Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1986), **6**, 529–540
Printed in Great Britain

Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable

B. HOST

Départment de Mathématiques, CSP-Université de Paris-Nord, 93430-Villetaneuse, France

(*Received* 3 *July* 1985 *and revised* 14 *February* 1986)

Abstract. Parmi les systèmes dynamiques définis par des substitutions, les mieux connus sont ceux qui proviennent de substitutions à longueur constante. F. M. Dekking [**1**] a déterminé les valeurs propres de ces systèmes, et, plus récemment, M. Queffelec a étudié leur type spectral maximal. On se propose ici de déterminer les valeurs propres de ces systèmes dans le cas général des substitutions à longueur variable; dans cette direction, un résultat partiel a été obtenu par J. C. Martin [**3**] dans le cas des substitutions de 2 lettres, pour les valeurs propres correspondant à des fonctions propres continues.

1. *Préliminaires et énoncé du théorème*

(1.1) *Définitions.* Les systèmes dynamiques définis par substitutions semblent avoir été introduits par W. H. Gottschalk [**2**]; on pourra aussi se référer à [**4**] pour les résultats essentiels utilisés ici.

Soit A un ensemble fini non vide, que l'on appellera *l'alphabet*, formé de s éléments que l'on appellera les lettres. On note A^* l'ensemble des suites finies non vides de lettres. Pour un élément w de A^*, $|w|$ désignera la longueur de w.

Soit ζ une substitution sur A, c'est-à-dire une application de A dans A^*. ζ définit naturellement une application, encore notée ζ, de A^* dans A^*: pour un élément $w=(w_0w_1\cdots w_n)$ de A^*, $\zeta(w)$ est obtenu en concaténant $\zeta(w_0), \zeta(w_1), \ldots, \zeta(w_n)$. On peut alors itérer la substitution: pour $k>0$, ζ^k désigne la k-ième itérée de ζ, qui est aussi une substitution sur A.

Supposons de plus qu'il existe une lettre de A, notée 0, telle que la première lettre de $\zeta(0)$ soit 0. Alors, par récurrence, pour tout $k>0$ la suite $\zeta^{k+1}(0)$ est un prolongement de la suite $\zeta^k(0)$. Si la longueur de $\zeta^k(0)$ tend vers l'infini, on obtient à la limite une suite infinie $u\in A^{\mathbb{N}}$. Cette suite peut aussi être définie de la façon suivante: la substitution ζ génère, par concaténation, une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans lui-même que l'on note encore ζ. u est alors l'unique élémement de $A^{\mathbb{N}}$ tel que

$$u_0=0 \quad \text{et} \quad \zeta(u)=u.$$

Munissons l'espace compact $A^{\mathbb{N}}$ du shift T: pour $x=(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$, Tx est défini par

$$(Tx)_n=x_{n+1} \qquad \text{pour tout } n\geq 0.$$

Soit X l'orbite fermée de u sous le shift T. Le système dynamique (X, T) sera appelé *le système dynamique défini par la substitution* ζ. A priori, si on choisit une autre lettre initiale u'_0 au lieu de 0 on obtient une autre suite u' et un autre système (X', T); cependant, pour les substitutions primitives (cf. (1.2)) que l'on considèrera ici, le système (X, T) défini par u est minimal, et u' appartient à X, donc les systèmes dynamiques (X, T) et (X', T) sont identiques.

Certains auteurs préfèrent construire des suites bilatères, de sorte que T soit un homéomorphisme de X; ce procédé semble inutile: pour les substitutions primitives considérées, T est surjective par minimalité; d'autre part, d'après [**4**, Chap. 4, § 1], l'ensemble Y des points de X ayant plusieurs images réciproques est fini, et $T^{-1}Y$ est fini; ainsi, l'ensemble $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} T^kY$ est dénombrable, et T est un homéomorphisme de $X\setminus D$.

(1.2) *Les hypothèses.* On supposera désormais que la substitution ζ est *primitive*, c'est-à dire que:

pour tout $a, b \in A$, et pour tout entier k assez grand, la lettre b apparaît dans $\zeta^k(a)$. Alors, pour toute lettre a, $|\zeta^k(a)|$ tend vers l'infini, et on peut bien définir la suite infinie u. De plus, le système (X, T) est à la fois minimal et uniquement ergodique; on notera μ son unique mesure invariante.

On supposera aussi que la substitution ζ est *injective sur les lettres*, c'est-à-dire que, si a et b sont deux lettre distinctes, $\zeta(a)$ et $\zeta(b)$ sont distincts.

On aura besoin aussi d'une hypothèse de reconnaissabilité de la suite u. Pour $x \in A^{\mathbb{N}}$, et $m < n$ deux entiers, on notera $x[m, n[$ l'élément $(x_mx_{m+1}\cdots x_{n-1})$ de A^*.

Soit E la partie de $\mathbb{N}$ définie par

$$E = \{0\} \cup \{|\zeta(u[0, p[)|: p > 0\}.$$

On supposera désormais que:

il existe un entier $k > 0$ tel que, si n appartient à E et si m vérifie

$$u[n, n+k[= u[m, m+k[,$$

alors m appartient à E.

On dit alors que la substitution ζ est *reconnaissable*, et que k est son indice de reconnaissabilité.

La substitution ζ étant reconnaissable, la suite u ne peut pas être périodique. J. C. Martin [**3**] affirme qu'une substitution sur un alphabet de 2 lettres qui définit une suite non périodique est reconnaissable, mais sa démonstration n'est pas convaincante. Une condition suffisante pour que la substitution primitive ζ soit reconnaissable est qu'elle soit post-fixée, c'est-à-dire que:

a et b étant 2 lettres distinctes, $\zeta(a)$ n'est pas égal à la partie droite de $\zeta(b)$, c'est-à-dire $\zeta(a) \neq \zeta(b)$ et il n'existe aucun $w \in A^*$ tel que $\zeta(b) = w\zeta(a)$.

(1.3) *Cobords.* On dira que l'élément w de A^* est *un mot de* u s'il apparaît dans u, c'est-à-dire s'il existe 2 entiers m et n avec $0 \leq m < n$ tels que $w = u[m, n[$.

Une application h de A dans l'ensemble des complexes de module 1 sera appelée un *cobord* de ζ si, pour tout mot $u[m, n[$ de u vérifiant $u_n = u_m$ on a $h(u_m)h(u_{m+1})\cdots h(u_{n-1}) = 1$. Pour que h soit un cobord, il faut et il suffit qu'il existe une application f de A dans l'ensemble des complexes de module 1 telle que:

pour tout mot (ab) de 2 lettres de u, $f(b) = f(a)h(a)$.

Dans les cas les plus simples, par exemple si l'alphabet A est formé de 2 lettres, tout cobord de ζ est constant et égal à 1.

(1.4) THÉORÈME. *Soit ζ une substitution primitive, injective sur les lettres et reconnaissable sur un alphabet A, et soit (X, T, μ) le système dynamique défini par cette substitution*:

(i) *Toute fonction propre de (X, T, μ) est égale presque partout à une fonction propre continue.*

(ii) *Pour que le complexe λ de module* 1 *soit une fonction propre de (X, T, μ), il faut et il suffit qu'il existe un entier $p > 0$ tel que, pour toute lettre $a \in A$, la limite*

$$h(a) = \lim_{n \to +\infty} \lambda^{|\zeta^{pn}(a)|}$$

existe, et que h soit un cobord de ζ.

2. *Discussion*

(2.1) L'entier p intervenant dans l'énoncé du théorème peut être déterminé à priori:

Soit J l'application de A dans lui-même qui à chaque lettre associe la première lettre de $\zeta(a)$. A étant fini, la suite (J^n) des itérés de J est périodique à partir d'un certain rang. La période de cette suite, qu'on peut appeler la *période des initiales*, peut être choisie comme entier p. En particulier, si pour toute lettre a la première lettre de $\zeta(a)$ est a, on peut prendre $p = 1$. Ce résultat sera démontré au § 5.

(2.2) En appliquant le théorème aux substitutions à la longueur constante, on peut retrouver le résultant de [**1**].

Supposons que la substitution ζ est de longueur constante q. Pour tout n et toute lettre $a, |\zeta^n(a)| = q^n$. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda = e^{2\pi i t}$. Pour que $\lambda^{q^{np}}$ converge, il faut et il suffit que t puisse s'écrire

$$t = \frac{r}{q^p - 1} + \frac{u}{q^v}$$

avec r, u, v entiers et $v \geq 0$.

La limite $h(a)$ est alors constante et égale à $z = e^{2\pi i s}$ avec $s = r/(q^p - 1)$. Soit h' le PGCD des entiers $n > 0$ pour lesquels il existe un mot $w = (w_0 w_1 \cdots w_n)$ de u avec $w_0 = w_n$. Pour que la constante z soit un cobord, il faut et il suffit que sh' soit un entier. Soit h le plus grand diviseur de h' premier avec q, et qui est appelé *la hauteur de ζ*. Pour qu'un nombre s puisse s'écrire sous la forme $s = r/(q^p - 1)$ pour un certain p et vérifie $h's \in \mathbb{Z}$, il faut et il suffit que sh soit un entier. Finalement, λ est une valeur propre si et seulement si t peut s'écrire $t = (m/h) + (u/q^v)$. Remarquons que h divise $q^p - 1$, où p est la période des initiales.

(2.3) A partir du théorème, on peut déterminer les valeurs propres rationnelles du système dynamique défini par une substitution de 2 lettres; ce résultat peut être extrait de l'article de Martin [**3**], mais sa forme précise a été proposée par le referee:

PROPOSITION. *Soit ζ une substitution de longueur non constante sur l'alphabet* $\{0, 1\}$, *vérifiant les hypothèses du théorème. Soient M la matrice de ζ, d le déterminant et T la trace de M, et t un rationnel.*

https://doi.org/10.1017/S0143385700003679 Published online by Cambridge University Press

Pour que $\exp(2\pi i t)$ *soit valeur propre du système dynamique défini par* ζ, *il faut et il suffit que* t *soit de la forme* $t=(k/w)+(m/r^n)$, *où* k, m, n *sont des entiers,* $n\geq 0$, $r=\mathrm{PGCD}(d,T)$ *et où* w *est l'entier défini par*:

(i) *les facteurs premiers de* w *sont les nombres premiers qui divisent* $|\zeta(0)|$ *et* $|\zeta(1)|$ *mais pas* r;

(ii) *leurs exposants dans la décomposition de* w *sont les mêmes que dans la décomposition de* $|\zeta(0)|-|\zeta(1)|$.

Pour $n>0$, soient $p_n=|\zeta^n(0)|$ et $q_n=|\zeta^n(1)|$; posons $p_0=q_0=1$.
Pour tout $n\geq 0$, on a alors

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Soit $t=a/b$, où a et b sont deux entiers premiers entre eux. D'après le théorème, si $\exp(2\pi i t)$ est valeur propre il existe $N>0$ tel que b divise p_N et q_N; réciproquement, si b divise p_N et q_N pour un certain N, b divise p_n et q_n pour tout $n\geq N$, et $\exp(2\pi i t)$ est valeur propre. Il faut donc déterminer les nombres premiers p et les entiers k tels que p^k divise p_N et q_N pour un certain N, ce qui est partiellement résolu par les lemmes 1 et 2 du § 3 de [**3**]. On donne ici une démonstration rapide.

Pour tout $n\geq 0$, on a:

$$\left.\begin{aligned} p_{n+1} &= p_1 p_n + M_{1,0}(q_n-p_n) \\ q_{n+1} &= q_1 q_n + M_{0,1}(p_n-q_n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

et

$$\left.\begin{aligned} p_{n+2} &= Tp_{n+1}-dp_n \\ q_{n+2} &= Tq_{n+1}-dq_n \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Soit p un nombre premier. Si p divise r, d'après (2) p^n divise p_{2n} et q_{2n} pour tout $n>0$. Supposons que p^k divise w. Alors p divise p_1 et q_1, et p^k divise p_1-q_1; d'après (1) et par récurrence, p^k divise p_k et q_k.

Réciproquement, supposons que p^k divise p_N et q_N, et que p ne divise pas r. p_{N+1} et q_{N+1} sont divisibles par p. Si p ne divisait pas d, d'après (2) et par récurrence descendante p diviserait p_0 et q_0, ce qui est absurde; p divise donc d, et ne divise donc pas T. D'après (2) et par récurrence descendante p divise p_1 et q_1. Soit l tel que p_1-q_1 soit divisible par p^l mais pas par p^{l+1}. D'après (2) et par récurrence, p^l divise p_n-q_n pour tout n, et p^{l+1} ne divise p_n-q_n pour aucun n, donc $l\geq k$ et p^k divise w. Finalement, pour qu'il existe N tel que p^k divise p_N et q_N, il faut et il suffit qu'il existe n tel que p^k divise $r^n w$, ce qu'il fallait démontrer.

(2.4) On donne ici une méthode pour déterminer les valeurs λ pour lesquelles les suites $\lambda^{|\zeta^{pn}(a)|}$ convergent.

Notons $A=\{0,1,\ldots,s-1\}$. Pour $x\in\mathbb{R}^s$, désignons par $\|x\|$ la distance de x au point de $\mathbb{Z}^s$ le plus proche. On dira qu'une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^s$ *converge vers* x *modulo* $\mathbb{Z}^s$ si $\|x_n-x\|$ tend vers 0. Soit M la matrice (s,s) définie par:

$M_{i,j}$ est le nombre d'occurences de i dans $\zeta(j)$.

https://doi.org/10.1017/S0143385700003679 Published online by Cambridge University Press

M est appelée *la matrice de* ζ. Notons encore e le point de $\mathbb{R}^s$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Pour tout $n>0$, le vecteur $\tilde{M}^n e$ a pour coordonnées $|\zeta^n(0)|, |\zeta^n(1)|, \ldots, |\zeta^n(s-1)|$. Soient enfin $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda = e^{2\pi i t}$. Alors:

Pour que, pour toute lettre a, la suite $\lambda^{|\zeta^{pn}(a)|}$ converge, il faut et il suffit que la suite $(t\tilde{M}^{pn}e)$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$.
Le problème est alors réglé par le lemme suivant. Les parties (i) et (iii) du lemme seront utiles dans la suite

LEMME 1. *Soient P une matrice (s, s) à coefficients entiers, et $x \in \mathbb{R}^s$.*

(i) *Si $(P^{n+1}x - P^n x)$ converge vers 0 modulo $\mathbb{Z}^s$, $P^n x$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$.*

(ii) *Pour que $P^n x$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$, il faut et il suffit que x puisse s'écrire $x = x_1 + x_2 + x_3$ avec*

$$P^n x_1 \to 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^s;$$
$$P^n x_2 \in \mathbb{Z}^s \quad \text{pour tout } n \text{ assez grand};$$
$$(P-I)x_3 \in \mathbb{Z}^s.$$

La suite $P^n x$ converge alors vers x_3 modulo $\mathbb{Z}^s$, et

(iii) *la convergence est géométrique, c'est-à-dire qu'il existe $C>0$ et $r<1$ avec $\|P^n x - x_3\| < Cr^n$ pour tout $n>0$.*

Notons $y = Px - x$; pour tout $n>0$, soient u_n le point de $\mathbb{Z}^s$ le plus proche de $P^n y$, et $v_n = P^n y - u_n$. La suite v_n converge vers 0; pour tout n, $u_{n+1} - Pu_n = Pv_n - v_{n+1}$, donc la suite $u_{n+1} - Pu_n$ converge vers 0, et, comme cette suite est à valeurs dans $\mathbb{Z}^s$, elle est nulle à partir d'un certain rang. Il existe ainsi $m>0$ tel que $u_{m+n} = P^n u_m$ pour tout $n \geq 0$. Comme l'image des opérateurs P^s et P^{m+s} est la même, il existe $y_2 \in \mathbb{R}^s$ tel que $P^{m+s}y_2 = P^s u_m$, et ainsi $u_n = P^n y_2$ pour tout $n \geq q = m+s$.

Soit $y_1 = y - y_2$. Pour $n \geq q$, $P^n y_1 = v_n$, donc la suite $P^n y_1$ converge vers 0; y_1 appartient donc au sous-espace de $\mathbb{R}^s$ algébriquement associé aux valeurs propres de P de module strictement infèrieur à 1; la restriction de $P-I$ à ce sous-espace est un isomorphisme, et il existe x_1 dans ce sous-espace tel que $y_1 = Px_1 - x_1$; la suite $P^n x_1$ converge alors géométriquement vers 0.

Soit $z = x - x_1$. On a $Pz - z = y_2$, et $P^q(P-I)z = u_q \in \mathbb{Z}^s$. Posons $x_2 = z - P^q z$ et $x_3 = P^q z$. On a bien $P^q x_2 = -(I + P + \cdots + P^{q-1})u_q \in \mathbb{Z}^s$, $(P-I)x_3 = u_q \in \mathbb{Z}^s$ et $x = x_1 + x_2 + x_3$. Enfin, pour $n \geq q$,

$$\|P^n x - x_3\| = \|P^n(x_1 + x_2)\| = \|P^n x_1\|;$$

et cette suite converge vers 0 géométriquement.

3. *Topologie de X*

Considérée comme une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, ζ est continue. D'autre part, $\zeta(u) = u$ et pour tout $n>0$,

$$\zeta(T^n u) = T^{|\zeta(u[0,\, n[)|}u, \tag{$*$}$$

donc l'orbite fermée X de u est stable par ζ; on étudie maintenant les propriétés de l'application continue ζ de X dans lui-même.

(3.1) LEMME 2. (i) *Soit* (n_i) *une suite d'entiers positifs telle que* $(T^{n_i}u)$ *converge vers un point* $x \in X$. *Pour que x appartienne à* $\zeta(X)$, *il faut et il suffit que, pour tout i assez grand,* n_i *appartienne à l'ensemble E défini en* (1.2). *En particulier,* $T^r u$ *appartient à* $\zeta(X)$ *si et seulement si* $r \in E$.

(ii) $\zeta(X)$ *est une partie ouverte et fermée de X.*

Supposons d'abord que pour tout i assez grand $n_i \in E$, et que la suite $(T^{n_i}u)$ converge vers x. Pour i assez grand, il existe m_i tel que $n_i = |\zeta(u[0, m_i[)|$; soit y un point adhérant à la suite $(T^{m_i}u)$; alors $\zeta(T^{m_i}u) = T^{n_i}u$ pour i assez grand, d'après (*), donc $\zeta(y) = x$, et finalement $x \in \zeta(X)$.

Réciproquement, soient (n_i) une suite d'entiers telle que $(T^{n_i}u)$ converge vers le point $x \in \zeta(X)$, $y \in X$ tel que $\zeta(y) = x$, et (m_i) une suite d'entiers telle que $(T^{m_i}u)$ converge vers y. Pour tout i, soit $r_i = |\zeta(u[0, m_i[)|$; r_i appartient à E, et $T^{r_i}u = \zeta(T^{m_i}u)$. La suite $(T^{r_i}u)$ converge vers la même limite x que la suite $(T^{n_i}u)$; k étant l'indice de reconnaissabilité de ζ introduit en (1.2), pour tout i assez grand $u[r_i, r_{i+k}[= u[n_i, n_{i+k}[$, donc n_i appartient à E. Ceci prouve la partie (i) du lemme, et la partie (ii) s'en déduit immédiatement.

(3.2) LEMME 3. (i) *Soient* $x \in X$ *et* $p > 0$. *Pour que* $T^p\zeta(x)$ *appartienne à* $\zeta(X)$, *il faut et il suffit qu'il existe un entier* $r > 0$ *tel que* $p = |\zeta(x[0, r[)|$, *et alors* $T^p\zeta(x) = \zeta(T^r x)$.

(ii) ζ *est un homéomorphisme de X sur* $\zeta(X)$.

Pour démontrer la partie (i) du lemme, il suffit de prouver que le plus petit entier $p > 0$ tel que $T^p\zeta(x) \in \zeta(X)$ est $p = |\zeta(x_0)|$.

On a bien $T^p\zeta(x) = \zeta(Tx) \in \zeta(X)$. Inversement, soit $0 < q < p$, et supposons que $T^q\zeta(x) \in \zeta(X)$. Soit (n_i) une suite d'entiers telle que $(T^{n_i}u)$ converge vers x, et $m_i = |\zeta(u(0, n_i[)|$; pour tout i, $m_i \in E$. La suite $(T^{m_i+q}u)$ converge vers le point $T^q\zeta(x)$ de $\zeta(X)$, donc $m_i + q$ appartient à E pour tout i assez grand d'après le lemme 2(i). Or, pour i assez grand, $u_{n_i} = x_0$, donc l'entier suivant m_i dans E est $m_i + p$, d'où une contradiction.

Pour démontrer la partie (ii) du lemme, il suffit de prouver que ζ est injective. Soient $x, y \in X$ avec $\zeta(x) = \zeta(y) = z$. D'après (i), le plus petit entier $p > 0$ tel que $T^p z \in \zeta(X)$ est égal à la fois à $|\zeta(x_0)|$ et à $|\zeta(y_0)|$. Alors $\zeta(x_0) = z[0, p[= \zeta(y_0)$, et, par injectivité de ζ sur les lettres, $x_0 = y_0$. Par récurrence, $x_n = y_n$ pour tout n, et $x = y$.

(3.3) Soit $n > 0$; la substitution ζ^n est primitive, et elle définit la même suite u, et le même système dynamique que la substitution ζ. De plus, elle possède les mêmes propriétés que ζ:

LEMME 4. *Pour tout* $n > 0$, *la substitution* ζ^n *est reconnaissable, et les lemmes* 2 *et* 3 *sont valables pour elle; dans la partie* (i) *du lemme* 2, *il faut bien sûr remplacer l'ensemble E par l'ensemble* E_n *défini par*:

$$E_n = \{0\} \cup \{|\zeta^n(u[0, p[)|;\ p > 0\}.$$

Par récurrence, ζ^n est un homéomorphisme, et $\zeta^n(X)$ est une partie ouverte de X.

Soit $n > 0$. Supposons que ζ^n est reconnaissable, et soit k_n son indice de reconnaissabilité. Montrons que ζ^{n+1} est reconnaissable. Comme ζ^n est un homéomor-

https://doi.org/10.1017/S0143385700003679 Published online by Cambridge University Press

phisme, il existe $k_{n+1} \geq k_n$ tel que, pour $x, y \in X$,

$$\zeta^n(x)[0, k_{n+1}[= \zeta^n(y)[0, k_{n+1}[$$

entraîne $x[0, k[= y[0, k[$, où $k = k_1$ est l'indice de reconnaissabilité de ζ. Soient p et q deux entiers tels que $p \in E_{n+1}$ et que $u[p, p+k_{n+1}[= u[q, q+k_{n+1}[$. Il existe $r > 0$ tel que $T^p u = \zeta^{n+1}(T^r u)$; d'autre part, comme $k_{n+1} \geq k_n$, $q \in E_n$, et il existe m tel que $T^q u = \zeta^n(T^m u)$. Alors, par définition de k_{n+1}, $(\zeta(T^r u))[0, k[= (T^m u)[0, k[$, donc $m \in E$, et il existe l tel que $T^m u = \zeta(T^l u)$. Finalement, $T^q u = \zeta^{n+1}(T^l u)$, et $q \in E_{n+1}$.

Ainsi, ζ^n est reconnaissable pour tout n, et les propriétés (i) du lemme 2 et du lemme 3 s'en déduisent.

Il n'est pas clair que la substitution ζ^n est injective sur les lettres pour $n > 1$; cependant, on n'utilisera plus cette propriété de ζ dans la suite, mais seulement les conclusions des lemmes précédents, et on pourra donc remplacer ζ par un itéré ζ^n chaque fois que ce sera utile.

4. *Fonctions propres continues*

On commence ici la démonstration du théorème, en montrant qu'un complexe λ vérifiant les hypothèses de convergence du théorème est une valeur propre correspondant à une fonction propre continue de (X, T). On remplace la substitution ζ par son itérée ζ^p.

(4.1) *Un lemme de convergence uniforme.* Soit $\lambda = e^{2\pi i t}$ un nombre complexe de module 1 tel que, pour toute lettre $a \in A$, la limite $h(a) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{|\zeta^n(a)|}$ existe. Avec les notations du § 2, on a vu qu'alors la suite $(t\tilde{M}^n e)$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$, et, d'après le lemme 1, cette convergence est géométrique: il existe $C < 0$ et $0 < r < 1$ tels que, pour toute lettre a et tout $n > 0$,

$$|\lambda^{|\zeta^n(a)|} - h(a)| \leq Cr^n.$$

Pour $w = (w_0 w_1 \cdots w_p) \in A^*$, notons $h(w) = h(w_0)h(w_1)h(w_2) \cdots h(w_p)$. Pour tout mot w de u, on a alors

$$|\lambda^{|\zeta^n(w)|} - h(w)| \leq |w| Cr^n.$$

LEMMA 5. *Soit λ un complexe de module 1 vérifiant la condition de convergence précédente, et h comme ci-dessus. Il existe $B > 0$ et $0 < r < 1$ tels que, pour tout $m > 0$*

$$|\lambda^{|\zeta^n(u[0,m[)|} - h(u[0, m[)| \leq Br^n.$$

Soit $m > 0$. Pour tout $i > 0$, soit p_i le plus grand entier $\leq m$ et appartenant à E_i (les ensembles E_i ont été définis en (3.3)). La suite (p_i) est décroissante, et $p_i = 0$ pour tout i supérieur ou égal à un certain entier q.

Soit $0 < i < q$. Si $p_{i+1} < p_i$, $u[p_{i+1}, p_i[$ peut s'écrire $\zeta^i(w_i)$, où w_i est un mot de u avec $|w_i| < S = \operatorname{Sup}\{|\zeta(a)|;\, a \in A\}$. Si $p_{i+1} = p_i$, on pose $w_i = \varnothing$. De même, si $p_1 < m$, on pose $w_0 = u[p_1, m[$ et $w_0 = \varnothing$ si $p_1 = m$; on a encore $|w_0| < S$. En posant $\zeta(\varnothing) = \varnothing$ et $h(\varnothing) = 1$, on a alors $u[0, m[= \zeta^{q-1}(w_{q-1}) \cdots \zeta^1(w_1) w_0$ d'où

$$\lambda^{|\zeta^n(u[0,m[)|} = \lambda^{|\zeta^{n+q-1}(w_{q-1})|} \cdots \lambda^{|\zeta^n(w_0)|}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700003679 Published online by Cambridge University Press

et

$$h(u[0, m[) = h(\zeta^{q-1}(w_{q-1})) \cdots h(w_0).$$

Or, par définition de h, $h(\zeta(w)) = h(w)$ pour tout $w \in A^*$, donc

$$h(u[0, m[) = h(w_{q-1}) \cdots h(w_0).$$

D'autre part, pour $0 \le i < q$

$$|\lambda^{|\zeta^{n+i}(w_i)|} - h(w_i)| \le Cr^{n+i}S.$$

Finalement,

$$|\lambda^{|\zeta^n(u[0,m[)|} - h(u[0, m[)| \le \sum_i Cr^{n+i}S \le Cr^nS/(1-r),$$

ce qui est le résultat cherché.

(4.2) Proposition 1. *Soit λ un complexe de module 1 tel que, pour toute lettre a, la limite $h(a) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{|\zeta^n(a)|}$ existe, et que l'application h soit un cobord de ζ. Alors λ est une valeur propre du système dynamique (X, T), correspondant à une fonction propre g continue.*

Soit $f: A \mapsto T$ une fonction associée au cobord h, c'est-à-dire telle que, pour tout mot (ab) de 2 lettres de u, on ait $f(b) = f(a)h(a)$. Soit $n > 0$. Pour tout $x \in X$, soit $r_n(x)$ le plus petit entier ≥ 0 tel que $T^{r_n(x)}x$ appartienne à $\zeta^n(X)$. Comme $\zeta^n(X)$ est ouvert et fermé dans X, la fonction r_n est continue sur X.

Pour $a \in A$, notons $[a]$ le cylindre $\{x \in X; x_0 = a\}$. Quand a parcourt A, les ensembles $[a]$ forment une partition ouverte et fermée de X, et les ensembles $\zeta^n([a])$ forment une partition ouverte et fermée de $\zeta^n(X)$. Posons:

$$g_n(x) = \lambda^{-r_n(x)}f(a) \qquad \text{si } T^{r_n(x)}x \in \zeta^n([a]).$$

La fonction g_n est continue sur X. Soit $p > 0$, et $x = T^pu$. $T^{r_n(x)+p}u$ appartient à $\zeta^n(X)$; d'après lemme 2, $r_n(x)+p$ appartient à E_n et il existe $q \ge 0$ avec

$$T^{r_n(x)+p}u = \zeta^n(T^qu) \quad \text{et} \quad r_n(x)+p = |\zeta^n(u[0, q[)|.$$

Alors $T^{r_n(x)}x \in \zeta^n([u_q])$ donc

$$g_n(x) = f(u_q)\lambda^{-r_n(x)} = f(u_0)h(u[0, q[)\lambda^{-r_n(x)}$$

D'autre part, $g_n(u) = f(u_0)$, d'où:

$$|g_n(T^pu) - \lambda^p g_n(u)| = |h(u[0, q[) - \lambda^{p+r_n(x)}| = |h(u[0, q[) - \lambda^{|\zeta^n(u[0, q[)|}| \le Br^n,$$

d'après le lemme 5.

Soient n et m deux entiers. Pour tout $p \ge 0$, $|g_n(T^pu) - g_m(T^pu)| \le B(r^n + r^m)$; par densité de la suite (T^pu) dans X, la suite (g_n) converge uniformément vers une fonction continue g sur X. Pour tout p, $g(T^pu) = \lambda^p g(u)$ et, par densité, $g(Tx) = \lambda g(x)$ pour tout $x \in X$, ce qu'il fallait démontrer.

5. *Fonctions propres mesurables*

On démontre ici la deuxième partie du théorème, en prouvant que toute valeur propre du système (X, T, μ) vérifie les conditions imposées.

Fixons d'abord quelques notations. La matrice M de ζ est primitive car la substitution ζ est primitive. On notera θ la valeur propre de Perron–Frobenius de

M. On sait qu'il existe une constante $P > 0$ telle que $P\theta^n < |\zeta^n(a)|$ pour toute lettre a et tout $n > 0$.

Pour $w = (w_0 \cdots w_p) \in A^*$, on notera $[w]$ le cylindre défini par w, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in X$ tel que $x[0, p[= w$.

(5.1) *Propriétés métriques.* On a vu qu'il existe une partie D de X, dénombrable et donc négligeable, telle que T soit un homéomorphisme de $X \backslash D$; en particulier, T est un isomorphisme au sens métrique.

Pour $n > 0$, notons T_n la transformation induite par T sur $\zeta^n(X)$. D'après le lemme 3, appliqué à ζ^n,

$$T_n \zeta^n(x) = T^{|\zeta^n(x_0)|} \zeta^n(x) = \zeta^n(Tx),$$

pour tout $x \in X$. ζ^n est donc un isomorphisme du système (X, T) sur $(\zeta^n(X), T_n)$ et, en particulier, ce dernier est uniquement ergodique. La restriction de μ à $\zeta^n(X)$, non nulle par minimalité, est invariante par T_n, ainsi que la mesure image $\zeta^n(\mu)$: ces deux mesures sont proportionnelles et il est facile de voir (cf. **[4]**) que le coefficient de proportionnalité est θ. Ainsi, pour toute partie Y mesurable de X, $\mu(\zeta^n(Y)) = \theta^{-n}\mu(Y)$.

(5.2) Pour $n > 0$, notons Σ_n l'ensemble des couples (a, p), où a est une lettre et p un entier avec $0 \leq p < |\zeta^n(a)|$. Soit $\mathscr{P}_n$ la famille des ensembles $T^p\zeta^n([a])$ où (a, p) parcourt Σ_n.

$\mathscr{P}_n$ est un recourvrement de X car la réunion de ces ensembles est un fermé qui contient $T^k u$ pour tout $k \geq 0$. Soient (a, p) et (b, q) dans Σ_n, avec $p \geq q$, et supposons que

$$T^p\zeta^n([a]) \cap T^q\zeta^n([b]) \cap (X \backslash D) \neq \varnothing.$$

Alors, $T^{p-q}\zeta^n([a]) \cap \zeta^n([b]) \neq \varnothing$; soit $x \in X$ vec $x_0 = a$ et $T^{p-q}\zeta^n(x) \in \zeta^n([b])$. Le plus petit entier $k > 0$ tel que $T^k\zeta^n(x)$ appartient à $\zeta^n(X)$ est, d'après le lemme 3, $k = |\zeta^n(a)|$, donc $k > p - q$ et $p = q$. ζ^n étant injective, $x \in [b]$, d'où $a = b$. Ainsi, l'intersection de 2 éléments de $\mathscr{P}_n$ correspondant à des éléments distincts de Σ_n est incluse dans l'ensemble négligeable D et $\mathscr{P}_n$ est une partition de X au sens métrique.

Pour toute fonction $g \in L^2(\mu)$, notons $\mathscr{E}_n g$ l'espérance conditionnelle de g sachant la tribu $\mathscr{B}_n$ engendrée par $\mathscr{P}_n$.

Lemme 6. *Pour toute fonction $g \in L^1(\mu)$, la suite $(\mathscr{E}_n g)$ converge vers g dans $L^1(\mu)$.*

On peut se restreindre à montrer cette propriété dans le cas où g est la fonction indicatrice d'un cylindre $[w]$. Notons $k = |w|$.

Soient $n > 0$, $(a, p) \in \Sigma_n$ et $Y = T^p\zeta^n([a])$. Si $p \leq |\zeta^n(a)| - k$ et si $(\zeta^n(a))[p, p+k[= w$, Y est inclus dans $[w]$ et $\mathscr{E}_n g = g$ sur Y; $p \leq |\zeta^n(a)| - k$ et $(\zeta^n(a))[p, p+k[\neq w$, $Y \cap [w] = \varnothing$ et $\mathscr{E}_n g = 0 = g$ sur Y. Les seuls ensembles de $\mathscr{P}_n$ où $\mathscr{E}_n g$ peut êntre différente de g correspondent donc à des éléments (a, p) de Σ_n tels que $|\zeta^n(a)| - k < p < |\zeta^n(a)|$; s étant le nombre de lettres de A, il y a au plus $s(k-1)$ ensembles de ce type; la mesure de chacun d'eux est majorée par $\mu(\zeta^n(X)) = \theta^{-n}$, et finalement

$$\|g - \mathscr{E}_n g\|_{L^1(\mu)} \leq (k-1)s\theta^{-n}.$$

(5.3) PROPOSITION 2. *Soit g une fonction propre du système* (X, T, μ), *correspondant à la valeur propre* λ, *et soit p la période des initiales définite en* (2.1). *Pour toute lettre a, la limite*

$$h(a) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{|\zeta^{pn}(a)|}$$

existe, et h est un cobord de ζ.

Quitte à remplacer ζ par ζ^p, on peut supposer que la période des initiales de ζ est 1. g a un module constant et on peut supposer que $|g| = 1$ partout.

Pour $n > 0$, notons $g_n = \mathscr{E}_n g$; pour toute lettre a, g_n est constante sur $\zeta^n([a])$; notons $d_n(a)$ cette constante.

Soit a une lettre. Pour $n > 0$ et $0 \le p < |\zeta^n(a)|$, g_n est constante et égale à $\lambda^p d_n(a)$ sur $T^p\zeta^n([a])$; alors, pour tout $n > 0$,

$$\int |g - g_n| \, d\mu = \sum_{0\le p<|\zeta^n(a)|} \int_{T^p\zeta^n([a])} |g - g_n| \, d\mu$$
$$= |\zeta^n(a)| \int_{\zeta^n([a])} |g - d_n(a)| \, d\mu \ge P\theta^n \int_{\zeta^n([a])} |g - d_n(a)| \, d\mu.$$

Comme la suite (g_n) converge vers g dans $L^1(\mu)$, on obtient:

$$\text{Pour tout } a \in A,\ \theta^n \int_{\zeta^n([a])} |g - d_n(a)| \, d\mu \text{ tend vers } 0. \tag{1}$$

En particulier, comme $|g| = 1$, que $|d_n(a)| \le 1$ et que $\mu(\zeta^n([a])) = \theta^{-n}\mu([a])$, on a:

$$\text{Pour tout } a \in A,\ \lim_{n\to\infty} |d_n(a)| = 1. \tag{2}$$

Soient a une lettre et b la première lettre de $\zeta(a)$. $\zeta([a])$ est inclus dans $[b]$, donc $\zeta^{n+1}([a]) \subset \zeta^n([b])$ pour tout $n > 0$. Alors, pour tout $n > 0$,

$$\mu([a]|d_{n+1}(a) - d_n(b)| = \theta^{n+1} \int_{\zeta^{n+1}([a])} |g_n - g_{n+1}| \, d\mu$$
$$\le \theta^{n+1}\left(\int_{\zeta^{n+1}([a])} |g_{n+1} - g| \, d\mu + \int_{\zeta^n([b])} |g_n - g| \, d\mu\right)$$

qui tend vers 0 d'après (1). D'après (2), on obtient:

Si $a \in A$, et si b est la première lettre de $\zeta(a)$,

$$\lim_{n\to\infty} d_{n+1}(a)/d_n(b) = 1. \tag{3}$$

Soit a une lettre. Posons $a_0 = a$ et, pour tout $i \ge 0$, soit a_{i+1} la première lettre de $\zeta(a_i)$. Comme la période des initiales de ζ est 1, il existe k tel que $a_k = a_{k+1}$. D'après (3)

$$\lim_{n\to\infty} d_{n+k}(a)/d_n(a_k) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} d_{n+k+1}(a)/d_n(a_{k+1}) = 1.$$

Par conséquent,

$$\text{Pour tout } a \in A,\ \lim_{n\to\infty} d_{n+1}(a)/d_n(a) = 1. \tag{4}$$

Soient a et b deux lettres telles que $w = (ab)$ soit un mot de u. Alors, $[w] \subset [a]$, et $T[w] \subset [b]$. Soit $n > 0$; notons $k = |\zeta^n(a)|$. On a $\zeta^n([w]) \subset \zeta^n([a])$ et $T^k\zeta^n([w]) \subset$

$\zeta^n([b])$. D'une part,

$$\int_{\zeta^n([w])} |g-\lambda^{-k}d_n(b)|\,d\mu = \int_{T^k\zeta^n([w])} |g-d_n(b)|\,d\mu$$
$$\leq \int_{\zeta^n([b])} |g-d_n(b)|\,d\mu.$$

D'autre part,

$$\int_{\zeta^n([w])} |g-d_n(a)|\,d\mu \leq \int_{\zeta^n([a])} |g-d_n(a)|\,d\mu.$$

Par minimalité, $\mu([w])\neq 0$; $\mu(\zeta^n([w]))=\theta^{-n}\mu([w])$, donc d'après (1),

$$\lim_{n\to\infty} |d_n(b)-\lambda^{|\zeta^n(a)|}d_n(a)|=0.$$

Finalement, d'après (2), si a et b sont deux lettres telles que (ab) soit un mot de u,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{|\zeta^n(a)|}d_n(a)/d_n(b)=1. \tag{5}$$

Pour toute lettre a, il existe une lettre b telle que (ab) soit un mot de u. Donc, d'après (5) et (4),

$$\text{Pour toute lettre } a,\ \lambda^{|\zeta^{n+1}(a)|-|\zeta^n(a)|}=1. \tag{6}$$

Soit $t\in\mathbb{R}$ avec $\lambda=e^{2\pi i t}$. M désignant toujours la matrice de ζ, et e le point de $\mathbb{R}^s$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1, la propriété (6) signifie que la suite $(\tilde{M}^{n+1}te-\tilde{M}^nte)$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$; d'après le lemme 1, la suite $(\tilde{M}^nte)$ converge modulo $\mathbb{Z}^s$, donc:

$$\text{Pour toute lettre } a, \text{ la limite } h(a)=\lim_{n\to\infty}\lambda^{|\zeta^n(a)|} \text{ existe.} \tag{7}$$

Il reste à prouver que h est un cobord de ζ. D'après (5) et (7), la limite $\lim_{n\to\infty} d_n(a)/d_n(b)$ existe si (ab) est un mot de u; cette limite existe donc pour tout couple (ab) de lettres. Pour toute lettre a, posons $f(a)=\lim_{n\to\infty} d_n(a)/d_n(0)$. D'après (5), si a et b sont deux lettres telles que (ab) soit un mot de u, $h(a)f(a)=f(b)$, ce qui prouve que h est un cobord de ζ, et qui achève la démonstration de la proposition 2. Le théorème se déduit alors immédiatement de celle-ci et de la proposition 1.

6. *Exemples*

(6.1) Le système dynamique défini par une substitution peut être faiblement mélangeant, comme le montre l'exemple suivant.

Soit ζ la substitution définie sur l'alphabet $A=\{0,1\}$ par:

$$\zeta(0)=(01010)$$
$$\zeta(1)=(011).$$

Cette substitution vérifie les hypothèses du théorème (son indice de reconnaissabilité est 4), sa période des initiales est 1, et son seul cobord est la constante 1. D'autre part, pour tout $n>0$, $2|\zeta^n(1)|-|\zeta^n(0)|=1$. D'après le théorème, le seule valeur propre du système défini par cette substitution est 1, et ce système est faiblement mélangeant.

https://doi.org/10.1017/S0143385700003679 Published online by Cambridge University Press

(6.2) Des considérations algébriques permettent parfois de préciser le résultat du théorème. On donne ici 2 exemples, sans démonstration, pour illustrer la diversité des situations possibles. Désormais, ζ est une substitution sur l'alphabet $A=\{0, 1, \ldots s-1\}$, vérifiant les hypothèses du théorème, et n'admettant comme cobord que la constante 1. Comme au (2.3), M désigne la matrice de ζ; θ désigne la valeur propre de Perron-Frobenius de M.

Supposons d'abord que θ est la seule valeur propre de M de module ≥ 1. Il existe alors, pour toute lettre $a \in A$, un réel $q_a > 0$ tel que

$$\text{Pour tous } a, b \in A, \lim_{n\to+\infty} M^n_{ab} - \theta^n \mu[a] q_b = 0.$$

On en déduit que, pour toute lettre a, $\exp(2\pi i\mu[a])$ est une valeur propre du système dynamique défini par ζ.

Si de plus le déterminant de M est non-nul, les réels $\mu[a]$ sont irrationnels, et l'ensemble $\{\mu[a]; a > 0\}$ est rationnellement indépendant. Enfin, si le déterminant de M est ± 1, le groupe des valeurs propres du système dynamique défini par ζ est engendré par $\{\exp(2\pi i\mu[a]); a \in A\}$, et ces valeurs propres sont toutes irrationnelles.

(6.3) A l'opposé, dans certains cas les valeurs propres sont toutes rationnelles.

Soit $P(X)$ le polynôme minimal de θ, c'est à dire le polynôme unitaire à coefficients entiers de plus petit degré qui s'annule en θ. Supposons que le nombre de racines de $P(X)$ de module ≥ 1 soit strictement supèrieur au nombre de racines de $P(X)$ de module < 1. Cette hypothèse est vérifiée en particulier si θ est un entier, et donc si la substitution ζ est de longueur constante. Alors toutes les valeurs propres du système dynamique défini par ζ sont rationnelles: pour que $\lambda = \exp(2\pi i t)$ soit valeur propre, il faut et il suffit qu'il existe n tel que:

$$\text{pour toute lettre } a,\ t[\zeta^n(a)] \text{ est un entier.}$$

RÉFÉRENCES

[1] F. M. Dekking. The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length. *Z. Wahr. Verw. Geb.* **41** (1978), 221-239.

[2] W. H. Gottschalk. Substitution minimal sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **109** (1963), 467-491.

[3] J. C. Martin. Minimal flows arising from substitutions of non-constant length. *Math. Systems Th.* **7** (1973), 73-82.

[4] M. Queffelec. Contribution à l'étude spectrale des suites arithmétiques. Thèse, Université de Paris-Nord (1984).