Can. J. Math., Vol. XXX, No. 2, 1978, pp. 358-372

SUR L'APPROXIMATION POLYNOMIALE AVEC POIDS exp $(-|x|)$

G. FREUD, A. GIROUX ET Q. I. RAHMAN

1. Introduction. Dans ce travail, nous étudions l'approximation polynomiale pondérée usuelle et aussi unilatérale dans l'espace L. Le poids considéré est $w(x) = \exp(-|x|)$ ce qui constitue un cas extrémal; rappelons à ce propos quelques résultats de G. Freud. A chaque poids de la forme $w_Q(x) = \exp(-Q(x))$ correspond une suite caractéristique $\{q_n\}$ de nombres positifs définis par la relation $q_n Q'(q_n) = n$. Dans le sixième chapitre de [**1**] (voir aussi [**14**]), Freud démontre que toute fonction f pour laquelle $fw_Q \in L$ peut être approchée par un polynôme p_n de degré $\leqq n$ en commettant une erreur $(\int |f - p_n|w_Q)$ d'au plus $\Omega(f, q_n/n)$ où Ω est un module de continuité adéquat et obtient des résultats précisés lorsque la fonction f est supposée différentiable. Dans [**2**], Freud montre que si la r ième dérivée $f^{(r)}$ est à support compact et à variation bornée et si $|f|$ admet une majoration polynomiale, alors f peut être approchée unilatéralement par des polynômes de degré $\leqq n$ $(p_n \leqq f \leqq P_n)$ avec une erreur $(\int (P_n - p_n)w_Q)$ inférieure à $K(f)(q_n/n)^{r+1}$. Lorsque $Q(x) = |x|^\rho$, on a $q_n \sim n^{1/\rho}$ de telle sorte que, si $\rho > 1$, q_n/n tend vers zéro avec $1/n$ mais, si $\rho = 1$, le prolongement formel direct des résultats de Freud fournit une majoration de l'erreur ne tendant pas vers zéro avec $1/n$. Cependant, il suit des recherches de M. Riesz [**3**] (voir aussi [**4**]) que les fonctions à croissance polynomiale peuvent être approchées unilatéralement dans l'espace L avec poids w et, en particulier, que les polynômes sont denses dans cet espace.

Le problème correspondant dans l'espace L_∞ suggère une façon d'aborder cette question. M. M. Djerbachian [**5**] a introduit la suite $\{r_n\}$ définie par

$$r_n = \left(\int_1^n \frac{dx}{q(x)}\right)^{-1}$$

où q est la fonction inverse de Q et il a montré que toute fonction f bornée et uniformément continue pouvait être approximée par un polynôme p_n de degré $\leqq n$ avec une erreur $(\sup |f - p_n|w_Q)$ de l'ordre de $\omega(f, r_n)$, ω étant le module de continuité habituel. Ces résultats furent étendus par Freud ([**6**; **7**]) à des classes plus vastes de fonctions moyennant certaines restrictions sur le poids. Encore une fois, l'argument du module de continuité employé par Freud était q_n/n. Il est à noter que si $\rho > 1$, r_n et q_n/n sont du même ordre de grandeur alors que si $\rho = 1$, $r_n = 1/\log n$ et $q_n/n = 1$.

Reçu le 17 décembre 1976 et sous forme revisée le 9 juin 1977. Le travail du premier auteur était subventionné par la NSF des Etats-Unis (RF 4388-A1).

Ces considérations suggèrent que, d'une certaine façon, $1/\log n$ devrait être l'argument du module de continuité apparaissant dans notre problème et jusqu'à un certain point nos résultats le confirment. Ces résultats montrent d'ailleurs que les nombres q_n ($= n$ dans notre cas) jouent encore ici un rôle important. D'abord la distance séparant les zéros consécutifs des polynômes orthogonaux relativement à w est de l'ordre de q_n/n; de plus, q_n semble être la longueur critique pour le module de continuité utilisé.

Notre façon d'aborder le problème de l'approximation polynomiale usuelle est celle de Freud [**8**]; l'approximation unilatérale est traitée suivant les méthodes de Freud [**9**] telles que raffinées par G. P. Nevai [**10**]. Dans ces techniques, on doit d'abord majorer la fonction de Christoffel $\lambda_n(x)$; notre majoration est quelque peut singulière: si $|x|$ est grand, on a

$$\lambda_n(x)w^{-1}(x) = O(1) = O(q_n/n)$$

alors que si $|x|$ est petit, on obtient

$$\lambda_n(x)w^{-1}(x) = O(1/\log n) = O(r_n).$$

Le problème de l'approximation polynomiale dans l'espace $L_p(1 < p < \infty)$ relativement au poids w est ouvert. (Le cas $p = \infty$ peut être traité par la méthode de Djerbachian (communication verbale de ce dernier aux auteurs).) La méthode basée sur le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin n'est applicable que si le poids w_Q est fortement normal, c'est-à-dire si

$$(\gamma_{n-1}/\gamma_n)\lambda_n^{-1}(x) \leqq K_1 n\, w^{-1}(x)$$

où $\gamma_n > 0$ est le coefficient de x^n dans le n ième polynôme orthonormal relativement à w_Q (voir [**11**]). Dans ce cas-ci, on a $(\gamma_{n-1}/\gamma_n) \sim n$ (voir [**12**]) alors que $\lambda_n^{-1}(0) \geqq K_2 \log n$. Egalement non réglée est la question d'obtenir les théorèmes réciproques des nôtres.

2. Principaux résultats. On désignera par $p_n, \pi_n, \ldots$, des polynômes de degré $\leqq n$ et par $C_1, C_2, \ldots$, des constantes positives dont la dépendance éventuelle d'un paramètre sera toujours explicitement indiquée. Si $w(x) = \exp(-|x|)$ et si $fw \in L$, on pose

$$||fw|| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|w(x)dx,$$

$$\epsilon_n(f) = \min_{\pi_n} ||(f - \pi_n)w||$$

et

$$\omega(f, \epsilon) = \sup_{|h|\leqq \epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)w(x+h) - f(x)w(x)|dx + \epsilon||fw||.$$

Notons ici que

(2.1) $\quad \omega(f, u\epsilon) \leqq 2u\, \omega(f, \epsilon), \quad u \geqq 1,$

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-032-7 Published online by Cambridge University Press

relation qu'il suffit évidemment de vérifier pour u rationnel auquel cas elle suit de l'inégalité

$$\omega(f, \epsilon_1 + \epsilon_2) \leqq \omega(f, \epsilon_1) + \omega(f, \epsilon_2).$$

Dans la section 3, nous étudions la fonction de Christoffel λ_n relative au poids w:

$$\lambda_n(x) = \min_{\pi_{n-1}(x)=1} ||\pi_{n-1}^2 w||.$$

Définissant la fonction auxilliaire

$$\Lambda_n(x) = \left(\log \frac{n + e|x|}{1 + |x|}\right)^{-1},$$

nous y démontrons le

THÉORÈME 2.1. *Il existe C_1, C_2 et C_3 telles que*

$$C_1 \leqq \lambda_n(x)\Lambda_n^{-1}(x)w^{-1}(x) \leqq C_2$$

pourvu que $|x| \leqq C_3 n$.

Seule l'inégalité de droite nous sera nécessaire; l'inégalité de gauche (d'ailleurs valable pour tout $x \in R$) n'est présentée ici que pour montrer que celle de droite est précise. Notons que $\Lambda_n(x) \sim (\log n)^{-1}$ pour $|x| \sim 0$ et que $\Lambda_n(x) \sim 1$ pour $|x| \sim n$.

Dans la section 4, nous présentons une première majoration de $\epsilon_n(f)$. Introduisant le module de continuité

$$\omega_n^{(\delta)}(f, \epsilon) = \delta^{-1}\omega(f, \epsilon) + \int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx$$

dépendant du paramètre $\delta \in (0, 1)$, nous obtenons le

THÉORÈME 2.2. *Si $fw \in L$, on a, quelque soit $\delta \in (0, 1)$:*

$$\epsilon_n(f) \leqq C_4\, \omega_n^{(\delta)}(f, (\log n)^{-1}).$$

Remarquons que pour chaque fonction f et chaque valeur fixée de δ, $\omega_n^{(\delta)}(f, (\log n)^{-1})$ tend vers zéro avec $1/n$ de telle sorte que le théorème précédent montre bien que les polynômes sont denses dans l'espace L relativement au poids w.

La section suivante est une étude de $\epsilon_n(f)$ dans le cas où la fonction f est r fois dérivable. Nous y démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 2.3. *Si $f^{(k)}w \in L$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$, on a, quelque soit $\delta \in (0, 1)$:*

$$\epsilon_n(f) \leqq C_5(\delta, r) \left\{ (\log n)^{-r}\omega(f^{(r)}, (\log n)^{-1}) + e^{-n^2/3} \sum_{k=1}^{r} (\log n)^{-k+1}||f^{(k)}w|| \right\} + \int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx.$$

Dans la section 6, nous introduisons un autre "module de continuité" ω_n^* plus complexe que $\omega_n^{(\delta)}$ mais ne dépendant d'aucun paramètre. De façon précise, soit $\varphi_n(x)$ une fonction paire, continûment différentiable et à support compact $[-n, n]$ telle que

$$\varphi_n(x) \begin{cases} = (\log n)^{-1} & \text{pour } 0 \leqq x \leqq n^{1/2} \\ \sim \Lambda_n(x) & \text{pour } n^{1/2} < x < n. \end{cases}$$

Puisque

$$\Lambda_n(\sqrt{n}) \sim \frac{1}{\frac{1}{2}\log n}, \quad \Lambda_n(n) \sim 1$$

et que

$$\Lambda_n'(\sqrt{n}) \sim 0, \quad \Lambda_n'(n) \sim 0,$$

le raccord de $\Lambda_n(x)$ avec $(\log n)^{-1}$ en $x = \sqrt{n}$ et avec 0 en $x = n$ ne pose aucune difficulté. Si $fw \in L$, posons

$$\omega_n^*(f) = \sup_{0 \leqq t \leqq 1} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + t\varphi_n(x))w(x + t\varphi_n(x)) - f(x)w(x)|dx + ||\Lambda_n f w||.$$

On a alors le

THÉORÈME 2.4. *Si $f\,w \in L$,*

$$\epsilon_n(f) \leqq C_6 \omega_n^*(f).$$

Il est important de remarquer que le membre de droite de cette inégalité tend vers zéro avec $1/n$ et il semble probable que cette majoration de ϵ_n par ω_n^* peut être renversée. N'ayant pas d'inégalité du type de celle de Markov à notre disposition, nous ne pouvons démontrer cette assertion ici; en fait, la relation entre $\omega_n^{(\delta)}$ et ω_n^* semble elle-même non triviale.

Finalement, dans la dernière section, nous présentons la solution du problème de l'approximation polynomiale unilatérale.

THÉORÈME 2.5. *Supposons qu'il existe des constantes positives A et B et un entier non négatif m tels que*

$$(2.2) \quad |f(x)| \leqq A + Bx^{2m}, \quad x \in R.$$

Supposons de plus que $f^{(r)}$ soit à variation bornée et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)|df^{(r)}(x)| < \infty.$$

Il existe alors p_{2n} et P_{2n} tels que

$$p_{2n}(x) \leqq f(x) \leqq P_{2n}(x), \quad x \in R$$

et que

$$\|(P_{2n} - p_{2n})w\| \leqq C_7(r) \int_{|x| \leqq C_8 n} (\Lambda_n(x))^{r+1} w(x) |df^{(r)}(x)| + C_9(A, B, m) e^{(-1/3)\sqrt{n} \log n}.$$

L'exemple d'une fonction f n'ayant qu'un saut montre que ce résultat est précis si $r = 0$; il est probable qu'il le soit aussi quelque soit $r > 0$.

3. La fonction de Christoffel. Pour démontrer le théorème 2.1 nous aurons besoin de résultats auxilliaires concernant les sommes partielles

$$s_N(Z) = \sum_{k=0}^{N} Z^{2k}/(2k)!$$

de la fonction $\cosh Z$ lorsque N est grand.

LEMME 3.1. *Si* $-N \leqq x \leqq N$,

$$\cosh x \leqq C_{10}\, s_N(x).$$

Démonstration. En vertu de la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}\frac{\cosh x}{s_N(x)} &\leqq 1 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{N!}{(2k)!} x^{2k-N} \\ &\leqq 1 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{N!}{(2k)!} N^{2k-N} \\ &\leqq 1 + C_{11} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{N}{e}\right)^{N} \left(\frac{e}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{N}{2k}\right)^{1/2} N^{2k-N} \\ &\leqq 1 + C_{12} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{N}{2k}\right)^{k} \leqq C_{10}.\end{aligned}$$

LEMME 3.2. *Si* $|Z| \leqq (N+1)/e$,

$$|\cosh Z - s_N(Z)| \leqq C_{13}(N+1)^{-1/2}.$$

Démonstration. Toujours en utilisant la formule de Stirling,

$$\begin{aligned}|\cosh Z - s_N(Z)| &\leqq \frac{|Z|^{2(N+1)}}{(2(N+1))!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2(N+1))!}{(2k)!} |Z|^{2k-2(N+1)} \\ &\leqq C_{14} \left(\frac{N+1}{e}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{e}{2(N+1)}\right)^{2(N+1)} \frac{1}{(N+1)^{1/2}} \\ &\times \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{N+1}{e}\right)^{2k-2(N+1)} \times \ldots \times \left(\frac{2(N+1)}{e}\right)^{2(N+1)} \left(\frac{e}{2k}\right)^{2k} \left(\frac{N+1}{k}\right)^{1/2} \\ &\leqq C_{15}\, (N+1)^{-1/2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{N+1}{2k}\right)^{2k} \leqq C_{13}\, (N+1)^{-1/2}.\end{aligned}$$

LEMME 3.3. *Dans le carré R_N de sommets* $[(N+1)/2\pi e]\, 2\pi(\pm 1 \pm i)$, $s_N(Z)$ *possède exactement* $4[(N+1)/2\pi e]$ *zéros; de fait, ces zéros sont purement imaginaires:* $\pm i\, y_k$ *où*

$$1 < y_1 < \pi < y_2 < 2\pi < \ldots < y_{2\left[\frac{N+1}{2\pi e}\right]} < \left[\frac{N+1}{2\pi e}\right] 2\pi.$$

Démonstration. Le premier énoncé est une conséquence du théorème de Rouché: il suffit de remarquer que $|\cosh Z| \geqq C_{16}$ sur les côtés de R_N, que $\cosh Z$ admet exactement $4[(N+1)/2\pi e]$ zéros à l'intérieur de R_N et d'utiliser le lemme 3.2. Le second énoncé découle aussi du lemme 3.2 puisque $\cosh Z$ prend alternativement les valeurs $+1$ et -1 aux multiples entiers de πi (le fait que $1 < y_1$ suit du théorème d'Eneström–Kakeya suivant lequel $\sum_{k=0}^{n} a_k Z^k \neq 0$ si $|Z| \leqq 1$ lorsque $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > 0$; voir [**15**, chap. 3, prob. 22]).

Démonstration du théorème 2.1. Nous nous occupons d'abord de l'inégalité de droite. Supposons $|x| \leqq C_3 n$, des restrictions sur C_3 étant portées plus loin. En vertu d'un théorème de G. P. Nevai [**12**], il existe C_{17} et C_{18} telles que

$$\lambda_n(x) \leqq C_{17} \min_{\pi_{n-1}(x)=1} \int_{-C_{18}n}^{C_{18}n} \pi_{n-1}{}^2(t) w(t) dt.$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x) &\leqq nC_{17}C_{18} \min_{\pi_{n-1}(x/C_{18}n)=1} \int_{-1}^{1} \pi_{n-1}^2\,(t)\, e^{-C_{18}n|t|} dt \\
&\leqq nC_{17}C_{18} \min_{\pi_{n-1}(x/C_{18}n)=1} \int_{-1}^{1} \pi_{n-1}^2\,(t)(1-t^2)^{-1/2} \frac{dt}{\cosh C_{18}nt} \\
&\leqq nC_{17}C_{18} \min_{\pi_{n-1}(x/C_{18}n)=1} \int_{-1}^{1} \pi_{n-1}^2\,(t)(1-t^2)^{-1/2} \frac{dt}{s_{[C_{19}n]}(C_{18}nt)} \\
&= nC_{17}C_{18}\mu_n(x/C_{18}n)
\end{aligned}$$

où μ_n désigne la fonction de Christoffel correspondant au poids $(1-t^2)^{-1/2} \times (s_{[C_{19}n]}(C_{18}nt))^{-1}$ sur $(-1, 1)$. En vertu d'un résultat de Szegö [**13**, p. 318], on a

$$\mu_n^{-1}\left(\frac{x}{C_{18}n}\right) = \frac{1}{\pi}\left\{n + \frac{1}{2} - \operatorname{Re} a \frac{h'(a)}{h(a)} + \frac{1}{2\sin\alpha} \operatorname{Im} a^{2n+1} \frac{\overline{h(a)}}{h(a)}\right\} s_{[C_{19}n]}(x)$$

où l'on a posé $\cos\alpha = x/C_{18}n$, $a = e^{i\alpha}$ et $s_{[C_{19}n]}(C_{18}n \cos\theta) = |h(e^{i\theta})|^2$, le polynôme h étant normalisé par les relations $h(Z) \neq 0$ si $|Z| < 1$ et $h(0) > 0$. Cette représentation est valable si C_{19} est assez petit et si nous supposons par exemple que $C_3 \leqq \min(1, C_{18}/2, C_{19}/2)$. Pour obtenir l'inégalité désirée, il suffira de montrer que l'on a

$$(3.1) \quad C_{20} \leqq n^{-1}\Lambda_n(x) \operatorname{Re}\left(-a\frac{h'(a)}{h(a)}\right) \leqq C_{21}$$

puisqu'alors le lemme 3.1 et l'inégalité de gauche de (3.1) entraîneront que

$$\mu_n\left(\frac{x}{C_{18}n}\right) \leqq C_{22}n^{-1}\Lambda_n(x)\, e^{-|x|}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-032-7 Published online by Cambridge University Press

et enfin

$$\lambda_n(x) \leqq C_{17}\, C_{18}\, C_{22}\, \Lambda_n(x)\, e^{-|x|} = C_2\, \Lambda_n(x)\, w(x).$$

Pour démontrer (3.1), observons d'abord qu'en vertu de la relation

$$h(Z)\overline{h(1/\bar{Z})} = s_{[C_{19}n]}\left(C_{18}n\,\frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right)\right)$$

et du lemme 3.3, $h(Z)$ admet pour zéros les points

$$\pm\, i\xi_k = \pm\, i\left(\frac{y_k}{C_{18}n} + \sqrt{1 + \frac{{y_k}^2}{(C_{18}n)^2}}\right)$$

où $k = 1, 2, \ldots, 2[([C_{19}n] + 1)/2\pi e]$ et que ses autres zéros ζ_k ont un module supérieur à $1 + C_{23}$. On a donc (nous écrivons ici $F(n) \sim G(n)$ pour signifier que le quotient $F(n)/G(n)$ reste compris entre deux bornes positives)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(-a\,\frac{h'(a)}{h(a)}\right) &= \sum_{k=1}^{2[([C_{19}n]+1)/2\pi e]} \frac{\xi_k \sin\alpha - 1}{1 - 2\xi_k \sin\alpha + {\xi_k}^2} + \sum_k \frac{a}{\zeta_k - a} \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\dfrac{y_k}{C_{18}n} + 1\right)\sin\alpha - 1}{1 - 2\sin\alpha\left(\dfrac{y_k}{C_{18}n} + 1\right) + \left(\dfrac{y_k}{C_{18}n} + 1\right)^2} + O(n) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\dfrac{k\pi}{C_{18}n} + 1\right)\sin\alpha - 1}{1 - 2\sin\alpha\left(\dfrac{k\pi}{C_{18}n} + 1\right) + \left(\dfrac{k\pi}{C_{18}n} + 1\right)^2} + O(n) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{(\sin\alpha - 1) + k/n}{(1 - \sin\alpha)(1 + k/n) + k^2/n^2} + O(n) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{((1 - x^2/n^2)^{1/2} - 1) + k/n}{(1 - (1 - x^2/n^2)^{1/2})\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) + k^2/n^2} + O(n) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n - x^2/n^2}{x^2/n^2 + x^2k/n^3 + k^2/n^2} + O(n) \\
&\sim n \sum_{k=1}^{n} \frac{k - x^2/n^2}{k^2 + x^2k/n + x^2} + O(n) \\
&\sim n \sum_{k=1}^{n} \frac{k - x^2/n}{k^2 + x^2} + O(n) \\
&\sim n \int_1^n \frac{t\,dt}{t^2 + x^2} - x^2 \int_1^n \frac{dt}{t^2 + x^2} + O(n) \\
&\sim n \log \frac{n^2 + x^2}{1 + x^2} + O(n) \\
&\sim n\,(\Lambda_n(x))^{-1}
\end{aligned}$$

ce qui démontre (3.1). Cette dernière relation nous permet également de démontrer l'inégalité de gauche du théorème 2.1; observons en effet que

$$\lambda_n(x) \geqq \min_{\pi_{n-1}(x)=1} \int_{-C_{24}n}^{C_{23}n} \pi_{n-1}^2(t) w(t) dt$$

$$= nC_{24} \min_{\pi_{n-1}(x/C_{24}n)=1} \int_{-1}^{1} \pi_{n-1}^2(t)\, e^{-C_{24}n|t|} dt$$

$$\geqq nC_{25} \min_{\pi_{n-1}(x/C_{24}n)=1} \int_{-1}^{1} \pi_{n-1}^2(t) \frac{\sqrt{1-t^2}}{s_{[C_{24}n]}(C_{24}nt)} dt$$

$$= nC_{25}\nu_n\left(\frac{x}{C_{24}n}\right)$$

(la dernière inégalité ayant lieu en vertu du lemme 3.1) où ν_n désigne la fonction de Christoffel relative au poids $(1 - t^2)^{1/2} (s_{[C_{24}n]}(C_{24}nt))^{-1}$ sur $(-1, 1)$. Il est aisé de voir que l'on a

$$\nu_n^{-1}\left(\frac{x}{C_{24}n}\right) = \frac{1}{\pi \sin^2 \alpha}\left\{n + \frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, a \frac{h'(a)}{h(a)} + \frac{1}{2 \sin \alpha} \mathrm{Im}\, a^{2n+1} \frac{\overline{h(a)}}{h(a)}\right\} \times s_{[C_{24}n]}(x)$$

en faisant un calcul semblable à celui que l'on trouve dans le volume de Szegö. En utilisant la relation (3.1), on obtient

$$\nu_n^{-1}\left(\frac{x}{C_{24}n}\right) \leqq C_{26}n(\Lambda_n(x))^{-1} e^{|x|}$$

et enfin

$$\lambda_n(x) \geqq C_1 \Lambda_n(x)\, w(x)$$

ce qui complète la démonstration du théorème 2.1. Il est intéressant de noter la différence entre cette démonstration et celle que l'on trouve dans le chapitre 5 du volume de Freud déjà cité traitant le cas où le poids w_Q admet un support compact; dans ce dernier cas, le terme $\mathrm{Re}\, a\, h'(a)/h(a)$ ne contribue qu'à l'estimation de l'erreur alors qu'ici c'est lui qui détermine l'ordre de grandeur de $\lambda_n(x)$. (Nous profitons de l'occasion pour corriger une erreur qui s'est glissée dans [**4**]. La relation (6.18) devrait se lire (page 251):

$$\lambda_n^{-1}(d\alpha_Q; x) = \frac{Q_\nu(\xi)}{\pi}\left\{n - \frac{1}{2} - \mathrm{Re}\left[e^{i\gamma} \frac{\phi_\nu^{*\prime}(d\mu_Q; e^{i\gamma})}{\phi_\nu^*(d\mu_Q; e^{i\gamma})}\right] + \frac{1}{2 \sin \gamma} \mathrm{Im}\left[e^{(2n-1)i\gamma} \frac{\phi_\nu^*(d\mu_Q; e^{i\gamma})}{\overline{\phi_\nu^*(d\mu_Q; e^{i\gamma})}}\right]\right\};$$

les parenthèses extérieures sont absentes.)

4. L'approximation dans l'espace L. Considérons une fonction $f(x)$ absolument continue telle que fw et $f'w \in L$. Il suit du théorème 2.1 (voir Freud [**11**]) que l'inégalité du type de Jackson suivante est valable:

$$\text{(4.1)} \quad \epsilon_n(f) \leqq C_{27}||\Lambda_n f'w||.$$

Nous allons en déduire le théorème 2.2.

Démonstration du théorème 2.2. Ecrivons $f = f_1 + f_2$ où $f_1(x) = 0$ si $|x| > n^{1-\delta}$ et $f_2(x) = 0$ si $|x| \leqq n^{1-\delta}$. On aura alors

$$\epsilon_n(f) \leqq \epsilon_n(f_1) + \epsilon_n(f_2) \leqq \epsilon_n(f_1) + \int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx.$$

Soit

$$\varphi_1(x) = \log n e^{|x|} \int_x^{x+(\log n)^{-1}} f_1(t)w(t)dt.$$

On a:

$$\begin{aligned} ||(f_1 - \varphi_1)w|| &\leqq \log n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{(\log n)^{-1}} |f_1(x)w(x) - f_1(x+t)w(x+t)|dtdx \\ \text{(4.2)} \qquad &= \log n \int_0^{(\log n)^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)w(x) - f_1(x+t)w(x+t)|dxdt \\ &\leqq \omega(f_1, (\log n)^{-1}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) = \varphi_1(x) + \log n\, e^{|x|}(f_1(x + (\log n)^{-1})w(x + (\log n)^{-1}) \\ - f_1(x)\, w(x)) \end{aligned}$$

de telle sorte que, utilisant l'inéquation (4.2),

$$\begin{aligned} ||\varphi_1'w|| &\leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_1(x)|w(x)dx \\ \text{(4.3)} \qquad &+ \log n \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x + (\log n)^{-1})w(x + (\log n)^{-1}) - f_1(x)w(x)|dx \\ &\leqq \omega(f_1, (\log n)^{-1}) + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|w(x)dx + \log n\, \omega(f_1, (\log n)^{-1}). \end{aligned}$$

De plus, en vertu de (4.3),

$$\begin{aligned} ||\Lambda_n \varphi_1'w|| &\leqq C_{28}\delta^{-1}(\log n)^{-1}||\varphi_1'w|| \\ &\leqq 3\, C_{28}\delta^{-1}\, \omega(f_1, (\log n)^{-1}). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-032-7 Published online by Cambridge University Press

Le résultat suit de ces inégalités puisqu'en utllisant (4.1), on obtient

$$\begin{aligned}\epsilon_n(f) &\leqq \|(f_1 - \varphi_1)w\| + \epsilon_n(\varphi_1) + \int_{|x|\geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx \\ &\leqq \omega(f_1, (\log n)^{-1}) + 3C_{27}C_{28}\delta^{-1}\omega(f_1, (\log n)^{-1}) \\ &\quad + \int_{|x|\geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx \\ &\leqq C_{29}\delta^{-1}\omega(f, (\log n)^{-1}) + \int_{|x|\geqq n^{1-\delta}} |f(x)|w(x)dx \\ &\leqq C_4\omega_n^{(\delta)}(f, (\log n)^{-1}).\end{aligned}$$

5. L'approximation des fonctions différentiables. Le résultat suivant nous sera utile dans la démonstration du théorème 2.3.

LEMMA 5.1. *Quelque soit $\rho > 0$, on a*

$$\int_{|x|\geqq \nu^{1+\rho}} |p_\nu(x)|w(x)dx \leqq C_{30}(\rho)\, e^{(-1/3)\nu^{1+\rho}} \int_{|x|\leqq \nu^{1+\rho}} |p_\nu(x)|w(x)dx.$$

Démonstration. Soit $p_\nu(x)$ un polynôme pour lequel

$$\int_{|x|\leqq \nu^{1+\rho}} |p_\nu(x)|w(x)dx = 1$$

et posons

$$P(x) = \int_0^x p_\nu(t)dt.$$

Si $|x| \leqq \nu^{1+\rho}$, on a

$$|P(x)| = \left|\int_0^x p_\nu(t)\, e^{-|t|}e^{|t|}dt\right| \leqq e^{|x|}$$

de telle sorte que si $0 < \rho_1 < \rho$ et $|x| \leqq \nu^{1+\rho_1}$ on aura $|P(x)| \leqq e^{\nu^{1+\rho_1}}$. En vertu de l'inégalité de Chebychev, on aura

$$|P(x)| \leqq e^{\nu^{1+\rho_1}} \left|T_{\nu+1}\left(\frac{x}{\nu^{1+\rho_1}}\right)\right| \leqq e^{\nu^{1+\rho_1}}\, 2^{\nu+2}\left(\frac{|x|}{\nu^{1+\rho_1}}\right)^{\nu+1}$$

(T_k désignant le $k$ième polynôme de Chebychev) pour $|x| \geqq \nu^{1+\rho_1}$. En particulier, si $|x| \geqq \nu^{1+\rho}$, on a

$$|P(x)|x^2\, e^{-|x|} \leqq |x|^{\nu+3}\, e^{-|x|}e^{\nu^{1+\rho_1}}\, 2^{\nu+2}\, \nu^{-(1+\rho_1)(1+\nu)}$$

et, puisque le maximum de $|x|^{\nu+3}\, e^{-|x|}$ est atteint lorsque $|x| = \nu + 3$,

$$\begin{aligned}|P(x)|x^2\, e^{-|x|} &\leqq \nu^{(1+\rho)(\nu+3)-(1+\rho_1)(\nu+1)}\, e^{-\nu^{1+\rho}+\nu^{1+\rho_1}}\, 2^{\nu+2} \\ &\leqq C_{31}(\rho)\, e^{(-1/2)\nu^{1+\rho}}.\end{aligned}$$

Ainsi, si $|x| \geqq \nu^{1+\rho}$ et si $x \leqq t \leqq x + 1$ (ou si $x - 1 \leqq t \leqq x$) on a

$$|P(t)| \leqq C_{31}(\rho)t^{-2}\, e^{|t|}\, e^{(-1/2)\nu^{1+\rho}} \leqq e\, C_{31}(\rho)\, x^{-2}\, e^{|x|}\, e^{(-1/2)\nu^{1+\rho}}.$$

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient alors

$$|P'(x)| = |p_\nu(x)| \leqq e\, C_{31}(\rho)\, x^{-2}\, e^{|x|}\, e^{(-1/2)\nu^{1+\rho}}\, (\nu + 1)^2$$
$$\leqq C_{32}(\rho)\, x^{-2}\, e^{|x|}\, e^{(-1/3)\nu^{1+\rho}}.$$

En intégrant cette dernière relation,

$$\int_{|x| \geqq \nu^{1+\rho}} |p_\nu(x)| w(x) dx \leqq C_{30}(\rho)\, e^{(-1/3)\nu^{1+\rho}} \int_{\nu^{1+\rho}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \leqq C_{30}(\rho)\, e^{(-1/3)\nu^{1+\rho}}$$

ce qui complète la démonstration du lemme 5.1.

Démonstration du théorème 2.3. Ecrivons, comme dans la démonstration du théorème 2.2, que $f = f_1 + f_2$. Soit $\nu = [n^{(1-\delta)/2}]$. Pour tout polynôme p_ν, on a, utilisant (4.1):

$$\epsilon_n(f_1) \leqq C_{33}\left(\delta^{-1}(\log n)^{-1} \int_{|x| \leqq n^{1-\delta}} |f_1'(x) - p_\nu(x)| w(x) dx \right.$$
$$\left. + \int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |p_\nu(x)| w(x) dx\right).$$

Choisissons p_ν de telle sorte que

$$||(f_1' - p_\nu)w|| = \epsilon_\nu(f_1').$$

On aura alors, en vertu du théorème 2.2 et de (2.1)

$$\int_{|x| \leqq n^{1-\delta}} |f_1'(x) - p_\nu(x)| w(x) dx \leqq C_{34}\delta^{-1}\omega(f_1', (\log \nu)^{-1})$$
$$\leqq C_{35}\delta^{-1}\omega(f_1', (\log n)^{-1})$$

et aussi

$$\int_{|x| \leqq n^{1-\delta}} |p_\nu(x)| w(x) dx \leqq ||p_\nu w|| \leqq 2||f_1' w||$$

de telle sorte qu'une application du lemme 5.1 nous donne

$$\int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |p_\nu(x)| w(x) dx \leqq 2||f_1' w|| C_{30}(\delta)\, e^{(-1/3)n^2}.$$

Ainsi, on a

$$\epsilon_n(f) \leqq C_{36}(\delta)(\log n)^{-1}\, \omega(f_1', (\log n)^{-1}) + C_{37} e^{(-1/3)n^2}\, ||f_1' w|| \tag{5.1}$$

d'où

$$\epsilon_n(f) \leqq C_{36}(\delta)(\log n)^{-1}\omega(f', (\log n)^{-1}) + C_{37}\, e^{(-1/3)n^2}\, ||f' w||$$
$$+ \int_{|x| \geqq n^{1-\delta}} |f(x)|\, e^{-|x|} dx$$

ce qui est l'énoncé du théorème pour $r = 1$. En répétant ce raisonnement, on obtient l'inégalité correspondant à (5.1) pour $\epsilon_n(f_1')$, $\epsilon_n(f_1'')$, ... et finalement l'énoncé du théorème 2.3.

6. Une alternative pour le module de continuité.

Démonstration du théorème 2.4. Soit $f = f_1 + f_2 + f_3$ où $\operatorname{supp} f_1 = [0, n]$, $\operatorname{supp} f_2 = [-n, 0]$ et $\operatorname{supp} f_3 = (-\infty, -n] \cup [n, \infty)$. Posons

$$g_i(x) = \frac{e^{|x|}}{\varphi_n(x)} \int_x^{x+\varphi_n(x)} f_i(t)w(t)dt \quad (i = 1, 2).$$

En vertu de l'inégalité (4.1),

$$\begin{aligned} \epsilon_n(f) &\leqq ||(f_1 - g_1)w|| + C_{38} \int_0^n \Lambda_n(x)|g_1'(x)|w(x)dx \\ &+ ||(f_2 - g_2)w|| + C_{38} \int_{-n}^0 \Lambda_n(x)|g_2'(x)|w(x)dx \\ &+ \int_{|x|\geqq n} |f(x)|\, e^{-|x|}dx. \end{aligned} \tag{6.1}$$

En ce qui concerne le premier terme, on a

$$\begin{aligned} (g_1(x) - f_1(x))w(x) &= \frac{1}{\varphi_n(x)} \int_x^{x+\varphi_n(x)} (f_1(t)w(t) - f_1(x)w(x))dt \\ &= \int_0^1 (f_1(x + t\varphi_n(x))w(x + t\varphi_n(x)) - f_1(x)w(x))dt \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} ||(f_1 - g_1)w|| &\leqq \int_0^1 \int_0^n |f_1(x + t\varphi_n(x))w(x + t\varphi_n(x)) - f_1(x)w(x)|dxdt \\ &\leqq \omega^*(f_1, n). \end{aligned} \tag{6.2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} g_1'(x) = \left(1 - \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right)g_1(x) &+ e^x \frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)} f_1(x + \varphi_n(x))w(x + \varphi_n(x)) \\ &+ \frac{e^x}{\varphi_n(x)} (f_1(x + \varphi_n(x))w(x + \varphi_n(x)) - f_1(x)w(x)). \end{aligned}$$

Le second terme de (6.1) sera alors majoré en trois étapes: d'abord

$$\begin{aligned} C_{38} &\int_0^n \Lambda_n(x) \frac{1}{\varphi_n(x)} |f_1(x + \varphi_n(x))w(x + \varphi_n(x)) - f_1(x)w(x)|dx \\ &\leqq C_{38}C_{39} \int_0^n |f_1(x + \varphi_n(x))w(x + \varphi_n(x)) - f_1(x)w(x)|dx \\ &\leqq C_{38}C_{39}\omega^*(f_1, n). \end{aligned} \tag{6.3}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-032-7 Published online by Cambridge University Press

Passons ensuite à

$$(6.4)\quad C_{38}\int_0^n \Lambda_n(x)\frac{|\varphi_n'(x)|}{\varphi_n(x)}|f_1(x+\varphi_n(x))w(x+\varphi_n(x))|dx;$$

pour évaluer cette intégrale, observons que par construction

$$\varphi_n'(x)\sim\begin{cases}0 & \text{si } 0<x<n^{1/2}\\ \log^{-2}\left(\dfrac{n+ex}{1+x}\right)\dfrac{n-e}{n+ex}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } n^{1/2}<x<n\end{cases}$$

de telle sorte qu'une majoration de l'expression (6.4) est donnée par

$$(6.5)\quad \begin{aligned}&C_{40}n^{-1/2}\int_{\sqrt{n}}^n \Lambda_n(x)\,|f_1(x+\varphi_n(x))w(x+\varphi_n(x))|dx\\ &\qquad \leqq C_{41}n^{-1/2}\left\{\omega^*(f_1,n)+\int_0^n \Lambda_n(x)\,|f_1(x)|w(x)dx\right\}.\end{aligned}$$

Finalement, on aura:

$$(6.6)\quad \begin{aligned}&C_{38}\int_0^n \Lambda_n(x)\left|1-\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right|\frac{1}{\varphi_n(x)}\left|\int_x^{x+\varphi_n(x)} f_1(t)w(t)dt\right|dx\\ &\leqq C_{42}\left\{\int_0^n \Lambda_n(x)\left|1-\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right|\frac{1}{\varphi_n(x)}\right.\\ &\qquad\times\int_x^{x+\varphi_n(x)}|f_1(t)w(t)-f_1(x)w(x)|dtdx\\ &\qquad\left.+\int_0^n \Lambda_n(x)\left|1-\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(x)}\right||f_1(x)|w(x)\,dx\right\}\\ &\qquad\qquad\leqq C_{43}\omega^*(f_1,n)+C_{44}\int_0^n \Lambda_n(x)\,|f_1(x)|w(x)dx.\end{aligned}$$

En considérant simultanément (6.1), (6.2), (6.3), (6.5) et (6.6), on obtient, par symétrie:

$$\epsilon_n(f)\leqq C_{45}\omega^*(f,n)+C_{46}\int_{-n}^n \Lambda_n(x)\,|f(x)|w(x)dx+\int_{|x|\geqq n}|f(x)|w(x)dx \leqq C_6\omega^*(f,n)$$

ce qui termine la démonstration.

7. L'approximation unilatérale.

Démonstration du théorème 2.5. Soit $f=f_1+f_2$ où $f_1(x)=0$ si $|x|\geqq C_{47}n$ et $f_2(x)=0$ si $|x|\leqq C_{47}n$ la constante positive C_{47} étant choisie telle que

$$(7.1)\quad \lambda_n(x)\leqq C_2\Lambda_n(x)w(x)\quad \text{si } |x|\leqq 10C_{47}n.$$

En vertu de la condition (2.2), on a

$$-\frac{A+B(C_{47}n)^{2m}}{(C_{47}n)^{[2\sqrt{n}]}}x^{[2\sqrt{n}]}\leqq f_2(x)\leqq\frac{A+B(C_{47}n)^{2m}}{(C_{47}n)^{[2\sqrt{n}]}}x^{[2\sqrt{n}]},\quad x\in\mathbf{R}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A + B(C_{47}n)^{2m}}{(C_{47}n)^{[2\sqrt{n}]}} x^{[2\sqrt{n}]} e^{-|x|}\,dx$$

(7.2) $$\leqq C_{48}(A, B, m)\,(C_{49}n)^{2m-[2\sqrt{n}]}\left(\frac{[2\sqrt{n}]}{e}\right)^{[2\sqrt{n}]} \leqq C_9(A, B, m)\,e^{(-1/3)\sqrt{n}\log n}.$$

En ce qui concerne la fonction f_1, il suit d'un résultat de Nevai [**10**] qu'il existe q_{2n} et Q_{2n} tels que

(7.3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} (Q_{2n}(x) - q_{2n}(x))e^{-|x|}\,dx \leqq C_{50}(r) \int_{|\xi| \leqq C_{47}n} \phi_n(\xi)^r L_n(\xi)|d\,f^{(r)}(\xi)|$$

où $\xi_1 > \xi_2 > \ldots > \xi_{n^*}$ sont les zéros de la fonction

$$\varphi_n(x, \xi) = \tilde{p}_n(x)\tilde{p}_{n-1}(\xi) - \tilde{p}_n(\xi)\tilde{p}_{n-1}(x)$$

(les polynômes $\tilde{p}_n$ sont orthonormaux relativement au poids $w(x)$, n^* est le degré du polynôme $\varphi_n(x, \xi)$; ξ est l'un de ces zéros, soit $\xi = \xi_j$),

$$\phi_n(\xi) = \bar{\xi} - \bar{\bar{\xi}} = \xi_{\max(j-[(r-1)/2]+1,1)} - \xi_{\min(j+[(r-1)/2]+1,n^*)}$$

et

$$L_n(\xi) = \max_{\bar{\bar{\xi}} \leqq t \leqq \bar{\xi}} \lambda_n(t).$$

Nous pouvons majorer le membre de droite de (7.3) de la facon suivante: d'abord, en vertu de l'inégalité de Posse (voir Freud [**4**]), on a

$$\sum_{\xi_k < \xi} \lambda_n(\xi_k)e^{\xi_k} \leqq \int_{-\infty}^{\xi} e^x e^{-|x|}dx \leqq \sum_{\xi_k \leqq \xi} \lambda_n(\xi_k)e^{\xi_k}$$

de telle sorte que si $10C_{47}n \geqq \xi_i > \xi_{i+1} \geqq 0$ on a

(7.4) $$\xi_i - \xi_{i+1} = \int_{\xi_{i+1}}^{\xi_i} e^x e^{-x}dx \leqq \lambda_n(\xi_i)e^{\xi_i} + \lambda_n(\xi_{i+1})e^{\xi_{i+1}} \leqq C_{51}\left(\left(\log\frac{n + e\xi_i}{1 + \xi_i}\right)^{-1} + \left(\log\frac{n + e\xi_{i+1}}{1 + \xi_{i+1}}\right)^{-1}\right) \leqq C_{52}$$

(en vertu de (7.1)); de même, si $10C_{47}n \geqq \xi_l$ est le plus petit zéro non négatif de $\varphi_n(x, \xi)$, on déduit de l'inégalité de Posse que

(7.5) $\xi_l \leqq C_{53}$.

Utilisant le fait que les zéros ξ_k de $\varphi_n(x, \xi)$ et les zéros x_k de $\tilde{p}_n(x)$ se séparent mutuellement et utilisant le fait que ces derniers sont disposés symétriquement de part et d'autre de 0 et enfin le fait que si n est grand il y a au moins un zéro dans $[-1, 1]$ (voir Freud [**4**, chapitre 2],) on déduit des relations (7.4) et (7.5)

$$\xi_i - \xi_{i+1} \leqq C_{54}$$

pour tous les zéros ξ_i situés dans l'intervalle $(-10C_{47}n, 10C_{47}n)$. Par suite, en utilisant la relation

$$\xi_i - \xi_{i+r} \leqq C_{55}(r)\left(\log \frac{n + e|\xi_i|}{1 + |\xi_i|}\right)^{-1}$$

valable pour tous les zéros ξ_i situés dans $(-C_{47}n, C_{47}n)$, nous obtenons pour le membre de droite de (7.3) la majoration

$$C_{56}(r) \int_{|x| \leqq C_{47}n} \Lambda_n^r(x) w(x) |d\, f^{(r)}(x)|.$$

Compte tenu de (7.2), cette dernière inégalité termine la démonstration du théorème où

$$p_{2n}(x) = q_{2n}(x) - \frac{A + B(C_{47}n)^{2m}}{(C_{47}n)^{[2\sqrt{n}]}}$$

et où

$$p_{2n}(x) = Q_{2n}(x) + \frac{A + B(C_{47}n)^{2m}}{(C_{47}n)^{[2\sqrt{n}]}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Freud, *On polynomial approximation with respect to general weights*, Lecture Notes in Math. *399* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1974), 149–179.
2. ——— *On the theory of onesided L_1-approximation by polynomials*, ISNM *25* (Birkhauser Verlag, Basel und Stuttgart, 1974), 285–303.
3. M. Riesz, *Sur le problème des moments II*, Arkiv Matem. Astr. Fys. *16* (1922).
4. G. Freud, *Orthogonal polynomials* (Pergamon Press, Oxford et Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971).
5. M. M. Djerbachian, *Sur la meilleure approximation polynomiale pondérée sur l'axe réel*, Doklady Akad. Nauk URSS *84* (1952), 1123–1126 (en russe).
6. G. Freud, *On weighted polynomial approximation on the whole real axis*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *20* (1969), 223–225.
7. ——— *Weighted polynomial approximation and K-Functionals*, Theory of approximation with applications (Academic Press, New York, 1976), 9–23.
8. ——— *Sur une classe de polynômes orthogonaux*, Mat. Zametki *9* (1971), 511–520 (en russe).
9. ——— *Über einseitige Approximation durch Polynome I*, Acta Math. Hung. *6* (1965), 12–28.
10. G. P. Névai, *Einseitige Approximation durch Polynome, mit Anwendungen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *23* (1972), 495–506.
11. G. Freud, *Extension of the Dirichlet-Jordan convergence criterion to a general class of orthogonal polynomial expansion*, Acta. Math. Acad. Sci. Hung. *25* (1974), 109–122.
12. G. P. Névai, *Sur les polynômes orthonormaux sur l'axe réel relativement au poids* $|x|^\alpha \exp - |x|^\beta$ *I*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. *24* (1973), 335–342 (en russe).
13. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. *23*, 3 ième ed., 1967.
14. G. Freud, *Weighted polynomial approximation and K-functionals*, Theory of approximation with applications (Academic Press, New York, 1976), 9–23.
15. G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Springer-Verlag, Berlin, 1964).

Ohio State University,
Columbus, Ohio;
Université de Montréal,
Montréal, Québec