Canad. Math. Bull. Vol. **18** (4), 1975

MORPHISMES ET MULTIPLICATIONS DANS UNE ALGÈBRE

PAR
CLAUDE LEMAIRE

Introduction. Soient R un anneau commutatif unitaire, S une R-algèbre associative unitaire, A et B des sous-R-modules de S. Nous étudions des situations dans lesquelles $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ peut être emboîté dans S. Les définitions et le résultat de base se trouvent dans la section 1; dans la section 2, nous examinons des applications à l'étude des structures d'algèbre que l'on peut définir sur A; la section 3 contient des exemples.

Pour $X, Y \subseteq S$, nous noterons $M(X, Y) = \{s \in S \mid s \cdot X \subseteq Y\} \cdot \tau$ sera le morphisme canonique de $M(A, B)$ dans $\mathrm{Hom}_R(A, B)$. "Topologie fonctorielle" est pris au sens de Charles [2]. Nous dirons qu'une topologie fonctorielle est I-adique si elle est définie par une famille $\mathscr{F}$ d'idéaux de R: les $\alpha \cdot A$ ($\alpha \in \mathscr{F}$) forment un système fondamental de voisinages de 0 de A. Pour une topologie I-adique, N pur dans M signifie: $\alpha N = \alpha M \cap N$ pour tout α dans $\mathscr{F}$.

1. **Généralités.** Nous supposons désormais *qu'il existe un élément x de A, simplifiable à droite* tel que:

$$\forall\, \phi \in \mathrm{Hom}_R(A, B),\ \phi(x) \in S \cdot x.$$

x est dit *stable* pour (A, B). Un élément de A inversible dans S est stable pour tout (A, B). Si tout idéal à gauche de S est totalement invariant (notamment si $\mathrm{End}\, S = S$) et si $\mathrm{Ext}^1_R(S/A, S) = 0$, tout élément simplifiable à droite de A est stable pour tout (A, B).

Soit θ_x le morphisme de $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ dans S, obtenu en définissant $\theta_x(\phi)$ comme l'unique s tel que $\phi(x) = s \cdot x$.

Pour tout ϕ dans $\mathrm{Hom}_R(A, B)$, $\theta_x(\phi)$. (Multiplication à gauche par $\theta_x(\phi)$) peut être considéré comme un morphisme de A dans S.

Notons $N_x = \bigcap_{\phi \in Hom_R(A,B)} \ker(\phi - \theta_x(\phi) \cdot)$. N_x a les deux propriétés suivantes:

P_1: Si S est séparé pour une topologie fonctorielle sur les R-modules, alors N_x est fermé pour cette topologie.

P_2: Si S est sans torsion pour une théorie de torsion ([5]), que X est inclus dans A et que $X \cap N_x$ contient Y avec X/Y de torsion, alors $X \subseteq N_x$.

Reçu par les rédacteurs le 20 Mars 1974.
Recherche soutenue par le Conseil national de recherches du Canada.

https://doi.org/10.4153/CMB-1975-097-7 Published online by Cambridge University Press

DÉFINITIONS. x *enferme* (A, B) si $\mathrm{Hom}_R(A/N_x, B)=0$. Si, de plus, $\mathrm{im}\,\theta_x \subseteq M(A, B)$, nous dirons que x *enferme strictement* (A, B). (Si $B=S$, les deux définitions coïncident.) Le résultat suivant est clair:

PROPOSITION 1. (i) *Si x enferme (A, B) alors θ_x est injectif et pour tout $D\subseteq B$, la restriction à $M(A, D)$ de $\theta_x \circ \tau$ est l'identité.*

(ii) *Si x enferme strictement (A, B) alors $A=N_x$ (etréciproquement); $\mathrm{Hom}_R(A, D)$ est canoniquement isomorphe à $M(A, D)$.*

2. **Multiplications.** Si x enferme (A, B) et $A\subseteq B$, $\mathrm{End}\,A=\mathrm{Hom}_R(A, A)$ est injecté par θ_x dans S (proposition 1). On remarque que θ_x est un morphisme d'anneaux si x enferme strictement (A, B) ou encore, si A est sans torsion et A/N_x de torsion pour une théorie de torsion définie par une famille d'éléments de R. (Voir [5], p. 86). D'autre part, on sait ([3], p. 281) que les lois de R-algèbres que l'on peut définir sur A sont caractérisées (non univoquement) par

$$\mathrm{Mult}\,A = \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{End}\,A).$$

PROPOSITION 2. *Si x enferme (A, B) où A et $M(\{x\}, B)$ sont inclus dans B, alors Mult A est injecté canoniquement dans B.*

DÉMONSTRATION. En effet, par la proposition 1, End A est injecté canoniquement dans S. Puisque $M(\{x\}, B)$ est inclus dans B, $\theta_x(\mathrm{End}\,A)$ est inclus dans B donc on peut appliquer une deuxième fois la proposition 1 en prenant $D=\theta_x(\mathrm{End}\,A)$. □

Notons que $M(\{x\}, B)\subseteq B$ est satisfait si $x=1$ ou $B=S$. *Dans les conditions de la proposition* 2 et en faisant les identifications, on vérifie que:

$A \subseteq \mathrm{End}\,A \subseteq \mathrm{Mult}\,A$	si	A est un sous-anneau de S
$\mathrm{Mult}\,A \subseteq \mathrm{End}\,A \subseteq A$	si	$x = 1$
$A = \mathrm{End}\,A = \mathrm{Mult}\,A$	si	A est un sous-anneau (unitaire) de S et $x = 1$.

Si, de plus, x enferme strictement (A, B), *Mult A est identifié à $M(A^2, A)$* (en utilisant l'associativité de S): si $\mu \in \mathrm{Mult}\,A$, $\mu(a)[a']=maa'$ pour un et un seul m appartenant à $M(A^2, A)$. Dans les deux propositions qui suivent nous supposons qu'il en est ainsi et que, de plus, *S est commutatif.*

PROPOSITION 3. (i) *Si p est un relateur universel pour S* ([1]), *dont tous les termes ont même degré, alors p est un relateur universel de toute R-algebre construite sur A.*

(ii) *toute algèbre construite sur A est associative et commutative.*

(iii) *une telle algèbre est unitaire si et seulement si l'élément m correspondant est inversible, m^{-1} appartient à A et $m^{-1}A=A^2$.*

DÉMONSTRATION. (i) Si tous les termes sont de degré d, p, appliqué à des éléments de A avec la multiplication correspondant à m, est égal à m^{d-1} multiplié par p appliqué aux mêmes éléments de A, considérés dans S et avec la multiplication de S; ce dernier facteur est nul par hypothèse.

(ii) C'est évident en soi. On peut aussi prendre $p=(X_1X_2)X_3-X_1(X_2X_3)$ et $p=X_1X_2-X_2X_1$ et appliquer i.

(iii) Ces conditions sont clairement nécessaires; réciproquement, si u est un inversible appartenant à A et si $uA=A^2$, alors u^{-1} appartient à $M(A^2, A)$, donc définit une multiplication pour laquelle u est neutre. □

PROPOSITION 4. *Deux éléments m et m' de $M(A^2, A)$ définissent des multiplications équivalentes* ([3], *p.* 282) *si et seulement si $m=um'$ où u est inversible et $uA=A$. En particulier, il y a au plus une classe de multiplications unitaires sur A.*

DÉMONSTRATION. Par définition, les deux multiplications sont équivalentes si et seulement si il existe un automorphisme h de A tel que $maa'=h^{-1}[m'h(a)h(a')]$, pour tous a, a' dans A. Ici h ne peut être que la multiplication par un élément u de S, nécessairement inversible, tel que $uA=A$. En faisant $a=a'=x$, on obtient la première partie. Si les multiplications sont unitaires, 3(iii) montre que mm'^{-1} et $m'm^{-1}$ sont des éléments inversibles de $M(A, A)$, ce qui, comparé avec ce qui vient d'être démontré, donne la deuxième partie. □

3. **Exemples.** a. Soit A un sous-groupe p-pur de $\hat{Z}_p$ (entiers p-adiques), contenant 1. Alors 1 enferme strictement $(A, \hat{Z}_p)$ car 1 est stable, N_1 contient $Z=Z\cdot 1$, qui est dense dans A pour la topologie p-adique (puisque A est p-pur), donc $N_1=A$ par P_1.

b. Cet exemple bien connu peut être généralisé. Soit $\mathscr{F}$ une topologie I-adique et $\hat{R}$ le complété de R pour cette topologie ($\varprojlim R/\alpha$, $\alpha \in \mathscr{F}$). Une module A séparé pour $\mathscr{F}$ et contenant un élément x d'ordre nul, tel que $R\cdot x$ est dense et pur dans A, peut être identifié à un sous-module de $\hat{R}$: en effet, pour chaque α de $\mathscr{F}$, tout a peut s'écrire $r_\alpha \cdot x+t_\alpha$ où t_α appartient à αA. Avec nos hypothèses, les r_α correspondant à a définissent un élément unique $\hat{r}$ de $\hat{R}$ et la correspondance est injective. Après identification, x est devenu 1 et $A=N_1$ (par P_1) puisque $R\cdot 1$ est dense dans A et que $\hat{R}$ est séparé pour $\mathscr{F}$.

c. Dans son étude des endomorphismes d'un groupe abélien A sans torsion de rang 2, Parr utilise une situation où x enferme (A, A) mais non strictement. (Voir [4]).

d. Considérons une théorie de torsion héréditaire [5] pour les R-modules, de radical t et S une R-algèbre sans torsion. Si A contient 1 et est inclus dans l'image réciproque de $t(S/R\cdot 1)$, alors 1 enferme strictement (A, S) par P_2.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre III, Hermann 1970.

2. B. Charles, *Méthodes topologiques en théorie des groupes abéliens*, Proc. Colloq. Ab. Groups, 29–42, Budapest 1964.

3. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, tome II, Academic Press 1973.

4. J. T. Parr, *Endomorphism rings of rank two torsion free abelian groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **22** (1971), 611–632.

5. B. Stenström, *Rings and Modules of Quotients*, Springer Verlag, 1971.

UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, QUÉBEC