Can. J. Math., Vol. XXV, No. 1, 1973, pp. 164–177

L'ENVELOPPE DE TRANSLATIONS D'UN DEMI-TREILLIS DE GROUPES

MARIO PETRICH

1. Introduction et sommaire. L'enveloppe de translations d'un demi-groupe présente un intérêt particulier pour les deux raisons suivantes : d'une part, elle apparaît d'une façon naturelle dans la construction des extensions idéales des demi-groupes, et d'autre part, elle est souvent utilisée pour des caractérisations abstraites des demi-groupes. Afin de l'appliquer aux problèmes particuliers, il est important de fournir des constructions qui, pour un demi-groupe donné sous une forme ou une autre, soient aussi explicites que possible. Un exemple d'une telle construction est celle de l'enveloppe de translations d'un demi-groupe de matrices de Rees (voir [**4**]) et ses nombreuses applications [**5** ; **6** ; **7** ; **8**]. Pour les demi-groupes appartenant à une classe plus large et dont la structure n'est pas connue en détails, il n'est pas possible de trouver une construction explicite, mais on peut au moins espérer déterminer si, par exemple, l'enveloppe de translations reste dans la même classe de demi-groupes, et d'en établir autant de propriétés que possible. Un théorème de Ponizovski donne un exemple de cette situation (Ponizovski [**10**]) : il affirme que l'enveloppe de translations d'un demi-groupe inverse est un demi-groupe inverse.

Nous rencontrerons ici des exemples des deux espèces. Dans le paragraphe 3, pour un demi-treillis de groupes donné sous la forme de la construction de Clifford (voir [**1**, Theorem 4.11]), nous construisons son enveloppe de translations par un procédé qui généralise la construction de la limite inverse d'un ensemble filtrant inférieurement de groupes, ce qui donne un exemple du premier type mentionné ci-dessus. Dans le paragraphe 4, nous traitons le cas particulier d'un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe, et nous montrons que son enveloppe de translation a la même propriété. Le paragraphe 5 fournit un exemple du deuxième type évoqué ci-dessus : nous étudions l'enveloppe de translation d'un demi-groupe commutatif séparatif. Dans tous les cas considérés, nous immergeons de façon dense les demi-groupes étudiés dans certains demi-groupes ayant une structure plus simple. Cela ajoute de nouveaux exemples d'immersions denses des demi-groupes réguliers.

2. Rappel des définitions. Soit S un demi-groupe, et soient x et y des éléments quelconques de S. Une application λ de S dans lui-même, écrite à gauche, est une *translation à gauche* de S, si $\lambda(xy) = (\lambda x)y$; de façon duale,

Reçu le 29 novembre, 1971 et en revu forme, le 16 juin, 1972.

ρ est une *translation à droite* de S, si $(xy)\rho = x(y\rho)$; la paire (λ, ρ) est *liée*, si $x(\lambda y) = (x\rho)y$. Les translations à gauche forment un demi-groupe $\Lambda(S)$ relativement à la composition des applications écrites à gauche ; de façon duale, les translations à droite forment un demi-groupe $\mathrm{P}(S)$ pour la composition des applications écrites à droite ; le sous-demi-groupe du produit direct $\Lambda(S) \times \mathrm{P}(S)$, qui est constitué des paires de translations liées, est l'*enveloppe de translations* de S, notée $\Omega(S)$. Pour un élément a de S, les applications λ_a et ρ_a, définies par $\lambda_a x = ax$, $x\rho_a = xa$, sont des translations *internes* à gauche et à droite, respectivement, engendrées par l'élément a. L'ensemble $\Pi(S) = \{(\lambda_a, \rho_a)|a \in S\}$ est un idéal de $\Omega(S)$, appelé la *partie interne* de $\Omega(S)$. Le groupe des unités de $\Omega(S)$ sera noté $\Sigma(S)$, le demi-groupe des translations à gauche internes par $\Gamma(S)$.

Si I est un idéal de S, on appelle S une *extension* (*idéale*) de I ; cette extension est dite *dense*, si l'égalité est la seule congruence sur S dont la restriction à I est l'égalité sur I ; si, de plus, S est une extension maximale (pour l'ordre de l'inclusion des ensembles) de I, alors I est appelé un *idéal densement immergé* de S. Un sous-demi-groupe A de S est un *sous-demi-groupe densement immergé*, si A est un idéal densement immergé de son idéalisateur $i_S(A)$ dans S. Remarquons que $i_S(A) = \{s \in S|as,\ sa \in A \text{ pour tout } a \in A\}$. Un isomorphisme φ d'un demi-groupe B sur un demi-groupe A densement immergé dans un demi-groupe S est une *immersion dense* de B dans S, et on dit que B *peut être densement immergé* dans S.

Pour toutes les définitions et notations non expliquées, nous renvoyons le lecteur au mémoire [**1**]. Pour les extensions idéales, on peut consulter [**3**], et pour les idéaux densement immergés [**2**].

3. Demi-treillis de groupes. Selon la construction de Clifford [**1**, Theorem 4.11], un tel demi-groupe peut être donné par un système de groupes $\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$, deux à deux disjoints, indexés par un demi-treillis Y et un système d'homomorphismes $\varphi_{\alpha,\beta} : G_\alpha \to G_\beta$, pour tout couple $\alpha \geqq \beta$ d'éléments de Y, satisfaisant aux conditions : $\varphi_{\alpha,\alpha}$ est l'application identique, $\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}$ dès que $\alpha > \beta > \gamma$, et dont la multiplication est donnée par

$$a * b = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta}), \quad \text{si} \quad a \in G_\alpha,\ b \in G_\beta.$$

Notons $S = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$, et désignons par e_α l'élément unité de G_α.

Soit Y un demi-treillis. Le demi-treillis des idéaux de Y (demi-groupe pour l'opération intersection ensembliste) sera noté $\mathscr{I}_Y$. Un idéal I de Y est un *idéal rétracté*, s'il existe un homomorphisme φ de Y sur I qui laisse les éléments de I invariants ; leur ensemble sera noté $\mathscr{R}_Y$. L'idéal principal engendré par un élément α de Y sera noté (α), et leur ensemble sera noté $\mathscr{P}_Y$.

Soit $S = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ un demi-treillis de groupes ; pour tout $I \in \mathscr{I}_Y$, posons

$$\operatorname{inv\,lim}\{G_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{(g_\alpha) \in \prod_{\alpha\in I} G_\alpha | g_\alpha = g_\beta\varphi_{\beta,\alpha} \text{ si } \alpha < \beta\},$$

avec la multiplication par coordonnées, et posons

$$\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y} = \bigcup_{I\in\mathscr{I}_Y} \operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in I},$$

avec la multiplication

$$(a_\alpha)_{\alpha\in I}(b_\beta)_{\beta\in J} = (a_\gamma b_\gamma)_{\gamma\in I\cap J}.$$

$\operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$ sera dite la *limite inverse* de $S = [Y\,;\,G_\alpha,\,\varphi_{\alpha,\beta}]$.

Le résultat principal de ce paragraphe exprime le fait que l'enveloppe de translations de S est isomorphe à un sous-demi-groupe, que nous caractériserons, de $\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$. Toutes les notations introduites sont fixées pour tout le paragraphe.

LEMME 1. *Pour tout* $I \in \mathscr{I}_Y$, $\operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *est un groupe, et*

$$\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y} \cong [\mathscr{I}_Y\,;\,\operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in I},\,\psi_{I,J}],$$

où, pour tout $I \supseteq J$,

$$(a_\alpha)_{\alpha\in I}\psi_{I,J} = (a_\alpha)_{\alpha\in J}.$$

Démonstration. La première assertion est bien connue. Pour la deuxième, il suffit de remarquer que la construction de $\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$ entraîne immédiatement que c'est un demi-groupe demi-treillis $\mathscr{I}_Y$ de groupes $\operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$, dont la multiplication est déterminée par les homomorphismes $\psi_{I,J}$.

LEMME 2. *L'ensemble des translations à gauche (ou à droite) d'un demi-treillis Y coïncide avec l'ensemble des endomorphismes de Y sur ses idéaux. Un tel idéal I est caractérisé par la propriété suivante : l'intersection de I avec tout idéal principal de Y est un idéal principal de Y. De plus, I détermine la translation (endomorphisme) λ définie par la relation $I \cap (\alpha) = (\lambda\alpha)$ pour tout $\alpha \in Y$, et la correspondance $\lambda \to I$ est un isomorphisme de $\Lambda(Y)$ sur $\mathscr{R}_Y$.*

Démonstration. Voir [**9**, Propositions 1 et 3].

La propriété évoquée peut donc être prise comme définition d'un idéal rétracté de Y. Les idéaux principaux en sont un cas particulier.

THÉORÈME 1. *Notons* $A = \operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$. *La fonction σ, définie sur $\Lambda(S)$ par*

$$\sigma : \lambda \to (\lambda e_\alpha)_{\alpha\in I}, \quad \text{où} \quad I = \{\alpha \in Y | \lambda S \cap G_\alpha \neq \emptyset\}, \tag{1}$$

est un isomorphisme de $\Lambda(S)$ dans A. De plus,

$$\Gamma(S)\sigma = \{(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in A | I \in \mathscr{P}_Y\}, \tag{2}$$

$$\Lambda(S)\sigma = \{(a_\alpha)_{\alpha\in I} \in A | I \in \mathscr{R}_Y\} = i_A(\Gamma(S)\sigma). \tag{3}$$

Démonstration. Soient x et y deux éléments de G_α. Si $\lambda x \in G_\gamma$ et $\lambda y \in G_\delta$, les égalités $\lambda x = \lambda(yy^{-1}x) = (\lambda y)(y^{-1}x)$ entraînent $\gamma \leqq \delta$; par symétrie, on a $\delta \leqq \gamma$, et par suite $\gamma = \delta$. Notant $x \to \bar{x}$ l'homomorphisme canonique de S

sur Y, nous pouvons définir une fonction $\bar{\lambda}$ sur Y par $\bar{\lambda}\bar{x} = \overline{\lambda x}$. En particulier,

$$\bar{\lambda}(\bar{x}\bar{y}) = \bar{\lambda}\bar{x}\bar{y} = \overline{\lambda(xy)} = \overline{(\lambda x)y} = \overline{\lambda x}\bar{y} = (\bar{\lambda}\bar{x})\bar{y},$$

ce qui montre que $\bar{\lambda} \in \Lambda(Y)$. D'après le Lemme 2, $\bar{\lambda}$ est complètement déterminée par l'idéal rétracté $I = \bar{\lambda}Y$, et, de plus, I coïncide avec I définie dans (1), et la restriction $\bar{\lambda}|I$ est la fonction identité. Il en résulte que $\lambda e_\alpha \in G_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$, et si $\alpha < \beta$, on a

$$\lambda e_\alpha = \lambda(e_\beta * e_\alpha) = (\lambda e_\beta) * e_\alpha = (\lambda e_\beta)\varphi_{\beta,\alpha},$$

ce qui montre que σ est une fonction de S dans A.

Soient $\lambda,\mu \in \Lambda(S)$. Avec les notations ci-dessus, on a $\bar{\lambda},\bar{\mu} \in \Lambda(Y)$ et $(\bar{\lambda}\bar{\mu})Y = \bar{\lambda}Y \cap \bar{\mu}Y$. En posant $\lambda\sigma = (c_\alpha)_{\alpha\in I}$ et $\mu\sigma = (d_\alpha)_{\alpha\in J}$, et supposant que $e_\alpha \in \lambda\mu S$, on en deduit

$$(\lambda\mu)e_\alpha = \lambda(\mu e_\alpha) = \lambda d_\alpha = \lambda(e_\alpha * d_\alpha) = (\lambda e_\alpha) * d_\alpha = c_\alpha * d_\alpha,$$

ce qui signifie que σ est un homomorphisme.

Soit $\lambda\sigma = \mu\sigma = (c_\alpha)_{\alpha\in I}$, et soit $a \in G_\alpha$. En vertu du Lemme 2, on a $I \cap (\alpha) = (\bar{\lambda}\alpha) = (\bar{\mu}\alpha)$ pour tout $\alpha \in Y$. Donc

$$\begin{aligned} \lambda a &= \lambda(e_\alpha * a) = (\lambda e_\alpha) * a = (\lambda e_{\bar{\lambda}\alpha}) * a \\ &= (\mu e_{\bar{\mu}\alpha}) * a = (\mu e_\alpha) * a = \mu(e_\alpha * a) = \mu a, \end{aligned}$$

ce qui montre que σ est une fonction injective.

Pour $a \in G_\alpha$, on voit sans peine que $\bar{\lambda}_a Y = (\alpha)$, idéal principal engendré par α, ce qui entraîne $\lambda_a\sigma = (c_\beta)_{\beta\in(\alpha)}$. Inversement, si $(a_\beta)_{\beta\in(\alpha)} \in A$, on a, pour tout $\beta \leqq \alpha$,

$$a_\beta = a_\alpha\varphi_{\alpha,\beta} = a_\alpha * e_\beta = a_\alpha e_\alpha * e_\beta = (\lambda_{a_\alpha}e_\alpha) * e_\beta = \lambda_{a_\alpha}(e_\alpha * e_\beta) = \lambda_{a_\alpha}e_\beta,$$

ce qui implique que $\lambda_{a_\alpha}\sigma = (a_\beta)_{\beta\in(\alpha)}$. Ceci établit la formule (2).

Nous avons remarqué ci-dessus que, pour $\lambda\sigma = (a_\alpha)_{\alpha\in I}$, on a toujours $I \in \mathscr{R}_Y$, ce qui montre que le premier ensemble de (3) est contenu dans le second. Soient $(a_\gamma)_{\gamma\in I} \in A$ avec $I \in \mathscr{R}_Y$, et $(b_\beta)_{\beta\in(\alpha)} \in \Gamma(S)\sigma$. On obtient

$$(a_\gamma)_{\gamma\in I}(b_\beta)_{\beta\in(\alpha)} = (a_\delta b_\delta)_{\delta\in I\cap(\alpha)};$$

or, d'autre part, en vertu du Lemme 2, on a $I \cap (\alpha) = (\epsilon)$ pour un ϵ dans Y, ce qui entraîne $(a_\delta b_\delta)_{\delta\in(\epsilon)} \in \Gamma(S)\sigma$, d'après (2). On voit de la même façon que le produit $(b_\beta)_{\beta\in(\alpha)}(a_\gamma)_{\gamma\in I}$ est aussi contenu dans $\Gamma(S)\sigma$. Par conséquent $(a_\gamma)_{\gamma\in I} \in i_A(\Gamma(S)\sigma)$, et le second ensemble de (3) est contenu dans le troisième.

Soit enfin $(c_\gamma)_{\gamma\in I} \in i_A(\Gamma(S)\sigma)$. Pour tout $\alpha \in Y$, le produit $(c_\gamma)_{\gamma\in I}(e_\beta)_{\beta\in(\alpha)}$ est contenu dans $\Gamma(S)\sigma$, et par conséquent $I \cap (\alpha)$ est un idéal principal de Y, et le Lemme 2 implique que $I \in \mathscr{R}_Y$. Définissons une fonction λ sur S par

$$\lambda a = c_\gamma * a, \quad \text{si} \quad a \in G_\alpha \quad \text{et} \quad I \cap (\alpha) = (\gamma). \tag{4}$$

Il est évident que la fonction $\bar{\lambda}$, définie ci-dessus pour $\lambda \in \Lambda(S)$, peut s'appliquer ici aussi, et donne $I \cap (\alpha) = (\bar{\lambda}\alpha)$. On en déduit que $\lambda a = c_{\bar{\lambda}\alpha} * a$ si $a \in G_\alpha$. Par conséquent, pour tout $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$, on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda a) * b &= (c_{\bar{\lambda}\alpha} * a) * b = (c_{\bar{\lambda}\alpha}\varphi_{\bar{\lambda}\alpha,(\bar{\lambda}\alpha)\beta})(a\varphi_{\alpha,(\bar{\lambda}\alpha)\beta})(b\varphi_{\beta,(\bar{\lambda}\alpha)\beta}) \\ &= c_{\bar{\lambda}(\alpha\beta)}[(a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta})]\varphi_{\alpha\beta,\bar{\lambda}(\alpha\beta)} = \lambda(a * b),\end{aligned}$$

ce qui implique $\lambda \in \Lambda(S)$. D'après (4), il est clair que $\lambda\sigma = (c_\gamma)_{\gamma \in I}$, et on a bien $i_A(\Gamma(S)\sigma) \subseteq \Lambda(S)\sigma$. Ceci démontre la formule (3), et achève la démonstration du théorème.

Nous pouvons maintenant énoncer un des principaux résultats de ce travail.

THÉORÈME 2. *Soit $S = [Y\,;\, G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ un demi-treillis de groupes. La fonction χ, définie sur S par*

$$\chi : a \to (a\varphi_{\alpha,\beta})_{\beta \leqq \alpha}, \quad si \quad a \in G_\alpha, \alpha \in Y,$$

est une immersion dense de S dans $A = \operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$. De plus,

$$\Omega(S) \cong \mathrm{P}(S) \cong \Lambda(S) \cong [\mathscr{R}_Y\,;\, \operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}, \psi_{I,J}], \tag{5}$$

où $(a_\alpha)_{\alpha \in I}\psi_{I,J} = (a_\alpha)_{\alpha \in J}$ si $I \supseteq J$, et

$$S\chi = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathscr{P}_Y\}, \ \Sigma(S) \cong \operatorname{inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}. \tag{6}$$

Démonstration. Montrons d'abord que, pour toute translation à gauche λ de S, il existe une translation à droite ρ de S liée à λ. Soit $\lambda \in \Lambda(S)$, et soit $\lambda\sigma = (c_\gamma)_{\gamma \in I}$ avec la notation du théorème précédent, de telle façon que λ peut être donnée sous la forme (4). Définissons ρ par

$$a\rho = a * c_\gamma, \quad \text{si} \quad a \in G_\alpha \quad \text{et} \quad I \cap (\alpha) = (\gamma).$$

Comme pour λ, on montre ici que ρ est une translation à droite de S. De plus, pour $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$, et $I \cap (\alpha) = (\gamma)$, $I \cap (\beta) = (\delta)$, on obtient

$$\begin{aligned}(\alpha\delta) &= (\alpha) \cap (\delta) = (\alpha) \cap (I \cap (\beta)) \\ &= (I \cap (\alpha)) \cap (\beta) = (\gamma) \cap (\beta) = (\gamma\beta),\end{aligned}$$

ce qui implique $\alpha\delta = \gamma\beta$. On en déduit que $c_\delta\varphi_{\delta,\alpha\delta} = c_\gamma\varphi_{\gamma,\gamma\beta}$, d'où

$$\begin{aligned}a * (\lambda b) &= a * c_\delta * b = (a\varphi_{\alpha,\alpha\delta})(c_\delta\varphi_{\delta,\alpha\delta})(b\varphi_{\beta,\alpha\delta}) \\ &= (a\varphi_{\alpha,\gamma\beta})(c_\gamma\varphi_{\gamma,\gamma\beta})(b\varphi_{\beta,\gamma\beta}) = a * c_\gamma * b = (a\rho) * b,\end{aligned}$$

c'est-à-dire que λ et ρ sont liées.

Par symétrie, toute translation à droite est liée à une translation à gauche. D'autre part, il est clair que S est un demi-groupe réductif, ce qui entraîne que les projections de $\Omega(S)$ dans $\Lambda(S)$ et dans $\mathrm{P}(S)$ sont des isomorphismes de $\Omega(S)$ sur $\Lambda(S)$ et $\mathrm{P}(S)$, respectivement. Nous avons vu, dans le théorème précédent, que $\Lambda(S)$ est isomorphe à $\{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in A \mid I \in \mathscr{R}_Y\}$; il est facile de voir que ce dernier est isomorphe au dernier demi-groupe de (5). Ceci complète la démonstration de (5).

Si $a \in G_\alpha$, on a, avec la notation du théorème précédent,

$$\lambda_a\sigma = (\lambda_a e_\beta)_{\beta \leqq \alpha} = (a * e_\beta)_{\beta \leqq \alpha} = (a\varphi_{\alpha,\beta})_{\beta \leqq \alpha}.$$

Par conséquent, la fonction χ, dans l'énoncé du théorème, est la composition de l'isomorphisme $\gamma : a \to \lambda_a$ de S sur $\Gamma(S)$ et de σ restreinte à $\Gamma(S)$. Le fait, démontré au début de la démonstration, que la projection de $\Omega(S)$ dans $\Lambda(S)$ est un isomorphisme de $\Omega(S)$ sur $\Lambda(S)$, entraîne que $\Gamma(S)$ est un idéal densement immergé de $\Lambda(S)$, d'après [**2**, 1.3.5]. En vertu de l'isomorphisme σ, $\Gamma(S)\sigma = S\chi$ est un idéal densement immergé de $i_A(S\chi)$, ce qui, par définition, implique que $S\chi$ est un sous-demi-groupe dense de A ; et, par suite, χ est une immersion dense de S dans A.

La première formule de (6) découle du théorème précédent et du fait que $\Gamma(S)\sigma = S\chi$; la dernière formule est, à présent, évidente.

COROLLAIRE. *Si S est un demi-treillis de groupes, $\Omega(S)$ l'est aussi.*

4. Demi-groupes réguliers, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe. Soit S un sous-demi-groupe régulier du produit direct $Y \times G$, où Y est un demi-treillis, et G un groupe, tel que les projections de S dans Y et dans G sont surjectives. Pour tout $\alpha \in Y$, posons

$$G_\alpha = \{g \in G | (\alpha, g) \in S\}.$$

On voit sans peine que la fonction η qui, à tout $\alpha \in Y$, associe l'ensemble G_α, est une fonction antitone du demi-treillis Y dans le treillis $\mathscr{L}(G)$ des sous-groupes de G, et que $\bigcup_{\alpha \in Y} G_\alpha = G$. Posons $\alpha\eta = G_\alpha$; remarquons aussi que

$$S = \{(\alpha, g) \in Y \times G | g \in \alpha\eta\},$$

et notons $S = (Y, \eta, G)$. Il est clair que S est un demi-treillis de groupes, et nous pouvons utiliser les résultats antérieurs concernant l'enveloppe de translations de S. Il faut d'abord noter qu'il suffit de considérer les translations d'un côté seulement, par exemple les translations à gauche.

Soit $\lambda \in \Lambda(S)$; définissons les fonctions τ et θ par la formule

$$\lambda(\alpha, g) = (\tau(\alpha, g), \theta(\alpha, g)) \quad ((\alpha, g) \in S). \tag{7}$$

Pour tout (α, g), $(\beta, h) \in S$, on a

$$[\lambda(\alpha, g)](\beta, h) = (\tau(\alpha, g), \theta(\alpha, g))(\beta, h) = (\tau(\alpha, g)\beta, \theta(\alpha, g)h),$$
$$\lambda[(\alpha, g)(\beta, h)] = \lambda(\alpha\beta, gh) = (\tau(\alpha\beta, gh), \theta(\alpha\beta, gh)),$$

d'où

$$\tau(\alpha, g)\beta = \tau(\alpha\beta, gh) \quad ((\alpha, g), (\beta, h) \in S), \tag{8}$$

$$\theta(\alpha, g)h = \theta(\alpha\beta, gh) \quad ((\alpha, g), (\beta, h) \in S). \tag{9}$$

Si (α, g), $(\alpha, h) \in S$, on a aussi $(\alpha, h^{-1}g) \in S$, et, d'après (8), il vient

$$\tau(\alpha, g) = \tau(\alpha, h(h^{-1}g)) = \tau(\alpha, h)\alpha = \tau(\alpha, h1) = \tau(\alpha, h),$$

où 1 est l'élément unité de G. Nous pouvons donc écrire $\tau(\alpha, g) = \tau\alpha$, et considérer τ comme une application de Y dans lui-même. La formule (8) entraîne de plus que $\tau \in \Lambda(Y)$. Si (α, g), $(\beta, g) \in S$, on a $(\beta, 1) \in S$, et en appliquant (9) aux couples (α, g), $(\beta, 1)$, on obtient $\theta(\alpha, g) = \theta(\alpha\beta, g)$. Par symétrie, on a aussi $\theta(\beta, g) = \theta(\alpha\beta, g)$, d'où $\theta(\alpha, g) = \theta(\beta, g)$. Par conséquent, on peut écrire $\theta(\alpha, g) = \theta g$, et considérer θ comme une application de G dans lui-même. De plus, la formule (9) implique que $\theta \in \Lambda(G)$.

En vertu du Lemme 2, à $\tau \in \Lambda(Y)$ on peut associer l'idéal rétracté $\tau Y = I$ de Y ; en ce qui concerne $\theta \in \Lambda(G)$, on a $\theta = \lambda_a$, où $a = \theta 1$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME 3. *Notons $B = \mathscr{I}_Y \times G$. La fonction ξ, définie sur $\Lambda(S)$ par $\xi : \lambda \rightarrow (I, a)$, où I et a sont définis ci-dessus, est un isomorphisme de $\Lambda(S)$ dans B. De plus,*

$$\Gamma(S)\xi = \{((\alpha), a) \in B | (\alpha, a) \in S\}, \tag{10}$$

$$\Lambda(S)\xi = \{(I, a) \in B | I \in \mathscr{R}_Y, a \in \textstyle\bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta\} = i_B(\Gamma(S)\xi). \tag{11}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la formule (7) peut s'écrire

$$\lambda(\alpha, g) = (\tau\alpha, \theta g) = (\beta, ag) \quad ((\alpha, g) \in S), \tag{12}$$

où $\tau \in \Lambda(Y)$, $\theta \in \Lambda(G)$, et $I \cap (\alpha) = (\beta)$, $a \in G$. Il est clair que ξ est la composition des isomorphismes $\lambda \rightarrow (\tau, \theta) \rightarrow (I, a)$, et est par conséquent un isomorphisme de $\Lambda(S)$ dans B. Pour tout $(\alpha, a), (\beta, g) \in S$, on a $\lambda_{(\alpha,a)}(\beta, g) = (\alpha, a)(\beta, g) = (\alpha\beta, ag) = (\gamma, ag)$, où $(\alpha) \cap (\beta) = (\gamma)$, ce qui, d'après (12), entraîne que $\lambda_{(\alpha,a)}\xi = ((\alpha), a)$; ceci démontre (10).

Soit $\lambda \in \Lambda(S)$, et $\lambda\xi = (I, a)$. Dans la construction de I ci-dessus, nous avons vu que $I = \tau Y$, où $\tau \in \Lambda(Y)$, ce qui, d'après le Lemme 2, entraîne que $I \in \mathscr{R}_Y$. Soit $\alpha \in I$; l'égalité $I = \tau Y$ montre aussi que $\tau\alpha = \alpha$. Rappelons que, dans (12), on a $a = \theta 1$. D'autre part, $(\alpha, 1) \in S$ pour tout $\alpha \in Y$. Il s'ensuit que, pour $\alpha \in I$, l'appartenance de $\lambda(\alpha, 1) = (\tau\alpha, \theta 1)$ à S implique $(\alpha, a) \in S$, c'est-à-dire que $a \in \alpha\eta$. Ceci montre que le premier ensemble de (11) est contenu dans le second.

Considérons $(I, a) \in B$, où $I \in \mathscr{R}_Y$ et $a \in \bigcap_{\gamma \in I} \gamma\eta$, et prenons $((\alpha), g) \in \Gamma(S)\xi$. On a $(I, a)((\alpha), g) = ((\beta), ag)$, où $I \cap (\alpha) = (\beta)$. En vertu de (10), on sait que $(\alpha, g) \in S$, d'où $g \in \alpha\eta$. Puisque $\beta \leqq \alpha$, l'antitonie de η entraîne que $g \in \beta\eta$. D'autre part, $a \in \beta\eta$, parce que $\beta \in I$, et on en déduit que $ag \in \beta\eta$, ce qui implique $(\beta, ag) \in S$. D'après (10), cela donne $((\beta), ag) \in \Gamma(S)\xi$, et par conséquent $(I, a)((\alpha), g) \in \Gamma(S)\xi$. On montre de façon analogue que $((\alpha), g)(I, a) \in \Gamma(S)\xi$. Il en résulte que le second ensemble de (11) est contenu dans le troisième.

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-015-9 Published online by Cambridge University Press

Soit enfin $(I, a) \in i_B(\Gamma(S)\xi)$; définissons une application λ sur S par

$$\lambda(\alpha, g) = (\beta, ag), \quad \text{si} \quad (I, a)((\alpha), g) = ((\beta), ag).$$

En utilisant (12), on vérifie sans difficulté que $\lambda \in \Lambda(S)$ et $\lambda\xi = (I, a)$, ce qui montre que le troisième ensemble de (11) est contenu dans le premier.

Le résultat principal de ce paragraphe est alors le suivant.

THÉORÈME 4. *Soit $S = (Y, \eta, G)$ un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis Y et d'un groupe G. La fonction ψ, définie sur S par*

$$\psi : (\alpha, g) \rightarrow ((\alpha), g),$$

est une immersion dense de S dans le produit direct $\mathcal{I}_Y \times G$. De plus, $\Omega(S)$ est un demi-groupe régulier, produit sous-direct du demi-treillis $\mathcal{R}_Y$ et du groupe G, et

$$\Omega(S) \cong (\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G), \quad \Sigma(S) \cong \bigcap_{\alpha \in Y} \alpha\eta,$$

où $I\bar{\eta} = \bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta$ pour tout $I \in \mathcal{R}_Y$.

Démonstration. La première assertion découle du théorème précédent, de la même manière que la première assertion du Théorème 2 résulte du Théorème 1.

D'après le Théorème 1, $\Omega(S) \cong \Lambda(S)$ est un demi-treillis de groupes. Pour tout $I \in \mathcal{R}_Y$, la formule (11) entraîne que $(I, 1) \in \Lambda(S)\xi$. D'autre part, si $a \in G$, il existe $\alpha \in Y$ tel que $(\alpha, g) \in S$, ce qui, d'après (10), implique que $((\alpha), a) \in \Gamma(S)\xi \subseteq \Lambda(S)\xi$. Il s'ensuit que $\Lambda(S)\xi$ est un demi-groupe régulier, produit sous-direct de $\mathcal{R}_Y$ et G. La construction du début de ce paragraphe est donc applicable à $\Lambda(S)\xi$, et donne $\Lambda(S)\xi = [\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G]$, où $I\bar{\eta} = \bigcap_{\alpha \in I} \alpha\eta$ pour tout $I \in \mathcal{R}_Y$, d'après (11), ce qui implique $\Lambda(S) \cong [\mathcal{R}_Y, \bar{\eta}, G]$.

Le dernier isomorphisme résulte directement de (11) ; en effet, un élément (I, a) de $\Lambda(S)\xi$ est inversible si, et seulement si, $I = Y$.

COROLLAIRE 1. *Pour tout demi-treillis Y, et tout groupe G, on a*

$$\Omega(Y \times G) \cong \mathcal{R}_Y \times G.$$

Démonstration. Le cas $S = Y \times G$, dans la formule (11), donne

$$\Lambda(S)\xi = \mathcal{R}_Y \times G.$$

COROLLAIRE 2. *Si S est un demi-groupe régulier, produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe, $\Omega(S)$ l'est aussi.*

Ce corollaire peut se déduire directement du Théorème 2, si on remarque que, dans le cas où tout homomorphisme $\varphi_{\alpha,\beta}$ est injectif, tout homomorphisme $\psi_{I,J}$ l'est aussi, d'après la propriété suivante : le demi-treillis de groupes $[Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ est produit sous-direct d'un demi-treillis et d'un groupe si, et seulement si, tous les homomorphismes $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont injectifs ; nous ne le démontrerons pas ici.

5. Demi-groupes commutatifs séparatifs. Nous utiliserons d'abord quelques résultats de [**1**, § 4.3]. Soit S un demi-groupe commutatif séparatif ; écrivons S comme réunion de ses composantes archimédiennes S_α avec $\alpha \in Y$. Posons

$$F = \{(a, b) \in S \times S | a, b \in S_\alpha \text{ pour un } \alpha \in Y\},$$

avec la multiplication $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$, et définissons une relation binaire τ dans F par $(a, b)\tau(c, d)$ si, et seulement si, $a, c \in S_\alpha$ pour un $\alpha \in Y$ et $ad = bc$. Alors τ est une congruence sur F, et le demi-groupe quotient $Q = F/\tau$ sera appelé le *demi-groupe des fractions* de S. En effet, notant par $[a, b]$ la classe de τ contenant (a, b), la fonction ω, définie sur S par $a\omega = [a^2, a]$, est une immersion de S dans Q. De plus, $Q \cong [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$, qui est un demi-treillis de groupes, avec le même demi-treillis Y, G_α étant le groupe des fractions de S_α, et avec $\varphi_{\alpha,\beta}$ définie par $[a, b]\varphi_{\alpha,\beta} = [ac, bc]$ pour $[a, b] \in G_\alpha$, $c \in S_\beta$, $\alpha \geqq \beta$. L'objet de ce paragraphe est d'abord de plonger $\Lambda(S)$ dans $\Lambda(Q)$, puis d'appliquer les résultats du paragraphe 3 au demi-groupe Q. Les notations introduites resteront fixées dans le reste de ce travail.

Soit $\lambda \in \Lambda(S)$. Pour tout $a \in S$, montrons par récurrence que $(\lambda a)^n = \lambda^n a^n$. La formule est triviale pour $n = 1$, supposons qu'elle est valable pour n. On obtient

$$(\lambda a)^{n+1} = (\lambda a)(\lambda a)^n = (\lambda a)(\lambda^n a^n) = \lambda[(\lambda^n a^n)a] = \lambda(\lambda^n a^{n+1}) = \lambda^{n+1}a^{n+1}.$$

Soient $a, b \in S_\alpha$, on a $a^n = bx$ et $b^n = ay$ pour certains $x, y \in S$ et un entier positif n qu'on peut supposer plus grand que 1. Par suite,

$$(\lambda a)^n = \lambda^n a^n = \lambda^{n-1}\lambda(bx) = \lambda^{n-1}[(\lambda b)x] = (\lambda b)(\lambda^{n-1}x),$$

et, de la même façon, $(\lambda b)^n = (\lambda a)(\lambda^{n-1}y)$, ce qui entraîne qu'il existe $\beta \in Y$ tel que $\lambda a, \lambda b \in S_\beta$. Il s'ensuit que, pour tout $\alpha \in Y$, il existe $\beta \in Y$ tel que $\lambda S_\alpha \subseteq S_\beta$. En particulier, $(\lambda a)a = \lambda a^2$ entraîne $\beta\alpha = \beta$, d'où $\beta \leqq \alpha$, et par suite $(\lambda a)^2, (\lambda a)b \in S_\beta$. Par conséquent, $[a, b] \in G_\alpha$ implique

$$[(\lambda a)^2, (\lambda a)b] \in G_\beta,$$

ce qui permet de définir la fonction θ ci-dessous.

THÉORÈME 5. *La fonction θ, définie sur $\Lambda(S)$ par $\theta : \lambda \to \bar{\lambda}$, où $\bar{\lambda}[a, b] = [(\lambda a)^2, (\lambda a)b]$ pour tout $[a, b] \in Q$, est un isomorphisme de $\Lambda(S)$ dans $\Lambda(Q)$, avec la propriété $\Lambda(S)\theta = i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \Lambda(S)$, et $[a, b], [c, d] \in Q$. On obtient

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}[a, b])[c, d] &= [(\lambda a)^2, (\lambda a)b][c^2, cd] = [(\lambda a)^2c^2, (\lambda a)bcd] \\ &= [(\lambda(ac))^2, (\lambda(ac))bd] = \bar{\lambda}[ac, bd] = \bar{\lambda}([a, c][b, d]),\end{aligned}$$

ce qui montre que $\bar{\lambda} \in \Lambda(Q)$. Si, de plus, $\varphi \in \Lambda(S)$, on calcule

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}\bar{\varphi}[a, b] &= \bar{\lambda}[(\varphi a)^2, (\varphi a)b] = [(\lambda(\varphi a)^2)^2, (\lambda(\varphi a)^2)(\varphi a)b] \\ &= [(\lambda\varphi a)^2(\varphi a)^2, (\lambda\varphi a)(\varphi a)^2 b] = [(\lambda\varphi a)^2, (\lambda\varphi a)b] = \overline{\lambda\varphi}[a, b],\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-015-9 Published online by Cambridge University Press

où l'avant-dernière égalité se déduit de la remarque suivante : si $a \in S_\alpha$, $\varphi a \in S_\beta$, $\lambda\varphi a \in S_\gamma$, on a $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$, comme nous l'avons vu ci-dessus, ce qui implique, pour tout $c \in S_\beta$,

$$[a, b] = [a(ac), b(ac)] = [(ac)a, (bc)a] = [ac, bc].$$

Par conséquent, θ est un homomorphisme de $\Lambda(S)$ dans $\Lambda(Q)$. Si $\bar{\lambda} = \bar{\varphi}$, on obtient, pour $[a, b] \in G_\alpha$,

$$[(\lambda a)^2, (\lambda a)b] = \bar{\lambda}[a, b] = \bar{\varphi}[a, b] = [(\varphi a)^2, (\varphi a)b],$$

d'où $(\lambda a)^2(\varphi a)b = (\lambda a)b(\varphi a)^2$, où $\lambda a, \varphi a \in S_\beta$ pour un certain $\beta \leqq \alpha$. La simplifiabilité dans S_β entraîne $\lambda a = \varphi a$. Donc $\lambda = \varphi$, et θ est injective.

Comme S est commutatif et réductif, la projection de $\Omega(S)$ dans $\Lambda(S)$ est surjective et injective. Par suite, $\Gamma(S)$ est un idéal de $\Lambda(S)$, ce qui implique l'inclusion $\Lambda(S)\theta \subseteq i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$. Inversement, soit $\varphi \in i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$. Pour tout $a \in S$, il existe un unique $b \in S$ tel que $\varphi\bar{\lambda}_a = \bar{\lambda}_b$, ce qui permet de définir une application de S dans lui-même par la formule $\varphi\bar{\lambda}_a = \bar{\lambda}_{\lambda a}$. Pour tout $a, b \in S$, on a

$$\bar{\lambda}_{(\lambda a)b} = \bar{\lambda}_{\lambda a}\bar{\lambda}_b = \varphi\bar{\lambda}_a\bar{\lambda}_b = \varphi\bar{\lambda}_{ab} = \bar{\lambda}_{\lambda(ab)},$$

ce qui montre que $(\lambda a)b = \lambda(ab)$, c'est-à-dire que $\lambda \in \Lambda(S)$. De plus, pour tout $[a, b] \in Q$, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi[a, b] &= \varphi([a^2, a][b, b^2]) = \varphi\bar{\lambda}_a[b, b^2] = \bar{\lambda}_{\lambda a}[b, b^2] = [(\lambda_{\lambda a}b)^2, (\lambda_{\lambda a}b)b^2]\\ &= [(\lambda a)^2b^2, (\lambda a)b^3] = [(\lambda a)^2, (\lambda a)b] = \bar{\lambda}[a, b],\end{aligned}$$

et $\varphi = \lambda\theta \in \Lambda(\theta)$. Par conséquent $i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta) \subseteq \Lambda(S)\chi$, et l'égalité est démontrée.

COROLLAIRE 1. *La fonction φ, définie sur S par $\varphi : s \to \lambda_{[s^2,s]}$, est une immersion dense de S dans $\Lambda(Q)$.*

Démonstration. Avec les notations introduites ci-dessus, pour $s \in S$ et $[a, b] \in Q$, on obtient

$$\bar{\lambda}_s[a, b] = [(\lambda_s a)^2, (\lambda_s a)b] = [(sa)^2, (sa)b] = [s^2, s][a, b] = \lambda_{[s^2,s]}[a, b],$$

d'où $\bar{\lambda}_s = \lambda_{[s^2,s]}$. Il en résulte que $S\varphi = \Gamma(S)\theta$, et, en vertu du théorème précédent, $\Lambda(S)\theta = i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta)$. D'autre part, $\Gamma(S)$ est un idéal densement immergé de $\Lambda(S)$, d'après [**2**, 1.3.5], et le fait que la projection de $\Omega(S)$ dans $\Lambda(S)$ est un isomorphisme de $\Omega(S)$ sur $\Lambda(S)$ qui applique la partie interne $\Pi(S)$ de $\Omega(S)$ sur $\Gamma(S)$. Par suite, $S\varphi$ est un idéal densement immergé de son idéalisateur dans $\Lambda(Q)$. Par définition, φ est une immersion dense de S dans $\Lambda(Q)$.

COROLLAIRE 2. *Tout demi-groupe commutatif et séparatif peut être densement immergé dans l'enveloppe de translations de son demi-groupe des fractions.*

Comme Q est un demi-treillis de groupes, $\Omega(Q)$ l'est aussi, d'après le corollaire du Théorème 2. Il résulte du Théorème 5 que $\Lambda(S)$ doit être commutatif

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-015-9 Published online by Cambridge University Press

et séparatif. Plus généralement, toute extension dense d'un demi-groupe commutatif séparatif est un demi-groupe commutatif séparatif, ce qu'on démontre sans difficulté.

Nous appliquerons maintenant quelques-uns des résultats du paragraphe 3 concernant les demi-treillis de groupes au demi-groupe des fractions Q de S, ce qui nous permettra d'établir une autre immersion dense des demi-groupes commutatifs séparatifs. Le résultat suivant donne les images de S dans la limite inverse relative à son demi-groupe des fractions. Nous conservons toutes les notations introduites antérieurement.

THÉORÈME 6. *Soit S un demi-groupe commutatif séparatif avec les composantes archimédiennes S_α, $\alpha \in Y$, et soit $Q = [Y\,;G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ son demi-groupe des fractions. En notant θ la fonction du Théorème 5 relative à S, σ celle du Théorème 1 relative à Q, et $A = \operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$, on a*

$$\text{(13)}\qquad \begin{aligned}\Gamma(S)\theta\sigma &= \{([s^2, s]\varphi_{\gamma,\alpha})_{\alpha\leqq\gamma} \in A \,|\, s \in S_\gamma, \gamma \in Y\}\\ &= \{([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha\leqq\gamma} \in A \,|\, c_\gamma \in d_\gamma S_\gamma, d_\gamma \in S_\gamma, \gamma \in Y\},\end{aligned}$$

$$\text{(14)}\qquad \begin{aligned}\Lambda(S)\theta\sigma &= \{([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha\in I} \in A \,|\, I \in \mathscr{R}_Y, c_\alpha S_\beta \subseteq d_\alpha S_\alpha \quad si \quad I \cap (\beta) = (\alpha)\}\\ &= i_A(\Gamma(S)\theta\sigma).\end{aligned}$$

Démonstration. Pour $s \in S_\gamma$, et pour tout $a_\alpha \in S_\alpha$ avec $\alpha \leqq \gamma$, on a

$$\lambda_s\theta\sigma = \lambda_{[s^2,s]}\sigma = ([s^2, s][a_\alpha, a_\alpha])_{\alpha\leqq\gamma} = ([s^2, s]\varphi_{\gamma,\alpha})_{\alpha\leqq\gamma}.$$

Par suite, le premier ensemble dans (13) est contenu dans le second ; il est évident que celui-ci est contenu dans le troisième. Soit $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha\leqq\gamma} \in A$ tel que $c_\gamma = d_\gamma s$, où $s, d_\gamma \in S_\gamma$. Pour tout $a_\alpha \in S_\alpha$ avec $\alpha \leqq \gamma$, on a

$$[s^2 a_\gamma, s a_\gamma] = [c_\gamma, d_\gamma],$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}[c_\alpha, d_\alpha] = [c_\gamma, d_\gamma]\varphi_{\gamma,\alpha} &= [c_\gamma, d_\gamma][a_\alpha, a_\alpha] = [s^2 a_\gamma, s a_\gamma][a_\alpha, a_\alpha]\\ &= [s^2 a_\gamma a_\alpha, s a_\gamma a_\alpha] = [s^2 a_\alpha, s a_\alpha] = [s^2, s][a_\alpha, a_\alpha],\end{aligned}$$

ce qui entraîne $\lambda_s\theta\sigma = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha\leqq\gamma}$. Ceci montre que le troisième ensemble de (13) est contenu dans le premier.

Afin de montrer (14), choisissons un élément quelconque λ dans $\Delta(S)$. On a

$$\text{(15)}\qquad \lambda\theta\sigma = ((\lambda\theta)[a_\alpha, a_\alpha])_{\alpha\in I} = ([(\lambda a_\alpha)^2, (\lambda a_\alpha)a_\alpha])_{\alpha\in I},$$

où

$$\text{(16)}\qquad I = \{\alpha \in Y \,|\, (\lambda\theta)S \cap G_\alpha \neq \emptyset\} \in \mathscr{R}_Y \text{ et } a_\alpha \in S_\alpha.$$

Soient $I \cap (\beta) = (\alpha)$, $a_\alpha \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Nous avons vu, dans la démonstration du Théorème 1, qu'alors $(\lambda\theta)[b^2, b] \in G_\alpha$, donc $\lambda b \in S_\alpha$, ce qui implique

$$(\lambda a_\alpha)^2 b = (\lambda a_\alpha)(\lambda a_\alpha)b = (\lambda a_\alpha)a_\alpha(\lambda b) \in (\lambda a_\alpha)a_\alpha S_\alpha,$$

et par suite $(\lambda a_\alpha)^2 S_\beta \subseteq (\lambda a_\alpha)a_\alpha S_\alpha$. Ceci, en conjonction avec (15) et (16), montre que $\Lambda(S)\theta\sigma$ est contenu dans le second ensemble de (14).

Soit $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}$ un élément du second ensemble de (14), et soit $([g_\alpha, h_\alpha])_{\alpha \leqq \gamma}$ un élément du troisième ensemble de (13). On a

$$([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}([g_\alpha, h_\alpha])_{\alpha \leqq \gamma} = ([c_\alpha g_\alpha, d_\alpha h_\alpha])_{\alpha \leqq \beta},$$

où $I \cap (\gamma) = (\beta)$. Par hypothèse, $c_\beta S_\gamma \subseteq d_\beta S_\beta$ et $g_\gamma \in h_\gamma S_\gamma$. D'après la construction, on a, pour tout $v \in S_\beta$,

$$[g_\gamma v, h_\gamma v] = [g_\gamma, h_\gamma][v, v] = [g_\gamma, h_\gamma]\varphi_{\gamma,\beta} = [g_\beta, h_\beta],$$

ce qui entraîne $g_\gamma v h_\beta = h_\gamma v g_\beta$. D'autre part, $g_\gamma \in h_\gamma S_\gamma$ implique l'existence de $u \in S_\gamma$ tel que $g_\gamma = h_\gamma u$. Par suite $(h_\gamma v)uh_\beta = (h_\gamma v)g_\beta$, d'où $g_\beta = h_\beta u \in h_\beta S_\gamma$. Il en résulte

$$c_\beta g_\beta \in c_\beta h_\beta S_\gamma = h_\beta(c_\beta S_\gamma) \subseteq h_\beta d_\beta S_\beta = (d_\beta h_\beta)S_\beta,$$

donc $([c_\alpha g_\alpha, d_\alpha h_\alpha])_{\alpha \leqq \beta} \in \Gamma(S)\theta\sigma$, en vertu de (13). On en déduit que $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(S)\theta\sigma)$.

Supposons finalement que $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(S)\theta\sigma)$. On obtient, pour tout $[a, b] \in Q$,

$$\begin{aligned}([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}(\lambda_{[a,b]}\sigma) &= ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}(\lambda_{[a^2,a]}\lambda_{[b,b^2]})\sigma \\ &= \{([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}(\lambda_a\theta\sigma)\}(\lambda_{[b,b^2]}\sigma) \in \Gamma(Q)\sigma,\end{aligned}$$

où l'inclusion est valable, parce que l'expression entre les accolades est contenue dans $\Gamma(S)\theta\sigma$ qui est contenu dans $\Gamma(Q)\sigma$. En utilisant le Théorème 1, on en déduit

$$([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} \in i_A(\Gamma(Q)\sigma) = \Lambda(Q)\sigma.$$

Posons $\lambda = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}\sigma^{-1}$. On a $\lambda \in \Lambda(Q)$, et, pour tout $s \in S$, on obtient

$$[\lambda(\lambda_s\theta)]\sigma = (\lambda\sigma)(\lambda_s\theta\sigma) = ([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I}(\lambda_s\theta\sigma) \in \Gamma(S)\theta\sigma,$$

d'après l'hypothèse, ce qui implique $\lambda(\lambda_s\theta) \in \Gamma(S)\theta$. Par suite

$$\lambda \in i_{\Lambda(Q)}(\Gamma(S)\theta) = \Lambda(S)\theta,$$

en vertu du Théorème 5. Or, cela entraîne $([c_\alpha, d_\alpha])_{\alpha \in I} = \lambda\sigma \in \Lambda(S)\theta\sigma$, ce qui achève la démonstration de (14).

Le théorème précédent permet d'établir une autre immersion dense d'un demi-groupe commutatif séparatif.

COROLLAIRE 1. *Soit S un demi-groupe commutatif séparatif avec les composantes archimédiennes S_α, $a \in Y$, et soit $Q = [Y ; G_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta}]$ son demi-groupe des fractions. La fonction τ, définie sur S par*

$$\tau : s \longrightarrow ([s^2, s]\varphi_{\gamma,\alpha})_{\alpha \leqq \gamma} \quad (s \in S_\gamma, \gamma \in Y),$$

est une immersion dense de S dans $\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha \in Y}$.

Démonstration. La fonction τ est la composition des isomorphismes suivants :

$$s \longrightarrow \lambda_s \xrightarrow{\theta} \lambda_{[s^2,s]} \xrightarrow{\sigma} ([s^2, s]\varphi_{\gamma,\alpha})_{\alpha \leqq \gamma} \quad (s \in S),$$

et est donc une immersion de S dans $\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$. De plus, $S\tau = \Gamma(S)\theta\sigma$ est un sous-demi-groupe dense de $\operatorname{Inv}\lim\{G_\alpha\}_{\alpha\in Y}$, d'après le Théorème 6 et [**2**, 1.3.5].

COROLLAIRE 2. *Tout demi-groupe commutatif peut être densement immergé dans la limite inverse de son demi-groupe des fractions.*

On peut simplifier les démonstrations du Théorème 6 et du Corollaire 1 pour montrer que l'immersion canonique d'un demi-groupe commutatif simplifiable dans son groupe des fractions est une immersion dense. Le résultat suivant généralise cette propriété au cas d'un sous-demi-groupe quelconque d'un groupe.

THÉORÈME 7. *Tout sous-demi-groupe d'un groupe est un sous-demi-groupe dense.*

Démonstration. Soit S un sous-demi-groupe d'un groupe G, et soit $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$. Pour tout $a, b \in S$, on a

$$(\lambda a)a^{-1} = b^{-1}b(\lambda a)a^{-1} = b^{-1}(b\rho)aa^{-1} = b^{-1}(b\rho)bb^{-1} = b^{-1}b(\lambda b)b^{-1} = (\lambda b)b^{-1}.$$

Il en résulte que la fonction η, définie sur $\Omega(S)$ par

$$\eta : (\lambda, \rho) \rightarrow (\lambda a)a^{-1},$$

ne dépend pas de l'élément a. Pour (λ, ρ), $(\lambda', \rho') \in \Omega(S)$ et $a \in S$, on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda, \rho)\eta(\lambda', \rho')\eta &= \{[\lambda(\lambda'a)](\lambda'a)^{-1}\}(\lambda'a)a^{-1}\\ &= \lambda(\lambda'a)a^{-1} = [(\lambda\lambda')a]a^{-1} = (\lambda\lambda', \rho\rho')\eta,\end{aligned}$$

et η est un homomorphisme. Si $(\lambda a)a^{-1} = (\lambda'a)a^{-1}$ pour un $a \in S$, on a, pour tout $b \in S$, $(\lambda b)b^{-1} = (\lambda'b)b^{-1}$, et par suite $\lambda b = \lambda'b$. Il s'ensuit que $\lambda = \lambda'$, et la simplifiabilité entraîne que $\rho = \rho'$. De plus, pour $a \in S$, on a $\lambda_a\eta = (\lambda_a a)a^{-1} = a$, ce qui implique $\Pi(S)\eta = S$. Puisque $\Pi(S)$ est un idéal de $\Omega(S)$, on en déduit que η est un isomorphisme de $\Omega(S)$ dans $i_G(S)$. D'après [**2**, 1.3.5], $\Pi(S)$ est un idéal densement immergé de $\Omega(S)$. Par conséquent, $\Omega(S)\eta$ est une extension dense maximale de $\Pi(S)\eta = S$. D'autre part, à cause de la simplifiabilité, $i_G(S)$ est une extension dense de S, ce qui implique que $\Omega(S)\eta = i_G(S)$. Cela montre que S est un sous-demi-groupe de G densement immergé.

COROLLAIRE. *Toute immersion d'un demi-groupe dans un groupe est dense.*

BIBLIOGRAPHIE

1. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*. Vol. I (Amer. Math. Soc., Providence, 1961).

2. L. N. Gluskin, *Les idéaux des demi-groupes* (en russe), Mat. Sb. *55* (1961), 421–448.

3. P. A. Grillet and M. Petrich, *Ideal extensions of semigroups*, Pacific J. Math. *26* (1968), 493–508.

4. Mario Petrich, *The translational hull of a completely* 0*-simple semigroup*, Glasgow Math. J. *9* (1968), 1–11.

5. ——— *Translational hull and semigroups of binary relations*, Glasgow Math. J. *9* (1968), 12–21.

6. ——— *The semigroup of endomorphisms of a linear manifold*, Duke Math. J. *36* (1969), 145–152.

7. ——— *Representations of semigroups and the translational hull of a regular Rees matrix semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. *143* (1969), 303–318.

8. ——— *Certain dense embeddings of regular semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. *155* (1971), 333–343.

9. ——— *On ideals of a semilattice*, Czechoslovak Math. J. *22* (1972), 361–367.

10. I. S. Ponizovski, *Une remarque sur les demi-groupes inverses* (en russe), Uspehi Mat. Nauk *20* (1965), 147–148.

Pennsylvania State University,
University Park, Pennsylvania

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-015-9 Published online by Cambridge University Press