{1}\star\mathrm{id}^p}(z)(1-z)^{p+1} \geq p! + \frac{(p-1)!}{2^p}. \end{aligned} \tag{40}$$

Remarque 5 On peut trouver dans [14] (exercice 34, page 54) la relation

$$\sum_{n\geq 1} n^s\frac{z^n}{1-z^n} \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\zeta(s+1)\Gamma(s+1)}{(1-z)^{s+1}}, \tag{41}$$

qui est plus précise que le résultat (40).

(e) $\rho(k) = \Lambda(k)$, fonction arithmétique de von Mangoldt

Rappelons que la fonction de von Mangoldt est définie par $\Lambda(k) = \ln p$ si k est de la forme p^m, p nombre premier, avec $m \geq 1$ entier, et $\Lambda(k) = 0$ sinon (*cf.* [9]). Nous allons ici étudier le comportement de la fonction $\Theta_\Lambda(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{\Lambda(k)}{k}z^k$, car la

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

fonction $G_{\mathbf{1}\star\Lambda}$ est très simple. On a en effet la relation classique $\sum_{d|n}\Lambda(d) = \ln n$, donc on a

$$G_{\mathbf{1}\star\Lambda}(z) = \sum_{n\geq 1}(\ln n)z^n \underset{z\to 1}{\sim} \sum_{n\geq 1} H_n z^n,$$

où $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ est la "somme harmonique". Comme $\sum_{n\geq 1} H_n z^n = -\frac{\ln(1-z)}{1-z}$, on déduit de ce qui précède l'équivalence

$$G_{\mathbf{1}\star\Lambda}(z) = \sum_{n\geq 1}(\ln n)z^n \underset{z\to 1}{\sim} \frac{|\ln(1-z)|}{1-z}. \tag{42}$$

Le théorème 5 fournit cette fois l'encadrement

$$|\ln(z^2)|G_{\mathbf{1}\star\Lambda}(z^2) \leq \Theta_\Lambda(z) \leq |\ln(\sqrt{z})|G_{\mathbf{1}\star\Lambda}(\sqrt{z}).$$

On voit facilement que les deux termes extrêmes de ces inégalités sont tous deux équivalents, quand $z\to 1$, à $|\ln(1-z)|$. D'où le résultat sur la fonction Θ_Λ :

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\Lambda(k)}{k}z^k \underset{z\to 1}{\sim} |\ln(1-z)|. \tag{43}$$

Remarque 6 On peut montrer le résultat (43) par des moyens "arithmétiques" : à partir de la relation $\frac{\Lambda(1)}{1}+\frac{\Lambda(2)}{2}+\cdots+\frac{\Lambda(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (voir [6]), une application de la transformation d'Abel à la série Θ_Λ donne en effet le résultat.

(f) $\rho(k) = h(k)$, fonction "noyau sans carré" de k

Si $k = p_1^{\alpha_1}\cdots p_q^{\alpha_q}$, avec les p_i premiers et les $\alpha_i \geq 1$, on pose $h(k) = p_1\cdots p_q$. Alors

$$\Theta_h(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{h(k)}{k}z^k, \quad G_{\mathbf{1}\star h}(z) = \sum_{k\geq 1}\Big(\sum_{d|k} h(d)\Big)z^k = \sum_{k\geq 1}\Big(\prod_{p^\nu\|k}(1+\nu p)\Big)z^k, \tag{44}$$

où l'écriture "$p^\nu \| k$" signifie que p est un facteur premier de k et que ν est le plus grand exposant tel que p^ν divise k. En écrivant les inégalités entre Θ_h et $G_{\mathbf{1}\star h}$ qui résultent du théorème 5 (l'expression de G_h est ici inutile), la connaissance de l'ordre de grandeur de l'un donne un renseignement sur l'autre. Il se trouve que par des méthodes arithmétiques on a (voir [16], exercice 11, page 55)

$$\sum_{k\leq x}\frac{h(k)}{k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C}{2}x^2, \quad \text{où } C = \prod_{p \text{ premier}}\left(1-\frac{1}{p(p+1)}\right). \tag{45}$$

On en déduit par la méthode d'Abel que $\Theta_h(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{C}{(1-z)^2}$. Il s'ensuit qu'on a

$$\frac{1}{|\ln z|}\Theta_h(\sqrt{z}) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{4C}{(1-z)^3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{|\ln z|}\Theta_h(z^2) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{C}{4(1-z)^3}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

D'où l'ordre de grandeur de la fonction $G_{\mathbf{1}\star h}(z) = \sum_{k\geq 1}\left(\prod_{p^\nu \| k}(1+\nu p)\right) z^k$ au voisinage de $z = 1$:

$$4C \geq \limsup_{z\to 1}(1-z)^3 G_{\mathbf{1}\star h}(z) \geq \liminf_{z\to 1}(1-z)^3 G_{\mathbf{1}\star h}(z) \geq \frac{C}{4}. \tag{46}$$

(g) une application de l'inégalité $f(b_f) \geq \sum_{n\geq 1}|f'(n)|$ au cas $\rho = 1$

On a vu que $f_{z,1}(x) = \frac{z^x}{1-z^x}$, et que $G_{\mathbf{1}\star\mathbf{1}} = G_\tau$. Posons $\sigma(n) = \mathbf{1}\star \mathrm{id}(n) = \sum_{d|n} d$. Il est alors facile de voir que $\sum_{n\geq 1}|f'(n)| = |\ln z| G_\sigma(z)$, et que $f(b_{f_{z,1}}) = \frac{z^{-G_\tau(z)}-1}{|\ln z|}$. On en déduit l'inégalité suivante entre G_τ et G_σ :

$$\mathrm{e}^{|\ln z| G_\tau(z)} \geq 1 + |\ln z| G_\sigma(z). \tag{47}$$

(h) $\rho = \mathbf{1}_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers

On obtient alors

$$\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{z^p}{p}, \quad G_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{p\in\mathcal{P}} z^p, \quad G_{\mathbf{1}\star\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{n\geq 2}\omega(n) z^n, \tag{48}$$

où $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n. Le théorème 5 fournit donc l'encadrement

$$\frac{1}{|\ln z|}\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{z^{\frac{p}{2}}}{p} \geq \sum_{n\geq 2}\omega(n) z^n \geq \sum_{p\in\mathcal{P}} z^p + \frac{1}{|\ln z|}\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{z^{2p}}{p}. \tag{49}$$

Nous allons déterminer un équivalent de $\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z)$ quand $z \to 1$, qui montrera que les deux termes extrêmes de (49) sont équivalents, ce qui nous permettra d'appliquer le corollaire du théorème 5. Pour ce faire, nous utilisons la relation arithmétique connue (voir [13], page 351, théorème 427), qui se montre élémentairement

$$\sum_{p\leq n, p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n). \tag{50}$$

On a en effet

$$\frac{1}{1-z}\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{n\geq 2}\Big(\sum_{p\leq n, p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}\Big) z^n \underset{z\to 1}{\sim} \sum_{n\geq 2}\ln(\ln n) z^n = \Delta(z). \tag{51}$$

Il s'agit de trouver l'équivalent de la fonction Δ au voisinage de $z = 1$; il est donné par le

Lemme 10 *On a l'équivalence*

$$\Delta(z) \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\ln\big(|\ln(1-z)|\big)}{1-z}. \tag{52}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

On déduit donc du lemme et de (51) l'équivalent

$$\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{z^p}{p} \underset{z\to 1}{\sim} \ln\bigl(|\ln(1-z)|\bigr). \tag{53}$$

Il en résulte aisément que $\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(\sqrt{z})$ et $\Theta_{\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z^2)$ sont équivalents au voisinage de $z=1$, et qu'on peut donc appliquer le corollaire du théorème 5. D'où le résultat final :

$$G_{\mathbf{1}\star\mathbf{1}_{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{n\geq 2} \omega(n) z^n \underset{z\to 1}{\sim} \frac{\ln\bigl(|\ln(1-z)|\bigr)}{1-z}. \tag{54}$$

Preuve du lemme 10 Pour avoir l'équivalent de $\Delta(z) = \sum_{n\geq 2} \ln(\ln n) z^n$ quand z tend vers 1, on ne peut comparer directement à l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln(\ln t) z^t\, dt$, car la fonction $t \mapsto \ln(\ln t) z^t$ n'est décroissante que pour t plus grand qu'un nombre fonction de z. On procède donc par un détour, en écrivant

$$\begin{aligned}\Delta(z) &\underset{z\to 1}{\sim} \sum_{n\geq 2} \Bigl(\frac{1}{2\ln 2} + \cdots + \frac{1}{n\ln n}\Bigr) z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n} z^n \\ &\underset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{1-z} \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t|\ln z|}}{t\ln t}\, dt = \frac{1}{1-z} \int_{2\lambda}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u \ln \frac{u}{\lambda}}\, du,\end{aligned}$$

où $\lambda = |\ln z|$, ceci car la fonction $t \mapsto \frac{z^t}{t\ln t}$ est décroissante. En intégrant par partie, on obtient

$$(1-z)\Delta(z) \underset{z\to 1}{\sim} I(\lambda) = \int_{2\lambda}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \ln\Bigl(\ln \frac{u}{\lambda}\Bigr)\, du,$$

où $\lambda = |\ln z| \to 0$ quand $z \to 1$. Le lemme 10 résulte donc du lemme qui suit, car $\ln(|\ln\lambda|) \underset{z\to 1}{\sim} \ln\bigl(|\ln(1-z)|\bigr)$. ■

Lemme 11 *On a* $I(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\sim} \ln(|\ln\lambda|)$.

Preuve du lemme 11 En mettant $|\ln\lambda|$ en facteur, on a immédiatement

$$I(\lambda) = \ln(|\ln\lambda|)\mathrm{e}^{-2\lambda} + J(\lambda) + K(\lambda), \tag{55}$$

où

$$J(\lambda) = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \ln\Bigl(1 + \frac{\ln u}{|\ln\lambda|}\Bigr)\, du \quad \text{et} \quad K(\lambda) = \int_{2\lambda}^{1} \mathrm{e}^{-u} \ln\Bigl(1 + \frac{\ln u}{|\ln\lambda|}\Bigr)\, du.$$

On a immédiatement l'encadrement

$$0 \leq J(\lambda) \leq \frac{1}{|\ln\lambda|} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \ln u\, du = O\Bigl(\frac{1}{|\ln\lambda|}\Bigr). \tag{56}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Pour traiter $K(\lambda)$, on remarque que si $2\lambda \leq u \leq 1$, alors $\frac{\ln u}{|\ln \lambda|} \geq \frac{\ln 2}{|\ln \lambda|} - 1$. On peut alors, par concavité de la fonction logarithme, encadrer $K(\lambda)$:

$$\frac{1}{|\ln \lambda|} \int_{2\lambda}^{1} \mathrm{e}^{-u} \ln u \, du \geq K(\lambda) \geq \frac{\ln(|\ln \lambda|) - \ln \ln 2}{|\ln \lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\ln 2}{|\ln \lambda|}} \int_{2\lambda}^{1} \mathrm{e}^{-u} \ln u \, du;$$

on en déduit que

$$|K(\lambda)| = O\left(\frac{\ln(|\ln \lambda|)}{|\ln \lambda|}\right). \tag{57}$$

Des relations (55), (56) et (57) on obtient immédiatement l'équivalent annoncé pour $I(\lambda)$ quand $\lambda \to 0$. ■

Remarque 7 (1) Il résulte du point (b) du corollaire du théorème 5 qu'on a

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} z^p = (1 - z) \sum_{n \geq 2} \pi(n) z^n = o\big(\ln(|\ln(1 - z)|)\big),$$

où $\pi(n)$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. En fait, on a, en utilisant le théorème des nombres premiers,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} z^p \underset{z \to 1}{\sim} \frac{1}{(1 - z)|\ln(1 - z)|}. \tag{58}$$

(2) On trouve dans [16], page 42, la relation $\omega(2) + \cdots + \omega(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \ln(\ln n)$. En utilisant encore le lemme 10 on peut, à partir de cette relation arithmétique, retrouver le résultat (54).

(i) Autres exemples On peut aussi déterminer, en utilisant le théorème 5, l'ordre de grandeur quand $z \to 1$ de la série génératrice d'autres fonctions arithmétiques. Des calculs simples permettent par exemple de montrer les résultats qui suivent.

(*) En prenant $\rho = \phi$ (indicatrice d'Euler), on obtient

$$2 \geq \limsup_{z \to 1} (1 - z) \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} z^k \geq \liminf_{z \to 1} (1 - z) \sum_{k \geq 1} \frac{\phi(k)}{k} z^k \geq \frac{1}{2} \tag{59}$$

(on peut d'ailleurs trouver à partir de résultats arithmétiques classiques (voir [16] page 41) l'équivalent exact $\frac{6}{\pi^2} \frac{1}{1-z}$ qui précise (59)) ;

(*) En prenant $\rho = \ln$, on a

$$2 \sum_{k \geq 1} \Big(\sum_{d | k} \ln d\Big) z^k = \sum_{k \geq 1} (\ln k) \tau(k) z^k \underset{z \to 1}{\sim} \frac{\ln^2(1 - z)}{1 - z}; \tag{60}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

(*) En prenant $\rho_p = \mathbf{1}_{\{p^n|n\geq 1\}}$, où p est un nombre premier donné, on obtient, en posant $\nu_p(k) = \nu$ si $p^\nu \parallel k$ (et 0 sinon), l'équivalence

$$\sum_{k\geq 2} \nu_p(k) z^k \underset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{p-1}\frac{1}{1-z}. \tag{61}$$

On a par ailleurs

$$G_\rho(z) = \sum_{n\geq 1} z^{p^n} \underset{z\to 1}{\sim} \frac{1}{\ln p}|\ln(1-z)|.$$

7 Le cas des fonctions convexes positives décroissantes sur $]0, +\infty[$

On note CD le cône des fonctions $f \geq 0$ convexes décroissantes sur $]0, +\infty[$, intégrables sur $[1, +\infty[$. On pose encore $S(x, f) = \sum_{n\geq 1} f(x+n)$. On a les inégalités, pour $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \geq S(x, f) \geq \int_{x+1}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

On a alors la généralisation suivante du théorème 4(1) :

Théorème 6 *Soit $a \in]0, 1[$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $a \leq \frac{1}{2}$;
(b) *pour toute $f \in$ CD et pour tout $x \geq 0$ on a $\int_{x+a}^{+\infty} f(t)\,dt \geq S(x, f)$.*

Preuve (a) $\Rightarrow$ (b) La quantité $M_a(x, f) = \int_{x+a}^{+\infty} f(t)\,dt - S(x, f)$ s'écrit

$$\sum_{n\geq 1}\Big(\int_{x+a+n-1}^{x+a+n} f(t)\,dt - f(x+n)\Big). \tag{62}$$

Si $a \leq \frac{1}{2}$, alors $x + n + a - \frac{1}{2} \leq x + n$, donc $f(x + n) \leq f(x + n + a - \frac{1}{2})$. Mais par l'inégalité de Hadamard-Hermite, on a

$$f\Big(x+n+a-\frac{1}{2}\Big) \leq \int_{x+a+n-1}^{x+a+n} f(t)\,dt.$$

Par suite, chaque terme de (62) est positif, et on a bien $M_a(x, f) \geq 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Si $a > \frac{1}{2}$, prenons par exemple $x = 0$, et soit f la fonction définie sur $[a - 1, +\infty[$ par : f est affine sur chaque intervalle $[p + a, p + 1 + a]$, si $p \geq -1$, et $f(q + a) = \frac{1}{(q+a+1)^2}$ pour $q \geq 1$ (p et q entiers). On a alors

$$\int_{p+a-1}^{p+a} f(t)\,dt - f(p) = f\Big(p+a-\frac{1}{2}\Big) - f(p) < 0$$

car $a - \frac{1}{2} > 0$. Par sommation, on en déduit que pour cette valeur $x = 0$ et cette fonction f on a $M_a(x, f) < 0$. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Remarque 8 Si $f \in \mathrm{CD}$, on peut voir, à partir de (62) et de l'inégalité de Hadamard-Hermite, que si $M_a(x, f) = 0$ pour tout $x > 0$ et tout $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, alors $f = 0$.

Remarque 9 On peut voir qu'une fonction f appartient à CD si et seulement si on peut l'écrire $f(x) = \int_0^{+\infty}(t-x)_+\, d\mu(t)$, pour une mesure $\mu \geq 0$ sur $]0, +\infty[$, vérifiant $\int_1^{+\infty} t^2\, d\mu(t) < +\infty$. Utilisant ce fait, on aurait pu montrer le théorème 6 de manière analogue à la preuve du théorème 4, sans se servir de l'inégalité de Hadamard-Hermite. Le rôle du nombre $\frac{1}{2}$ dans l'étude de la fonction n_a aurait été alors remplacé par le résultat suivant : un nombre $a \in\ ]0, 1[$ est $\leq \frac{1}{2}$ si et seulement si on a, pour tout $u > 0$,

$$\sum_{n\geq 1}(u-n)_+ \leq \frac{[(u-a)_+]^2}{2}. \tag{63}$$

En général, la partie (2) du théorème 4 n'a pas d'équivalent dans le cadre des fonctions convexes seulement. Même si on peut définir le nombre

$$b_f = \inf\Big\{ b \in \Big]\frac{1}{2}, 1\Big] \ \Big|\ \forall x \geq 0,\ N_b(x, f) \geq 0 \Big\}, \tag{64}$$

ce nombre n'est pas en général la solution de l'équation $N_b(0, f) = 0$.

Exemples (1) La fonction $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ appartient au cône CD, mais n'est pas complètement monotone, car f''' n'est pas de signe constant. Un calcul simple montre qu'on a

$$\mathrm{e}^x N_b(x, f) = N_b(0, f) + x\Big(\frac{1}{\mathrm{e}-1} - \mathrm{e}^{-b}\Big) \tag{65}$$

avec

$$N_b(0, f) = \frac{3\mathrm{e}-2}{(\mathrm{e}-1)^2} - \mathrm{e}^{-b}(b+3). \tag{66}$$

Il suffit donc de trouver un nombre b tel que $N_b(0, f) \geq 0$, mais tel que pour certains x, $N_b(x, f) < 0$. Ce dernier point sera réalisé pour tous les x assez grands si $\frac{1}{\mathrm{e}-1} - \mathrm{e}^{-b} < 0$. Cette condition équivaut à la condition $b < b_0 = \ln(\mathrm{e}-1) = 0,5413248\cdots$. Si on prend alors $b = 0,53$, on voit à partir de (66) que $N_b(0, f) > 0$.

On peut d'ailleurs, pour cette fonction f, voir grâce à (65) qu'on a $b_f = b_0$.

(2) On peut même construire une fonction $f \in \mathrm{CD}$ telle que $b_f = 1$, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas d'amélioration possible de la minoration standard de la série $\sum_{n\geq 1} f(x+n)$ par l'intégrale $\int_{x+1}^{\infty} f(t)\, dt$: on prend f affine sur les intervalles $[k, k+1]$, pour $k \geq 0$ entier, avec $f(k) = \frac{1}{2^{k^2}}$.

(3) On peut facilement voir que l'hypothèse de convexité est indispensable dans le théorème 6 : on peut construire une fonction $f \geq 0$ continue décroissante intégrable sur $[0, +\infty[$, mais non convexe, telle que l'inégalité $\int_{x+a}^{\infty} f(t)\, dt \geq \sum_{n\geq 1} f(x+n)$ n'ait lieu pour tout $x \geq 0$ que si $a = 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

Il est naturel d'examiner *la réciproque éventuelle du théorème 6* : soit $f \geq 0$ continue décroissante sur $]0, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$. Si $M_{1/2}(x, f) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, la fonction f est-elle nécessairement convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$? La réponse est *négative* : soit f la fonction définie par $f(t) = 2 - t$ sur $[0, 1]$, $f(t) = 1$ sur $[1, 1+\varepsilon]$, $f(t) = 2 + \varepsilon - t$ sur $[1 + \varepsilon, 2 + \varepsilon]$ et $f(t) = 0$ sur $[2 + \varepsilon, +\infty[$, pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Cette fonction f n'est pas convexe sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, mais un calcul facile montre qu'elle vérifie l'inégalité $M_{1/2}(x, f) \geq 0 \; \forall x \geq 0$.

Le problème analogue pour les fonctions complètement monotones se formule ainsi :

Problème A Soit $f \geq 0$ continue décroissante sur $]0, +\infty[$, intégrable sur $[1, +\infty[$. Si la fonction $x \mapsto M_a(x, f)$ appartient au cône CM pour tout $a \in]0, \frac{1}{2}]$, la fonction f est-elle complètement monotone ?

En ce qui concerne l'inégalité de droite du théorème 4, remarquons qu'on peut la reformuler, en posant $F_f(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt$ et $S_f(x) = \sum_{n\geq 1} f(x+n)$, sous la forme

$$F_f^{-1}\big(S_f(x)\big) \geq x + F_f^{-1}\big(S_f(0)\big). \tag{67}$$

Le problème naturel qui se pose, en notant $T_\lambda f(x) = f(\lambda{+}x)$ si $\lambda \geq 0$ et $P_\lambda f(x) = f(\lambda x)$ si $\lambda > 0$, est le suivant :

Problème B Soit f une fonction positive décroissante convexe intégrable sur $[0, +\infty[$; si toutes les fonctions $T_\lambda f$ et $P_\lambda f$ vérifient la relation (67), la fonction f est-elle complètement monotone ?

Références

[1] H. Alzer, *On some inequalities for the Gamma and Psi functions*. Math. Comp. (217) **66**(1997), 373–389.

[2] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*. Encyclopedia Math. Appl. **71**, Cambridge University Press, 1999.

[3] A. Baker, *A concise introduction to the theory of numbers*. Cambridge University Press, 1984.

[4] M. Becker, *Global Approximation Theorems for Szasz-Mirakjan and Baskakov Operators in Polynomial Weight Spaces*. Indiana Univ. Math. J. (1) **27**(1978), 127–142.

[5] N. Bourbaki, *Fonctions de variables réelles*. chapitre VI et VII, Hermann.

[6] K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*. Springer-Verlag, 1970.

[7] H. Delange, *Une remarque sur la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Riemann*. Colloq. Math. (2) **LIII**(1987).

[8] H. B. Dwight, *Mathematical Tables of elementary and some higher mathematical functions*. Dower Public., New York.

[9] W. J. Ellison, *Les nombres premiers*. Hermann, 1975.

[10] V. Gupta, *Communication personnelle*.

[11] V. Gupta, P. Gupta and M. Rogalski, *Improved rate of convergence for the modified Szasz-Mirakyan operators*. Approx. Theory Appl. (3) **16**(2000), 94–99.

[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge, 1967.

[13] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*. fifth edition, Oxford University Press, 1979.

[14] G. Pólya and G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis. Vol. I*. Springer-Verlag, 1972.

[15] O. Ramaré, *Communication personnelle*.

[16] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Cours spécialisé, Collection Société Mathématique de France, 1995.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-034-7 Published online by Cambridge University Press

[17] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, 1946.
[18] Zeng Xiaoming, *Bounds for Bernstein Basis Functions and Meyer-König and Zeller Basis Functions*. J. Math. Anal. Appl. **219**(1998).

Institut de Mathématiques de Jussieu
(CNRS et Universités Paris VI
et Paris VII)
Equipe d'analyse
Université Pierre et Marie
Curie-Paris 6, Case 186
4 place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
France
e-mail: bastien@ccr.jussieu.fr

Institut Mathématiques de Jussieu et
UMR AGAT (CNRS et Université de Lille 1)
USTL
59655 Villeneuve d'Ascq
France
e-mail: mro@ccr.jussieu.fr