# QUELQUES REMARQUES SUR LA GÉNÉRALISATION DU SCALAIRE DE COURBURE ET DU SCALAIRE PRINCIPAL

ARTHUR MOÓR

**Introduction.** Dans un espace finslérien à $n$ dimensions rapporté à un système quelconque de coordonnées $x^1, x^2, \ldots, x^n$, la distance de deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$ds = F(x^1, x^2, \ldots, x^n, dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) \tag{1}$$

où la fonction $F(x^2, x^2, \ldots, x^n, dx^1, \ldots, dx^n)$ est positivement homogène et du premier degré par rapport aux $dx^i$. La longueur d'un arc d'une courbe

$$x^i = x^i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

est définie entre $x^i(t_0)$ et $x^i(t_1)$, d'après (1), par

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x')dt. \tag{3}$$

L'expression (3) détermine une géométrie dont l'élément fondamental est l'élément d'appui $(x, x')$. Les tenseurs et les invariants caractéristiques de l'espace finslérien dépendent alors de $(x, x')$. L'espace est un ensemble des éléments d'appui $(x, x')$ [**3**].

Dans ses mémoires [**1**] et [**2**], Berwald a donné deux scalaires caractéristiques de l'espace finslérien à deux dimensions: la scalaire de courbure $\mathfrak{R}$ (il a désigné le scalaire de courbure par $\mathfrak{K}$) et le scalaire principal $\mathfrak{J}$. Les expressions analytiques de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{J}$ sont:

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R_0{}^i{}_{jk} h_i (l^j h^k - l^k h^j), \tag{4a}$$

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{2} A_{ijk} h^i h^j h^k, \tag{4b}$$

où $R_0{}^i{}_{jk}$ est le tenseur de courbure riemannien contracté par le vecteur $l^s$ ($R_0{}^i{}_{jk} = R_s{}^i{}_{jk}\, l^s$), $A_{ijk}$ est le tenseur de torsion de l'espace, $l^i$ est le vecteur unitaire porté dans la direction de son élément d'appui et $h^i$ est le vecteur normal unitaire.

Dans mon article [**5**], j'ai exprimé le vecteur normal $h^i$ par le vecteur d'Euler:

$$\rho_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} F_{x'^i} \tag{5}$$

sous la forme

$$h^i = -\frac{r}{F}\rho^i \tag{6}$$

Reçu le 7 novembre, 1950.

où

$$\frac{1}{r} = \mathfrak{L}(\rho^i) = \sqrt{g_{ik}\rho^i\rho^k} = \sqrt{\rho^i\rho_i}. \tag{6a}$$

$1/r$ est alors la longueur du vecteur $\rho^i$, et ainsi on peut déterminer les deux invariants $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ par les formules (4a), (4b) et (6) même dans l'espace à $n$ dimensions, car le vecteur $\rho^i$ est un vecteur de l'espace à $n$ dimensions.

Dans la section 1 du présent article nous allons démontrer que $1/r$ est aussi un invariant géométrique à $n$ dimensions (si $n = 2$, $1/r$ est la courbure extrémale) et que les scalaires

$$\mathfrak{R} = \frac{r^2}{2F^2} R_0{}^i{}_{jk}\rho_i(l^j\rho^k - l^k\rho^j)$$

et

$$\mathfrak{J} = -\frac{r^3}{2F^3} A_{ijk}\rho^i\rho^j\rho^k$$

dépendent de la courbe (2) si $n > 2$. Le vecteur unitaire[1]

$$\rho^{*i} = -r\rho^i$$

est le vecteur normal principal de la courbe (2).

Dans la section 2 nous donnerons la condition nécessaire et suffisante pour que les tenseurs $R_0{}^i{}_{jk}$ et $A_{ijk}$ aient la forme tridimensionnelle:

$$R_0{}^i{}_{jk} = \mathfrak{R}\rho^{*i}(l_j\rho^*_k - l_k\rho^*_j), \tag{7a}$$

$$A_{ijk} = 2\mathfrak{J}\rho^*_i\rho^*_j\rho^*_k. \tag{7b}$$

Les domaines des espaces où les tenseurs $R_0{}^i{}_{jk}$ et $A_{ijk}$ ont la forme donnée par (7a), (7b) sont de caractère semblable aux espaces à deux dimensions.

**1. Interprétation géométrique du scalaire de courbure et du scalaire principal de l'espace à $n$ dimensions.** Considérons le scalaire de courbure $\mathfrak{R}$ et le scalaire principal $\mathfrak{J}$ d'un espace finslérien à $n$ dimensions le long de la courbe

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Le paramètre $s$ est comme d'ordinaire la longueur mesurée sur la courbe (8). On a alors:

$$F(x, x') = 1, \qquad x'^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{9}$$

D'après (9), le long de la courbe (8), les formules de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{J}$ sont les suivantes:

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2}r^2 R_0{}^i{}_{jk}\rho_i(l^j\rho^k - l^k\rho^j), \tag{10a}$$

$$\mathfrak{J} = -\tfrac{1}{2}r^3 A_{ijk}\rho^i\rho^j\rho^k, \tag{10b}$$

où $\rho_i$ est le vecteur d'Euler (cf. l'équation (5)), et le scalaire $1/r$ est la longueur du vecteur $\rho_i$.

[1] $\rho^{*i}$ est désigné dans [5] par $\sigma^i$.

Nous aurons, d'après (5), pour le vecteur $\rho_i$ l'expression

$$\rho_i = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x'^i} x'^j - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^j \partial x'^i} x''^j. \tag{11}$$

On a, en vertu de la formule de Frenet, l'équation suivante:

$$Dx'^i = \frac{dx'^i}{ds} + C_j{}^i{}_k x'^j dx'^k + \Gamma_j{}^i{}_k x'^j dx^k = \kappa \eta^i, \tag{12}$$

où $\kappa$ est la courbure de la courbe (8) et $\eta^i$ est le vecteur normal principal de (8).
Les termes $C_j{}^i{}_k\, x'^j x''^k$ et $\Gamma_j{}^i{}_k x'^j x'^k$ ont la valeur [6]:

$$C_j{}^i{}_k x'^j x''^k = 0, \tag{13a}$$

$$\Gamma_j{}^i{}_k x'^j x'^k = 2G^i, \tag{13b}$$

où

$$G^i = g^{ri} G_r, \qquad G_r = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^r \partial x^k} x'^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^r}\right). \tag{14}$$

Nous aurons alors d'après (12), étant donné (13a) et (13b),

$$\frac{dx'^i}{ds} = x''^i = \kappa \eta^i - 2G^i. \tag{15}$$

A cause de la homogénéité de $G^i$ on a encore [6]:

$$2G^i = \frac{\partial G^i}{\partial x'^j} x'^j.$$

La définition du tenseur métrique nous donne l'expression:

$$g_{ij} = F \frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial F}{\partial x'^i} \frac{\partial F}{\partial x'^j}$$

où, à l'aide de (9), le long de la courbe (8) nous aurons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^i \partial x'^j} = g_{ij} - l_i l_j \qquad \left(l_r = \frac{\partial F}{\partial x'^r}\right). \tag{16}$$

Nous avons encore la formule:

$$\frac{1}{2F} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x'^i \partial x^j} x'^j = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x'^i} x'^j + \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial x'^i} x'^j$$

et le long de (8) de nouveau en vertu de (9)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x'^i} x'^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^j \partial x'^i} x'^j - \frac{\partial F}{\partial x^j} l_i l^j, \tag{17}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'^i} = l_i, \qquad x'^j = l^j. \tag{17a}$$

Nous pouvons maintenant exprimer $\rho_i$ de l'équation (11) d'après (15), (16) et (17) sous la forme:

$$(18) \qquad \rho_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^j \partial x'^i} x'^j\right) + \frac{\partial F}{\partial x^j} l_i l^j - (g_{ij} - l_i l_j)(\kappa\eta^j - 2G^j).$$

Le vecteur $l_j$ est le vecteur tangent à la courbe (8).

$$l_j = \frac{\partial F}{\partial x'^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les composantes covariantes du vecteur tangent. Comme nous l'avons déjà remarqué, $\eta^j$ est le vecteur normal principal de la courbe. Nous aurons par conséquent:

$$(19) \qquad l_j \eta^j = 0.$$

L'équation (18) nous donne le vecteur $\rho_i$ d'après (14) et (19) sous la forme:

$$(20) \qquad \rho_i = \frac{\partial F}{\partial x^j} l_i l^j - \kappa\eta_i - 2G^j l_i l_j.$$

Calculons maintenant le terme $2G^j l_i l_j$. D'après (14) on a

$$2G^j l_i l_j = 2G_j l_i l^j = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F^2}{\partial x^k} x'^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^k} x'^k\right) l_i$$

et à l'aide de (9) et (17a),

$$(21) \qquad 2G^j l_i l_j = \frac{\partial F}{\partial x^k} l_i l^k = \frac{\partial F}{\partial x^j} l_i l^j.$$

Les équations (20) et (21) nous donnent

$$(22) \qquad \rho_i = -\kappa\eta_i.$$

Le vecteur $\eta_i$ étant un vecteur unitaire, la longueur du vecteur $\rho_i$ sera d'après (22):

$$(23) \qquad \mathfrak{L}(\rho^i) = \sqrt{\rho^i \rho_i} = \kappa.$$

Le scalaire $r$ dans les expressions (10a), (10b) est alors, d'après (6a) et (23), le rayon de courbure de la courbe (8),

$$(24) \qquad r = 1/\kappa.$$

La formule de Frenet:

$$\omega^i = Dx'^i = \kappa\eta^i$$

nous donne d'après les équations (22) et (24),

$$(25) \qquad \rho^i = -\omega^i = -\eta^i/r.$$

Donc $\omega^i$ est la différentielle absolue du vecteur $x'^i$.

On peut maintenant exprimer les scalaires $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ d'après (10a) et (10b) à l'aide de l'équation (25) par le vecteur normal unitaire ou par la différentielle absolue du vecteur $l^i = x'^i$ sous la forme

$$(26) \qquad \mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} R_0{}^i{}_{jk} \eta_i (l^j \eta^k - l^k \eta^j) = \tfrac{1}{2} r^2 R_0{}^i{}_{jk} \omega_i (l^j \omega^k - l^k \omega^j),$$

$$\mathfrak{J} = \tfrac{1}{2}A_{ijk}\eta^i\eta^j\eta^k = \tfrac{1}{2}r^3 A_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k. \tag{27}$$

Dans l'espace à deux dimensions le vecteur $\eta^i$ ne dépend que du vecteur $l^i = x'^i$; $\eta^i$ est alors dans ce cas une fonction de $(x, x')$. Dans l'espace à $n$ dimensions $(n > 2)$, $\eta^i$ dépend non seulement de l'élément d'appui, mais aussi de la courbe

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est qu'une courbe à deux dimensions n'a qu'un vecteur normal, et ce vecteur dépend alors du vecteur $l^i$.

**2. Les invariants $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{J}$ dans l'espace à trois dimensions.** Dans cette partie, nous considérerons les tenseurs $A_{ijk}$ et $R_0{}^i{}_{jk}$ dans l'espace finslérien à trois dimensions. D'abord nous allons construire les vecteurs ${}_{(\alpha)}\mu_i$ d'un trièdre. On aura alors [**4**]:

$$(28a) \qquad {}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\alpha)}\mu^k = \delta_i^k \qquad\qquad \delta_{rs} = \delta_r^s = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases}$$

$$(28b) \qquad {}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\beta)}\mu^i = \delta_{\alpha\beta}$$

${}_{(\alpha)}\mu^i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les composantes contravariantes et ${}_{(\alpha)}\mu_i$ les composantes covariantes des vecteurs ${}_{(\alpha)}\mu$.

On voit facilement que

$$l^i\rho_i^* = 0, \tag{29}$$

où

$$(29a) \qquad \rho_i^* = r\rho_i, \qquad\qquad r = 1/\mathfrak{L}(\rho_i)$$

(cf. (6a)). Le vecteur $\rho_i^*$ est un vecteur unitaire, parce qu'on a d'après (29a):

$$\mathfrak{L}(\rho^{*i}) = r\sqrt{g^{ik}\rho_i\rho_k} = r\mathfrak{L}(\rho_i) = 1.$$

Désignons par $g$ le déterminant $|g_{ik}|$; les fonctions $\pm\sqrt{g}$ constituent un tenseur:

$$\epsilon_{123} = \sqrt{g}; \qquad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}; \qquad \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}; \qquad \epsilon_{rrs} = 0. \tag{30}$$

Toutes les composantes du tenseur $\epsilon$ sont définies par les formules (30). On voit facilement que $\epsilon_{ijk}$ est un tenseur. On peut toujours exprimer $g_{ik}$ sous la forme:

$$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\alpha)}\mu_k. \tag{31}$$

On a alors d'après (31),

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_1 & {}_{(1)}\mu_2 & {}_{(1)}\mu_3 \\ {}_{(2)}\mu_1 & {}_{(2)}\mu_2 & {}_{(2)}\mu_3 \\ {}_{(3)}\mu_1 & {}_{(3)}\mu_2 & {}_{(3)}\mu_3 \end{vmatrix}^2.$$

$\pm\sqrt{g}$ est donc un tenseur de Plücker [**4**].

Les composantes contravariantes du tenseur $\epsilon$ sont les suivantes:

$$\epsilon^{rst} = g^{ri}g^{sj}g^{tk}\epsilon_{ijk} = \frac{1}{g^3}B_{ri}B_{sj}B_{tk}\epsilon_{ijk}$$

où $B_{mn}$ est le déterminant complémentaire de $g_{mn}$ dans $|g_{ik}|$. D'après l'identité

$$\epsilon_{ijk} = \pm\sqrt{g} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_i & {}_{(1)}\mu_j & {}_{(1)}\mu_k \\ {}_{(2)}\mu_i & {}_{(2)}\mu_j & {}_{(2)}\mu_k \\ {}_{(3)}\mu_i & {}_{(3)}\mu_j & {}_{(3)}\mu_k \end{vmatrix}$$

nous aurons:

$$\epsilon^{rst} = \frac{1}{g^3} \begin{vmatrix} B_{ri}\, {}_{(1)}\mu_i & B_{sj}\, {}_{(1)}\mu_j & B_{tk}\, {}_{(1)}\mu_k \\ B_{ri}\, {}_{(2)}\mu_i & B_{sj}\, {}_{(2)}\mu_j & B_{tk}\, {}_{(2)}\mu_k \\ B_{ri}\, {}_{(3)}\mu_i & B_{sj}\, {}_{(3)}\mu_k & B_{tk}\, {}_{(3)}\mu_k \end{vmatrix} = \frac{1}{g^3} \begin{vmatrix} B_{r1} & B_{s1} & B_{t1} \\ B_{r2} & B_{s2} & B_{t2} \\ B_{r3} & B_{s3} & B_{t3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_1 & {}_{(1)}\mu_2 & {}_{(1)}\mu_3 \\ {}_{(2)}\mu_1 & {}_{(2)}\mu_2 & {}_{(2)}\mu_3 \\ {}_{(3)}\mu_1 & {}_{(3)}\mu_2 & {}_{(3)}\mu_3 \end{vmatrix}.$$

Si $r = 1$, $s = 2$, $t = 3$, nous aurons

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} = g^2$$

et ainsi

$$\epsilon^{123} = 1/\sqrt{g}, \tag{32}$$

$$\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik}; \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{ikj}; \quad \epsilon^{rrs} = 0. \tag{32a}$$

L'identité suivante

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{irs} = \delta_r^j\delta_s^k - \delta_s^j\delta_r^k \tag{33}$$

nous permet de vérifier les équations:

$$\sigma^{*i}\sigma_i^* = 1, \quad \sigma^{*i}l_i = \sigma^{*i}\rho_i^* = 0, \tag{34}$$

où

$$\sigma^{*i} = \epsilon^{ijk}l_j\rho_k^*, \quad \sigma_i^* = \epsilon_{ijk}l^j\sigma^{*k}.$$

Si l'on prend

$$ {}_{(1)}\mu_i = l_i, \quad {}_{(2)}\mu_i = \rho_i^*, \quad {}_{(3)}\mu_i = \sigma_i^*, \tag{35}$$

les vecteurs $l$, $\rho^*$ et $\sigma^*$ satisfont les équations (28b), et en vertu d'un résultat connu du calcul des tenseurs [**4**, I §4], ils satisfont aussi l'équation (28a).

On peut donc réaliser le long d'une courbe, par les vecteurs $l$, $\rho^*$, $\sigma^*$ et par quelques scalaires, tous les tenseurs de l'espace à trois dimensions. Nous aurons pour le tenseur $R_0{}^i{}_{jk}$ la formule:

$$R_0{}^i{}_{jk} = \underset{(rst)}{\mathfrak{R}}\, {}_{(r)}\mu^i\, {}_{(s)}\mu_j\, {}_{(t)}\mu_k. \tag{36}$$

Les fonctions $\underset{(rst)}{\mathfrak{R}}$ sont des scalaires. D'après une contraction par ${}_{(a)}\mu_i$, ${}_{(b)}\mu^j$, ${}_{(c)}\mu^k$, il résulte de l'équation (36) à l'aide de (28b):

$$\underset{(abc)}{\mathfrak{R}} = R_0{}^i{}_{jk}\, {}_{(a)}\mu_i\, {}_{(b)}\mu^j\, {}_{(c)}\mu^k. \tag{36a}$$

Pour le tenseur métrique $g_{ik}$ on a le long de la courbe (8) la formule

$$g_{ik} = \underset{(rs)}{\mathfrak{G}}\, {}_{(r)}\mu_i\, {}_{(s)}\mu_k$$

et d'après une contraction basée sur (28b) nous aurons

$$\underset{(ab)}{\mathfrak{G}} = g_{ik\ (a)}\mu^{i}\ _{(b)}\mu^{k} = \delta_{ab},$$

et alors

$$g_{ik} = l_i l_k + \rho^*_i \rho^*_k + \sigma^*_i \sigma^*_k.$$

On a l'identité

$$R_0{}^{i}{}_{jk} l_i = 0,$$

et nous aurons d'après (36a):

(37) $$\underset{(1bc)}{\mathfrak{R}} = R_0{}^{i}{}_{jk} l_{i\ (b)}\mu^{j}\ _{(c)}\mu^{k} = 0.$$

Le tenseur $R_0{}^{i}{}_{jk}$ est antisymétrique par rapport à ses deux derniers indices. Il en résulte:

(37a) $$\underset{(abc)}{\mathfrak{R}} = -R_0{}^{i}{}_{kj\ (a)}\mu_{i\ (b)}\mu^{j}\ _{(c)}\mu^{k} = -\underset{(acb)}{\mathfrak{R}}.$$

D'après les équations (35), (37) et (37a), il résulte de (36):

(38) $$\begin{aligned} R_0{}^{i}{}_{jk} = {} & \underset{(212)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(l_j\rho^*_k - l_k\rho^*_j) + \underset{(213)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(l_j\sigma^*_k - l_k\sigma^*_j) \\ & + \underset{(223)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(\rho^*_j\sigma^*_k - \rho^*_k\sigma^*_j) + \underset{(312)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(l_j\rho^*_k - l_k\rho^*_j) \\ & + \underset{(313)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(l_j\sigma^*_k - l_k\sigma^*_j) + \underset{(323)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(\rho^*_j\sigma^*_k - \rho^*_k\sigma^*_j). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que:

(39) $$R_0{}^{i}{}_{jk}(l^j\sigma^{*k} - l^k\sigma^{*j}) = R_0{}^{i}{}_{jk}(\rho^{*j}\sigma^{*k} - \rho^{*k}\sigma^{*j}) = R_0{}^{i}{}_{jk}\sigma^*_i = 0.$$

On a alors d'après (36a) et (37a),

$$2\underset{(213)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i} = 2\underset{(223)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i} = \underset{(3ab)}{\mathfrak{R}}\ _{(a)}\mu_{j\ (b)}\mu_k = 0 \qquad (a, b = 1, 2, 3).$$

et pour le tenseur $R_0{}^{i}{}_{jk}$:

(40) $$R_0{}^{i}{}_{jk} = \underset{(212)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(l_j\rho^*_k - l_k\rho^*_j).$$

Dans ce cas, le tenseur $R_0{}^{i}{}_{jk}$ aura la même forme que dans l'espace à deux dimensions.

Calculons maintenant le tenseur de torsion $A_{ijk}$. Le tenseur $A_{ijk}$ aura la forme:

(41) $$A_{ijk} = \underset{(rst)}{\mathfrak{J}}\ _{(r)}\mu_{i\ (s)}\mu_{j\ (t)}\mu_k.$$

Après une contraction par $_{(a)}\mu^i$, $_{(b)}\mu^j$ et $_{(c)}\mu^k$ il résulte de (41), étant donné (28b),

(42) $$\underset{(abc)}{\mathfrak{J}} = A_{ijk\ (a)}\mu^{i}\ _{(b)}\mu^{j}\ _{(c)}\mu^{k}.$$

A cause de l'homogénéité du premier degré par rapport aux $x'^i$ de la fonction fondamentale $F(x, x')$ (cf. l'équation (3)) et d'après

(43) $$A_{ijk} = \frac{F}{4}\frac{\partial^3 F^2}{\partial x'^i \partial x'^j \partial x'^k} = \frac{F}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x'^k},$$

il résulte que

(44) $$A_{ijk}l^i = A_{ijk}l^j = A_{ijk}l^k = 0,$$

et que le tenseur $A_{ijk}$ est symétrique par rapport à ses indices; c'est à dire:

(45) $$A_{ijk} = A_{jik} = A_{ikj} = \dots .$$

Si l'on prend, comme précédemment pour ${}_{(1)}\mu$ le tenseur $l$, alors

$$_{(1)}\mu_i = l_i, \quad {}_{(1)}\mu^i = l^i,$$

et on aura pour les scalaires $\underset{(abc)}{\mathfrak{J}}$ d'après (44) et (42):

(46) $$\underset{(1bc)}{\mathfrak{J}} = \underset{(a1c)}{\mathfrak{J}} = \underset{(ab1)}{\mathfrak{J}} = 0.$$

Nous démontrerons encore que $\underset{(abc)}{\mathfrak{J}}$ est symétrique par rapport à $a$, $b$, $c$. C'est qu'on a d'après (45),

(47) $$\underset{(abc)}{\mathfrak{J}} = A_{ijk}\, {}_{(a)}\mu^i\, {}_{(b)}\mu^j\, {}_{(c)}\mu^k = A_{jik}\, {}_{(a)}\mu^i\, {}_{(b)}\mu^j\, {}_{(c)}\mu^k = A_{jik}\, {}_{(b)}\mu^j\, {}_{(a)}\mu^i\, {}_{(c)}\mu^k = \underset{(bac)}{\mathfrak{J}}.$$

Par une conséquence analogue on a de même:

(48) $$\underset{(abc)}{\mathfrak{J}} = A_{ikj}\, {}_{(a)}\mu^i\, {}_{(b)}\mu^j\, {}_{(c)}\mu^k = \underset{(acb)}{\mathfrak{J}}.$$

D'après (46)–(48) l'équation (41) nous donne pour $A_{ijk}$ en vertu de (35),

(49) $$A_{ijk} = \underset{(222)}{\mathfrak{J}}\rho^*_i\rho^*_j\rho^*_k + \underset{(223)}{\mathfrak{J}}(\rho^*_i\rho^*_j\sigma^*_k + \rho^*_i\sigma^*_j\rho^*_k + \sigma^*_i\rho^*_j\rho^*_k)$$
$$+ \underset{(233)}{\mathfrak{J}}(\rho^*_i\sigma^*_j\sigma^*_k + \sigma^*_i\rho^*_j\sigma^*_k + \sigma^*_i\sigma^*_j\rho^*_k) + \underset{(333)}{\mathfrak{J}}\sigma^*_i\sigma^*_j\sigma^*_k.$$

Supposons maintenant que

(50) $$A_{ijk}\sigma^{*k} = 0.$$

Il résulte de (50) que le tenseur $A_{ijk}$ aura la forme:

(51) $$A_{ijk} = \underset{(222)}{\mathfrak{J}}\rho^*_i\rho^*_j\rho^*_k,$$

car d'après (42) on a

$$\underset{(ab3)}{\mathfrak{J}} = \underset{(a3b)}{\mathfrak{J}} = \underset{(3ab)}{\mathfrak{J}} = A_{ijk}\, {}_{(a)}\mu^i\, {}_{(b)}\mu^j\, \sigma^{*k} = 0 \qquad (a, b = 1, 2, 3).$$

Dans un ensemble de l'espace où l'équation (50) existe, le tenseur de torsion $A_{ijk}$ a la même forme que dans un espace à deux dimensions. Si le scalaire $\underset{(222)}{\mathfrak{J}}$ est nul le long de toutes les courbes de l'ensemble on a d'après (51) et (42),

$$A_{ijk} = 0,$$

et d'après (43),

$$g_{ik} = g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

L'ensemble est alors un espace riemannien.

De la même façon, il résulte de l'équation (40) que si le scalaire $\underset{(212)}{\mathfrak{R}}$ est nul le long de toutes les courbes de l'espace, le tenseur contracté de courbure est aussi nul:

$$R_0{}^i{}_{jk} = 0.$$

Dans ces espaces, il existe donc un parallélisme absolu des éléments linéaires [6].

Les équations (39) et (50) nous donnent une condition suffisante pour que les tenseurs $R_0{}^i{}_{jk}$ et $A_{ijk}$ aient la même forme que dans un espace à deux dimensions, mais ces conditions ne sont pas nécessaires. Les conditions nécessaires et suffisantes ont une forme plus compliquée que les conditions données. Elles ont la forme suivante, d'après (38) et (49):

$$\begin{aligned}(52)\qquad &\underset{(213)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(l_j\sigma^*_k - l_k\sigma^*_j) + \underset{(223)}{\mathfrak{R}}\rho^{*i}(\rho^*_j\sigma^*_k - \rho^*_k\sigma^*_j) + \underset{(312)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(l_j\rho^*_k - l_k\rho^*_j) \\ &\quad + \underset{(313)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(l_j\sigma^*_k - l_k\sigma^*_j) + \underset{(323)}{\mathfrak{R}}\sigma^{*i}(\rho^*_j\sigma^*_k - \rho^*_k\sigma^*_j) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(53)\qquad &\underset{(223)}{\mathfrak{J}}(\rho^*_i\rho^*_j\sigma^*_k + \rho^*_i\sigma^*_j\rho^*_k + \sigma^*_i\rho^*_j\rho^*_k) + \underset{(233)}{\mathfrak{J}}(\rho^*_i\sigma^*_j\sigma^*_k + \sigma^*_i\rho^*_j\sigma^*_k + \sigma^*_i\sigma^*_j\rho^*_k) \\ &\quad + \underset{(333)}{\mathfrak{J}}\sigma^*_i\sigma^*_j\sigma^*_k = 0.\end{aligned}$$

L'équation (52) résulte de l'équation (39) et le tenseur de courbure aura alors la forme (40). De même, de l'équation (50) nous aurons (53). Le tenseur de torsion $A_{ijk}$ aura alors la forme (51). Mais on ne peut conclure de l'existence des équations (52) et (53) à celle de (39) et de (50).

Nous voulons encore remarquer que tous les invariants et tous les tenseurs considérés dépendent de la courbe (8) (cf. l'introduction), car le vecteur $\rho_i$, ou $\rho^*_i$, est une fonction de $x''^i$ (cf. les équations (11) et (29a)). Ces invariants et ces tenseurs ne caractérisent l'espace que le long de la courbe (8). Si l'élément fondamental de l'espace était l'élément linéaire d'ordre deux $(x, x', x'')$, comme p.e. dans un espace de Kawaguchi, nous pensons qu'on pourrait obtenir des invariants de l'espace par une considération analogue, car le trièdre $l^i$, $\rho^{*i}$, $\sigma^{*i}$ dépend de l'élément fondamental $(x, x', x'')$ et le trièdre sera défini dans tous les éléments fondamentaux de l'espace, et non pas seulement le long de la courbe (8). En ce cas la fonction fondamentale a la forme:

$$ds = F(x, x', x'')dt$$

et naturellement $l^i$, $\rho^i$, $\sigma^i$ ont une autre forme, que dans l'espace dont l'élément fondamental est $(x, x')$; p.e.

$$\rho_i = F_{x^i} - \frac{d}{dt}F_{x'^i} + \frac{d^2}{dt^2}F_{x''^i}.$$

RÉFÉRENCES


1. L. Berwald, *Über zweidimensionale allgemeine metrische Räume*, J. Reine Angew. Math., vol. 156 (1927), 191-222.
2. L. Berwald, *On Finsler and Cartan geometries III*, Ann. Math., vol. 42 (1941), 84-112.
3. E. J. Cartan, *Les espaces de Finsler*, Actualités sci. et industr., 79 (Paris, 1934).
4. A. Duschek et W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie II* (Leipzig und Berlin, 1930).
5. A. Moór, *Généralisation du scalaire de courbure et du scalaire principal d'un espace finslérien à n dimensions*, Can. J. Math., vol 2 (1950), 307-313.
6. O. Varga, *Über eine Klasse von Finslerschen Räumen, die die nichteuklidischen verallgemeinern*, Comment. Math. Helv., vol. 19 (1946–1947), 367-380.


*Debrecen, Hongrie*