Canad. Math. Bull. Vol. **24** (1), 1981

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE FONCTIONNELLE ANALYTIQUE*

PAR
JACQUES BÉLAIR

Nous considérons dans cette note une classe d'équations différentielles fonctionnelles linéaires dont les coefficients sont analytiques; des résultats sur l'ordre des solutions et leur comportement asymptotique seront obtenus.

Il s'agit d'une généralisation à des équations du deuxième ordre d'une propriété d'équations d'ordre un [2]: la démonstration du théorème principal demeure valable dans ce dernier cas.

1. Considérons l'équation

$$f''(z)+\sum_{p=1}^{n} a_p(z)f'(\lambda_p z)+\sum_{j=1}^{m} b_j(z)f(\sigma_j z)=0 \tag{$*$}$$

où chaque coefficient $a_p(z)$, $b_j(z)$ est analytique dans le disque $|z|\le R$ du plan complexe, n, m sont des entiers fixés, et λ_p, σ_j, $1\le p\le n$, $1\le j\le m$, des nombres complexes du disque unité fermé.

La théorie des séries majorantes avec les bornes de Cauchy donne directement le

THEOREME A. *L'équation* $(*)$ *possède une solution analytique dans le disque* $|z|\le R$ *uniquement déterminée par les conditions initiales* $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$, *pour deux constantes* α, β *fixées.*

En particulier, si les coefficients sont des fonctions entières, la solution de $(*)$ est aussi une fonction entière.

Ceci est une extension des résultats classiques sur l'existence de solutions des équations différentielles ordinaires, cas particuliers de l'équation $(*)$ avec $\lambda_p=\sigma_j=1$.

2. Le principal résultat est le suivant

THEOREME B. *Si, dans l'équation* $(*)$, *chacun des coefficients* $a_p(z)$, $b_j(z)$ *est une fonction entière d'ordre au plus* $\rho<+\infty$, *et* $0<|\lambda_p|$, $|\sigma_j|<1$, *alors toute solution est d'ordre au plus* ρ.

Reçu par les rédacteurs le 11 decembre 1978.
* Etude subventionnée par le Conseil national de recherches du Canada.

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-006-x Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Selon la notation habituelle, $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$; posons

$$A_r = \max_{1 \le p \le n} \{M_{a_p}(r)\}, \qquad B_r = \max_{1 \le j \le m} \{M_{b_j}(r)\},$$

$$\lambda = \max_{1 \le j \le n} \{|\lambda_j|\} \quad \text{et} \quad \sigma = \max_{1 \le p \le m} \{|\sigma_p|\}$$

Il est bien connu [1] que

$$M_f(r) \le |f(0)| + rM_{f'}(r) \quad \text{et} \quad M_{f'}(r) \le |f'(0)| + rM_{f''}(r).$$

On a donc

$$\begin{aligned} M_{f''}(r) &\le \sum_{p=1}^{n} M_{a_p}(r) \cdot M_{f'}(|\lambda_p|\, r) + \sum_{j=1}^{m} M_{b_j}(r) M_f(|\sigma_j|\, r) \\ &\le M_{f'}(\lambda r) \cdot \sum_{p=1}^{n} M_{a_p}(r) + M_f(\sigma r) \cdot \sum_{j=1}^{m} M_{b_j}(r) \\ &\le n \cdot M_{f'}(\lambda r) \cdot A_r + m \cdot M_f(\sigma r) \cdot B_r \end{aligned}$$

Utilisant le théorème des trois cercles d'Hadamard appliqué aux cercles de rayon 1, σr et r, on a

$$\log[M_f(\sigma r)] \le \left(\frac{-\log \sigma}{\log r}\right) \log[M_f(1)] + \left(\frac{\log \sigma r}{\log r}\right) \log[M_f(r)]$$

et de même façon pour $|z| = 1$, λr, r,

$$\log[M_{f'}(\lambda r)] \le \left(\frac{-\log \lambda}{\log r}\right) \log[M_{f'}(1)] + \left(\frac{\log \lambda r}{\log r}\right) \log[M_{f'}(r)].$$

Posons $D = \max\{(-\log \lambda) \cdot \log[M_{f'}(1)], (-\log \sigma) \log[M_f(1)]\}$, $C_r = \max\{A_r, B_r\}$ et $\tau = \max\{\lambda, \sigma\}$; pour r assez grand,

$$|f(0)| + r \cdot |f'(0)| + r^2 \cdot M_{f''}(r) \ge |f'(0)| + r \cdot M_{f''}(r)$$

et

$$1 \le |f(0)| + r \cdot |f'(0)| + r^2 \cdot M_{f''}(r) \le 3r^2 M_{f''}(r).$$

Donc

$$\log M_{f''}(r) \le \frac{D}{\log r} + \log C_r + \log(n+m) + \frac{\log \tau r}{\log r} \cdot \log(3r^2 M_{f''}(r)),$$

$$\frac{-\log \tau}{\log r} \log M_{f''}(r) \le P + \log C_r + 2 \log r \quad \text{où} \quad P = 1 + \log 3 + \log(n+m),$$

$$\log(-\log \tau) + \log\log M_{f''}(r) \le \log\log r + \log(P + \log C_r + 2\log r),$$

et enfin

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_{f''}(r)}{\log r} \le \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log C_r}{\log r} \le \rho.$$

L'ordre de $f''(z)$, donc de $f(z)$ [1], est ainsi au plus ρ.

Notons qu'il est essentiel que chaque "perturbation" λ_j, σ_p soit intérieure au disque unité; l'équation

$$(**) \qquad f''(z)+f(z)+f(z/2)=0$$

avec la condition initiale $f(0)=1$, $f'(0)=0$, possède la solution

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1+\left(\frac{1}{4^j}\right)\right) z^{2n}$$

obtenue par substitution formelle d'une série entière dans l'équation (**), qui est d'ordre un.

3. Dans le cas particulier de l'équation

$$(***) \qquad f''(z)+p(z)f(\lambda z)=0$$

où $0<\lambda<1$ et la fonction $p(z)$ est entière, et prend des valeurs réelles sur l'axe réel, il est clair que l'ordre de la solution $f(z)$ est exactement celui du coefficient $p(z)$.

De plus, il est bien connu [1] qu'une fonction de type exponentiel nul ne peut être bornée sur l'axe réel.

Il en résulte le

THEOREME C. *L'équation* (***), *lorsque* $p(z)$ *est d'ordre* $\rho<1$, *ne possède aucune solution non-triviale et bornée sur l'axe réel.*

De plus, un théorème de Waltman [3] affirme que lorsque $p(x)\ge 0$ et $\int^{\infty} p(u)\,du=+\infty$, toutes les solutions de l'équation (***) sont oscillantes.

Dans un cas particulier, on a donc le

COROLLAIRE. *L'équation* (***) *lorsque* $p(z)$ *se réduit à une constante réelle et positive, possède seulement des solutions oscillantes et non-bornées* (*si non-triviales*).

Pour cette même équation (***), on peut comparer les types τ_f de la solution $f(z)$ et τ_p du coefficient $p(z)$. En effet, de (***) il vient, si $p(z)$ est d'ordre ρ,

$$M_{f''}(r) \le M_p(r) M_f(\lambda r)$$

donc,

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_{f''}(r)}{r^\rho} \le \limsup_{r\to\infty} \left[\frac{\log M_p(r)}{r^\rho} + \frac{\log M_f(\lambda r)}{r^\rho}\right]$$

et

$$\tau_f \leq \tau_p + \lambda^\rho \cdot \tau_f.$$

Si, de plus $\tau_f < +\infty$, alors

$$\tau_f \leq \frac{\tau_p}{1-\lambda^\rho}.$$

Une borne pour le type de $f(z)$, solution de l'équation (***) est ainsi obtenue.

Cette borne peut être atteinte, par exemple dans l'équation

$$f''(z) - e^{1/4} f(3z/4) = 0$$

dont une solution est $f(z) = e^z$.

Il serait intéressant de voir si pour un coefficient $p(z)$ de type fini, la solution $f(z)$ doit nécessairement être de type fini.

Remarquons enfin que le théorème B se généralise à une équation possédant un nombre infini de coefficients, des conditions supplémentaires sur leur croissance devant toutefois être imposées.

Bibliographie

1. R. P. Boas, *Entire Functions.* Academic Press, 1954.

2. E. Bowen, A. Feldstein and G. Morris, *The Phragmen-Lindelöf Principle and a class of Functional Differential Equations*, in Ordinary Differential Equations. L. Weiss éd., Academic Press, N.Y. 1972.

3. P. Waltman, *A Note on an Oscillation Criterion for an Equation with a Retarded Argument.* Can. Math. Bulletin, **11,** (1968), pp. 593–595.

Université de Montreal
Montréal, Canada
Addresse actuelle:
Center for App. Mathematics
Cornell Univ. Ithaca, N.Y.