Can. J. Math., Vol. XXXIV, No. 3, 1982, pp. 593–620

# RESOLUTION D'EQUATIONS ASSOCIEES A UN SYSTEME DE TCHEBYCHEFF

SERGE DUBUC ET JEAN SAVOIE

**1. Introduction.** Soit $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\}$ un système de Tchebycheff de dimension $m$, c'est-à-dire les fonctions $f_j(x)$ sont des fonctions réelles continues définies sur un intervalle ouvert $(a, b)$ et toute fonction de la forme $g(x) = \sum_{j=1}^m c_j f_j(x)$ admet au plus $m - 1$ racines dans $(a, b)$ lorsqu'au moins un des coefficients $c_j$ diffère de 0. Notre point de départ est un théorème dû à Krein [**3**]. On se limite au cas où la dimension $m$ est paire, $m = 2n$. Ce théorème dit que la totalité $\Omega$ des points $(y_j)_{j=1}^{2n}$ de $\mathbf{R}^{2n}$ qui se représentent ainsi $y_j = \sum_{i=1}^n p_i f_j(x_i)$ où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont $n$ points distincts de $(a, b)$ et où $p_i > 0$, $1 \leqq i \leqq n$, forme effectivement un ouvert convexe de $\mathbf{R}^{2n}$. Les systèmes d'équations que nous voulons traiter sont justement les équations:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i f_j(x_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n$$

$(y_j)_{j=1}^{2n}$ est un point donné de $\Omega$ et les inconnues sont les nombres $(p_i)_{i=1}^n$, $(x_i)_{i=1}^n$.

L'importance de ce système d'équations est amplifiée par le fait suivant. Si $\mu$ est une mesure (positive) portée par l'invervalle $(a, b)$ et dont le support contient au moins $n$ points, alors les nombres

$$y_j = \int_a^b f_j(x) d\mu(x)$$

donne lieu à un point de $\Omega$. Les $y_j$ ainsi obtenus sont appelés les moments de la mesure $\mu$ par rapport aux fonctions $f_j(x)$. De façon réciproque, résoudre le système (I), c'est trouver une mesure discrète $\mu$ dont le support contient précisément $n$ points distincts de $(a, b)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, telle que

$$y_j = \int_a^b f_j(x) d\mu(x), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Pour résoudre le système (I), nous proposons l'algorithme suivant, qui suppose que les systèmes partiels $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2k}\}$ pour $k$ s'étalant de 1 à $n$ sont tous des systèmes de Tchebycheff. On procède par récurrence sur $k$ en couplant les équations deux par deux. La première étape, $k = 1$,

Reçu le 22 juillet, 1980 et sous forme revis e, le 29 mai, 1981.

consiste à résoudre le système de deux équations $pf_1(x) = y_1$ et $pf_2(x) = y_2$; ce qui est très facile. Supposons que les $(n - 1)$ premières étapes aient été franchies et qu'en particulier l'on ait trouvé une solution $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ du système des $2n - 2$ équations:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n - 2.$$

Nous posons

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i), \quad 1 \leqq j \leqq 2n \quad \text{et}$$

$$y_j(t) = \zeta_j + t(y_j - \zeta_j).$$

Pour trouver la solution du système (I), nous entreprenons la recherche de $2n$ fonctions $p_i(t)$ et $x_i(t)$, $1 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq t \leqq 1$ telles que

$$(\mathrm{I_t}) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_j(x_i(t)) = y_j(t).$$

On détermine les valeurs $p_i(0)$ et $x_i(0)$ dans un premier temps. $x_i(0) = \xi_i$ si $1 \leqq i \leqq n - 1$. Pour localiser l'abscisse $x_n(0)$, on trouve d'abord $2n$ nombres $\beta_j$ tels que

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(\xi_i) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j'(\xi_i) &= 0 \end{aligned}\right\} 1 \leqq i \leqq n - 1$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \beta_j (y_j - \zeta_j) = 0.$$

Il s'agit de trouver une solution non triviale à un système homogène de $(2n - 1)$ équations linéaires à $n$ inconnues, ceci est toujours possible. On introduit la fonction

$$B(x) = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(x)$$

et on trouvera une et une seule racine impaire $\xi$ à l'équation $B(x) = 0$. On posera $x_n(0) = \xi$. Si $\xi$ diffère de toutes les autres racines $\xi_i$ nous dirons qu'il s'agit du cas régulier et l'on pose alors $p_i(0) = \pi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$ et $p_n(0) = 0$. Dans le cas contraire, si $\xi = \xi_k$, on pose $p_i(0) = \pi_i$ si $i \neq k$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $p_k(0) = p_n(0) = \pi_k/2$. Le nombre $\xi$ sera appelé la racine cachée. Les cas est régulier lorsque la racine $\xi$ est simple.

Dans un deuxième temps, on évalue $p_i(t)$ et $x_i(t)$ de proche en proche alors que $t$ augmente vers 1. On se donne deux entiers naturels $m$ et $k$, ce sont les deux paramètres de l'algorithme. Les valeurs de $t$ que l'on

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-041-8 Published online by Cambridge University Press

retient sont les nombres $\{t_i = (i/m)^2\}_{i=0}^m$. On estime $p_i(t)$ et $x_i(t)$ par une prédiction et $k$ corrections successives. Si $\pi_i(t)$ et $\xi_i(t)$ sont des valeurs approchées à $p_i(t)$ et à $x_i(t)$, la correction simple $\bar{\pi}_i$ et $\xi_i(t)$ à celles-ci procède comme suit. On détermine d'abord les nombres $\bar{\pi}_i(t)$ et $\bar{\rho}_i(t)$, $1 \leqq i \leqq n$ qui sont solution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^n \bar{\pi}_i(t) f_j(\xi_i(t)) + \sum_{i=1}^n \bar{\rho}_i(t) f_j'(\xi_i(t)) = y_j(t).$$

On pose ensuite $\bar{\xi}_i(t) = \xi_i(t) + \bar{\rho}_i(t)/\bar{\pi}_i(t)$. Nous notons par $Q_t$ cet opérateur qui associe $\bar{\pi}_i(t)$, $\bar{\xi}_i(t)$ à $\pi_i(t)$, $\xi_i(t)$. $Q_t{}^k$ est le $k^{\text{ème}}$ itéré de l'opérateur $Q_t$. La solution proposée au système (I) est

$$(p_i{}^{m,k}, x_i{}^{m,k}) = Q_{t_m}{}^k \circ Q_{t_{m-1}}{}^k \circ \ldots \circ Q_{t_1}{}^k((p_i(0), x_i(0))).$$

L'objectif principal de notre étude est d'établir la convergence de cet algorithme. Nous montrerons qu'il existe une constante $C$ et un entier $m_0$ qui ne dépendent que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ tels que les inégalités suivantes ont lieu

$$\left.\begin{aligned} |x_i{}^{m,k} - x_i| &\leqq \left(\frac{C}{m}\right)^{2k} \\ |p_i{}^{m,k} - p_i| &\leqq \left(\frac{C}{m}\right)^{2k} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{si } m \geqq m_0 \\ &1 \leqq i \leqq n \\ &k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ce résultat n'est cependant valide que si les fonctions de Tchebycheff sont suffisamment dérivables (de classe $C^4$). Le nom que nous accorderons à l'algorithme sera la méthode du couplage. Au terme de notre étude, nous présenterons des exemples numériques pour apprécier l'efficacité de l'algorithme proposé.

Citons deux situations où l'on est amené à connaître la solution numérique du système (I). Il y a d'abord la recherche des formules de quadrature de meilleure précision. Soit $w(x)$ une fonction de poids sur un intervalle $(a, b)$, si l'on considère le système de Tchebycheff formé des puissances successives de $x$, $f_j(x) = x^{j-1}$, $1 \leqq j \leqq n$ et si

$$y_j = \int_a^b x^{j-1} w(x) dx,$$

la solution $(p_i, x_i)_{i=1}^n$ du système (I) permet d'obtenir une formule de quadrature $Q(f) = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$ pour estimer

$$\int_a^b f(x) w(x) dx$$

et cette formule sera exacte pour tout polynôme de degré inférieur à $2n$.

Un deuxième exemple est apporté par la transformée de Laplace $F(s)$ d'une mesure (positive). Si de cette transformée on ne connaît ou on ne retient que les valeurs $y_j = F(s_j)$ pour $2n$ abscisses distincts $\{s_j : 1 \leqq j \leqq 2n\}$

et si l'on fait intervenir le système de Tchebycheff $f_j(x) = e^{-s_j x}$, résoudre le système (I), c'est effectuer une résolution numérique de la transformée de Laplace. Cette approche diffère des solutions proposées par Bellman-Kalaba-Lockett [**1**], mais réclame quand même de l'intérêt.

A notre connaissance, le seul effort pour résoudre le système $\sum_{i=1}^{n} p_i e^{-s_j x} = y_i$ a été entrepris par Rutishauser [**6**]. L'algorithme QD que propose ce dernier ne peut s'utiliser que si les $s_j$ sont en progression arithmétique. C'est évidemment une restriction très sérieuse.

**2. Détermination numérique de l'extrémité d'un arc inconnu.** Cette section formera un tout en soi et justifiera plus tard la convergence de la méthode du couplage. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_m$, $m + 1$ points d'un arc dans un ensemble $X$, $x_0$ est l'extrémité gauche de l'arc, $x_m$ est l'extrémité droite et pour chaque valeur de $i$, de 1 à $m$, $x_i$ est voisin de $x_{i-1}$. Supposons que l'on connaisse une approximation $w_0$ de $x_0$ et que l'on dispose d'un opérateur de correction $Q_k$ qui à une approximation $w$ de $x_k$ permet de trouver une meilleure approximation $Q_k(w)$ de $x_k$, que peut-on proposer comme approximation de l'extrémité $x_m$? C'est ce problème dont nous voulons parler. Préparons la notation pour les prochains résultats.

Nous faisons d'abord appel à une suite de pseudo-métriques $d_k(x, y)$, $x \in X, y \in X, k = 0, 1, \ldots, m$, qui remplit les conditions suivantes:

$$d_k(x, y) \geqq 0, d_k(x, y) \leqq d_k(x, z) + d_k(z, y)$$

et $d_k(x, y) \leqq d_{k-1}(x, y)$. On parlera de *famille décroissante de pseudo-métriques*. Nous dirons que la suite $\{x_k\}$ est une $\delta$-chaîne si $d_k(x_{k-1}, x_k) \leqq \delta$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$.

Nous dirons qu'une fonction réelle $\varphi$ définie sur $[0, \infty)$ est une fonction de *contraction locale* si $\varphi(0) = 0$, est non-décroissante et s'il existe un nombre $a > 0$ tel que $\varphi(a) < a$ et $x - \varphi(x)$ est non-décroissante sur $[0, a]$. On dira que $\varphi$ est *contractante au niveau a*.

Nous dirons qu'un opérateur $Q_k$ est un *opérateur de correction* relativement à $d_k$ et à $\varphi$ si pour les valeurs $w$ de $X$ où $Q_k$ est défini, $Q_k(w)$ appartient à $X$ est $d_k(Q(w), x_k) \leqq \varphi(d_k(w, x_k))$.

Si $w_0$ est une approximation proposée pour $x_0$, on définit par récurrence sur $k$ la suite $w_k : w_k = Q_k(w_{k-1})$. $w_m$ sera donc l'approximation proposée pour $x_m$. Si on le désire, on peut même engendrer une suite d'approximation $w_{m,n}$ de l'extrémité $x_m$; pour $n$ donné, on se sert plutôt de la famille d'opérateurs de correction $Q_k^n$, le $n$-ième itéré de $Q_k$.

LEMME 1. *Soit $\varphi$ une fonction de contraction locale, contractante au niveau $a$, alors pour tout $\delta$ de l'intervalle* $[0, a - \varphi(a)]$, *il existe une racine à l'équation* $\varphi(x + \delta) = x$ *située dans l'intervalle* $[0, \varphi(a)]$.

*Démonstration.* La fonction $t - \varphi(t)$ est continue, prend la valeur 0 en $t = 0$ et la valeur $\delta_1 = a - \varphi(a)$ en $t = a$. Si $0 \leqq \delta \leqq \delta_1$, il existe un $t$

compris entre 0 et a tel que $t - \varphi(t) = \delta$. Si $x = t - \delta$, $x = \varphi(t)$, $0 \leqq x \leqq \varphi(a)$ et $\varphi(x + \delta) = \varphi(t) = x$.

La plus petite racine positive à l'équation $\varphi(x + \delta) = x$ sera noté $\varphi^*(\delta)$.

THÉORÈME 2. *Soit $\varphi$ une fonction de contraction locale, contractante au niveau, $a$, soit $\{d_k\}_{k=0}^m$ une famille décroissante de pseudo-métriques sur un ensemble $X$, soit $\{x_k\}_{k=0}^m$ une $\delta$-chaîne dans $X$ alors que $\delta \leqq a - \varphi(a)$, soit $\{Q_k\}_{k=1}^m$ une famille d'opérateurs de correction pour $\{x_k\}$ relativement à $d_k$ et $\varphi$ alors que $Q_k$ est au moins défini sur $\{w : d_k(w, x_k) \leqq a\}$, supposons de plus que l'approximation $w_0$ est dans la boule $\{w : d_0(w, x_0) \leqq \varphi^*(\delta)\}$, alors $w_m = Q_m \circ Q_{m-1} \circ \ldots \circ Q_1(w_0)$ est bien défini et est situé dans la boule $\{w : d_m(w, x_m) \leqq \varphi^*(\delta)\}$.*

*Démonstration.* Montrons par récurrence sur $k$ que l'on peut définir une suite $\{w_k\}_{k=1}^m$ telle que

$$d_k(w_k, x_k) \leqq \varphi^*(\delta) \quad \text{et} \quad w_k = Q_k(w_{k-1}).$$

Par hypothèse d'induction, supposons donc que $w_{k-1}$ a été ainsi construit.

$$\begin{aligned} d_k(w_{k-1}, x_k) &\leqq d_k(w_{k-1}, x_{k-1}) + d_k(x_{k-1}, x_k) \\ &\leqq d_{k-1}(w_{k-1}, x_{k-1}) + \delta \leqq \varphi^*(\delta) + \delta. \end{aligned}$$

Le Lemme 1 nous assure que $\varphi^*(\delta) + \delta \leqq a$. L'opérateur $Q_k$ est défini au point $w_{k-1}$, on pose $w_k = Q_k(w_{k-1})$. Maintenant

$$d_k(w_k, x_k) \leqq \varphi(d_k(w_{k-1}, x_k)) \leqq \varphi(\varphi^*(\delta) + \delta) = \varphi^*(\delta).$$

On saura donc que $w_m$ est bien défini et que $d_m(w_m, x_m) \leqq \varphi^*(\delta)$.

On peut élargir la portée du Théorème 2 par les corrections successives

$$Q_k^n : Q_k^1 = Q_k, Q_k^2 = Q_k \circ Q_k^1, \ldots, Q_k^n = Q_k \circ Q_k^{n-1}.$$

La fonction de contraction locale $\varphi_n$ que l'on peut associer à $Q_k^n$ est la $n$-ième itérée fonctionnelle de la fonction $\varphi$. Remarquons que $a - \varphi_n(a) \geqq a - \varphi(a)$, il suffit donc que $\delta \leqq a - \varphi(a)$ pour que $\delta \leqq a - \varphi_n(a)$. Si $w_{m,n}$ est l'approximation proposée à $x_m$ à l'aide des opérateurs $Q_k^n$, il suffit que $d_0(w_0, x_0) \leqq \varphi_n^*(\delta)$ pour que $w_{m,n}$ soit bien défini et l'on saura alors que $d_m(w_{m,n}, x_m) \leqq \varphi_n^*(\delta)$. Le choix le plus fréquent pour $w_0$ est $w_0 = x_0$ et d'habitude $d_0(x_0, x_0) = 0$.

Pour utiliser le Théorème 2, il faut savoir calculer la fonction $\varphi^*$, associée à la fonction $\varphi$, ou du moins connaître certaines propriétés de $\varphi^*$. Si $\varphi(x) = cx$ où $0 < c < 1$, alors $\varphi^*(x) = x/(1 - c)$. Le cas où $\varphi(x) = cx^p$, $c > 0$, $p > 1$ est couvert par le prochain lemme.

LEMME 3. *Soit $\varphi$ une fonction convexe croissante, nulle à l'origine et dont la dérivée à gauche du point $a > 0$ est inférieure à 1, si $0 \leqq \delta \leqq a - \varphi(a)$,* *alors pour* $k = 1, 2, \ldots \varphi_k{}^*(\delta) \leqq (\varphi_k(\delta))/(1 - \varphi'(a-))$ *où* $\varphi_k$ *est la* $k$*-ième itérée de* $\varphi$.

*Démonstration*. Traitons d'abord du cas $k = 1$. Sur $[0, a]$, $x - \varphi(x)$ est injective. Posons $\delta = x - \varphi(x)$, pour $0 \leqq x \leqq a$; dans ce cas $\varphi^*(\delta) = \delta^* = x - \delta = \varphi(x) \cdot \varphi(\delta) = \varphi(x - \varphi(x))$. Vu la convexité de la fonction $\varphi$ aux points $x - \varphi(x)$ et $\varphi(x)$, on a l'égalité

$$\varphi(x) - \varphi(x - \varphi(x)) \leqq \varphi'(a-)\varphi(x).$$

D'où

$$\varphi(x) \leqq \varphi(x - \varphi(x))/(1 - \varphi'(a-))$$

et

$$\varphi^*(\delta) \leqq \varphi(\delta)/(1 - \varphi'(a-)).$$

Lorsque $k > 1$, l'inégalité précédente est

$$\varphi_k{}^*(\delta) \leqq \varphi_k(\delta)/(1 - \varphi_k{}'(a-))$$

or

$$\varphi_k{}'(a-) = \varphi'(a-)\varphi'(\varphi(a-)) \ldots \varphi'(\varphi_{k-1}(a-)) \leqq \varphi'(a-).$$

D'où

$$\varphi_k{}^*(\delta) \leqq \varphi_k(\delta)/(1 - \varphi'(a-)).$$

**3. Rappels sur les systèmes de Tchebycheff.** Dans cette courte section, nous citons les résultats de Krein qui sont pertinents à notre étude. Comme tantôt, soit $\{f_1, f_2, \ldots, f_{2n}\}$ un système de Tchebycheff de dimension paire sur l'intervalle ouvert $(a, b)$, $a < b$; rien n'empêche que $a$ ou $b$ ne soit pas fini. Nous désignerons par $M$ la totalité des mesures (positives) portées par $(a, b)$ pour lesquelles chacune des fonctions $f_j(x)$ est intégrable. Si $k$ est un entier naturel, $M_k$ désignera les mesures discrètes dont leur support consiste en $k$ points distincts de $(a, b)$. On notera par $\Phi$ l'application suivante de $M$ dans $\mathbf{R}^{2n}$, $\Phi(\mu) = (y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ où

$$y_j = \int_a^b f_j(x) d\mu(x).$$

On notera enfin par $\Omega$ l'image par $\Phi$ de $M_n$.

PROPOSITION 4. *L'application* $\Phi$ *restreinte à* $\bigcup_{k=0}^n M_k$ *est injective.*

Ceci est une conséquence de la notion de système de Tchebycheff et assure que le système d'équations (I) admet une solution unique dès que l'on exige que les abscisses $x_i$ soient ordonnées par ordre croissant.

THÉORÈME 5. *L'image par* $\Phi$ *de* $\bigcup_{k=0}^{n-1} M_k$ *est contenue dans la frontière de* $\Omega$. $\Omega$ *est un ouvert convexe de* $\mathbf{R}^{2n}$. *Si* $\mu$ *appartient à* $M$ *et si le support de* $\mu$ *contient plus de* $n$ *points,* $\Phi(\mu)$ *appartient à* $\Omega$.

Les résultats que Krein a établis en [3] ou en [4] permettent de vérifier facilement ce théorème. On pourrait aussi consulter avec profit le volume de Karlin-Studden [2].

**4. Analyse du système I en certains de ses points singuliers.** Nous voulons résoudre le système (I).

$$(\mathrm{I}) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i f_j(x_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Pour ce faire, partons de la donnée de $2n - 2$ quantités $\pi_i$ et $\xi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, telles que $\pi_i > 0$ et $a < \xi_1 < \ldots < \xi_{n-1} < b$. Posons

$$(\mathrm{I}_0) \qquad \zeta_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Vu le Théorème 5, le point $(\zeta_j)_{j=1}^{2n}$ appartient à la frontière de $\Omega$. Posons

$$y(t) = (y_j(t))_{j=1}^{2n} \quad \text{où} \quad y_j(t) = \zeta_j + t(y_j - \zeta_j).$$

Pour tout $t$ de $(0, 1]$, $y(t)$ appartient à $\Omega$, on peut donc trouver des fonctions $p_i(t)$ et $x_i(t)$, $1 \leqq i \leqq n$, $0 < t \leqq 1$ telles que $p_i(t) \geqq 0$, $a < x_1(t) < \ldots < x_n(t) < b$ et

$$(\mathrm{I}_t) \qquad y_j(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_j(x_i(t)), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Le but de cette section est d'étudier le comportement des quantités $p_i(t)$ et $x_i(t)$ lorsque $t$ décroît vers zéro. La première étape de l'analyse consiste à révéler une racine cachée $\xi$ au système $(\mathrm{I}_0)$ relativement au point $y$.

THÉORÈME 6. *Soit $(y_j)_{i=1}^{2n}$ un point de $\Omega$ et soient $(\pi_i, \xi_i)_{j=1}^{n-1}$, $2n - 2$ valeurs où $\pi_i > 0$, $0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n-1} < b$ donnant lieu aux quantités*

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i), \quad 1 \leqq j \leqq 2n,$$

*alors il existe un polynôme généralisé de Tchebycheff $B(x) = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(x) \not\equiv 0$ tel que*

$$B(\xi_i) = B'(\xi_i) = 0, \quad 1 \leqq i \leqq n - 1$$

*et*

$$\sum_{j=1}^{2n} \beta_j (y_j - \zeta_j) = 0.$$

*Ce polynôme $B(x)$ est unique à une constante multiplicative près. Il change de signe exactement une fois dans l'intervalle $(a, b)$*

*Démonstration*. Soit $(p_i, x_i)_{i=1}^{n}$ la solution au système I, $\sum_{i=1}^{n} p_i f_j(x_i) = y_j$, $1 \leqq j \leqq 2n$. Choisissons un nombre $a_1$ suffisamment à gauche de l'intervalle $(a, b)$, pour que tous les nombres $\xi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$ et tous les nombres $x_i$, $1 \leqq i \leqq n$, sont tous supérieurs à $a_1$ et désignons par $m$ la mesure $\sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x_i)$. On remarque dans un premier temps que l'ensemble des polynômes

$$B(x) = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(x)$$

tels que $B(\xi_i) = B'(\xi_i) = 0$, $1 \leqq i \leqq n - 1$ est un sous-espace vectoriel de dimension égale à 2. Sur ce sous-espace vectoriel, $V$, considérons la fonctionnelle linéaire

$$B \rightarrow \int_a^b B(x) dm(x).$$

Montrons d'abord qu'elle n'est pas identiquement nulle sur $V$. Soit $B_0(x)$, le polynôme tel que $B_0(a_1) = 0$, $B_0(\xi_i) = B_0'(\xi_i) = 0$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $B_0 \not\equiv 0$, on s'apercoit que $B_0$ ne peut pas changer de signe sur $(a_1, b)$ (sinon $B_0$ admettrait trop de zéros compte tenu de la multiplicité deux des racines $\xi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$). On peut donc supposer que $B_0(x_i) \geqq 0$, $1 \leqq i \leqq n$. D'où

$$\int_a^b B_0(x) dm(x) \geqq 0.$$

Il est impossible que

$$\int_a^b B_0(x) dm(x) = 0,$$

sinon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seraient $n$ racines doubles pour $B_0(x)$. Ainsi

$$\int_a^b B_0(x) dm(x) > 0.$$

Il s'ensuit que

$$\left\{B : B \in V, \int_a^b B(x) dm(x) = 0\right\}$$

est formée des multiples scalaires d'un même polynôme $\sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(x)$. Et la condition

$$\int_a^b B(x) dm(x) = 0$$

veut justement dire que

$$\sum_{j=1}^{2n} \beta_j (y_j - \zeta_j) = 0$$

lorsque $B \in V$. Comme l'intégrale de $B$ par rapport à la mesure (positive)

$m$ est nulle, il faut que $B(x)$ change de signe au moins une fois. Un tel changement de signe ne peut pas se produire plus d'une fois, sinon $B(x)$ admettrait $2n$ zéros, compte tenu de la multiplicité des racines, ce qui est impossible dans un système de Tchebycheff de dimension $2n$.

Soit $\xi$ cette racine où $B(x)$ change de signe. Nous dirons que $\xi$ est la racine cachée au système $(\mathrm{I}_0)$ par rapport au point $(y_j)_{j=1}^{2n}$. Deux cas peuvent se présenter. Le premier cas est que la racine cachée ne soit pas une des valeurs $\xi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$; c'est ce que nous appellerons le cas régulier. Le deuxième cas est lorsque la racine cachée est égale à l'une des racines $\xi_i$; nous l'appellerons le cas singulier. Selon que le cas est régulier ou singulier, les systèmes $(\mathrm{I}_t)$ lorsque $t$ décroît vers zéro se comportent différemment. La normalisation que nous retenons pour $R(x)$ lorsque $\xi$ est une racine simple (cas régulier) est que $R'(\xi) = 1$.

A partir de ce moment-ci, nous réclamons davantage de régularité de la part du système de Tchebycheff. Nous supposons désormais que le système de Tchebycheff est formé de fonctions analytiques et que tout polynôme de Tchebycheff, $\sum_{j=1}^{2n} c_j f_j(x)$, qui n'est pas identiquement nul n'admet pas plus que $2n - 1$ racines compte tenu de la multiplicité des racines.

En fait, il a été montré en [**7**], que la condition "les $f_j$ sont analytiques" peut être affaiblie par les "$f_j$ sont éléments de $C^\infty(a, b)$."

*A. Analyse du cas régulier.* Pour étudier le système $(\mathrm{I}_t)$ alors que la racine cachée $\xi$ est simple, nous changerons de base pour le système de Tchebycheff. Introduisons les $2n$ fonctionnelles linéaires suivantes: $L_i(f) = f(\xi_i)$, $L_i'(f) = f'(\xi_i)$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $L'(f) = f'(\xi)$ et

$$E\left(\sum_{j=1}^{2n} c_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{2n} c_j(y_j - \zeta_j).$$

LEMME 7. *Les fonctionnelles* $\{L_i\}_1^{n-1}$, $\{L_i'\}_1^{n-1}$, $L'$ *et* $E$ *sont linéairement indepéndantes.*

*Démonstration.* Soit $L$ la fonctionnelle, $L(f) = f(\xi)$, les fonctionnelles $\{L_i\}_1^{n-1}$, $\{L_i'\}_1^{n-1}$, $L$ et $L'$ sont linéairement indépendantes. $E$ doit pouvoir s'exprimer à l'aide de ces fonctionnelles:

$$E = cL + c'L' + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i L_i + c_i' L_i').$$

Soit $S(x)$ le polynôme de Tchebycheff tel que $S(\xi) = 1$, $S'(\xi) = 0$, $S(\xi_i) = S'(\xi_i) = 0$, $1 \leqq i \leqq n - 1$. Vu le Théorème 6, $E(S) \neq 0$. Or $E(S) = c$. Ainsi $c \neq 0$. On peut donc faire l'échange de $E$ avec $L$ pour obtenir une nouvelle base de l'espace des fonctionnelles linéaires sur le système de Tchebycheff.

Le lemme précédent permet de trouver $2n$ polynômes de Tchebycheff linéairement indépendants $A_i(x)$, $B_i(x)$, $1 \leqq i \leqq n-1$, $A(x)$ et $B(x)$ orthogonaux aux fonctionnelles mentionnées:

$$\left.\begin{array}{ll} A_i(\xi_k) = \delta_{ik} & B_i(\xi_k) = 0 \\ A_i'(\xi_k) = 0 & B_i'(\xi_k) = \delta_{ik} \end{array}\right\} 1 \leqq k \leqq n-1$$
$$E(A_i) = 0 \quad E(B_i) = 0$$
$$A_i'(\xi) = 0 \quad B_i'(\xi) = 0.$$

Ceci pour $i$ de 1 à $n-1$.

$$A(\xi_k) = A'(\xi_k) = 0 \quad B(\xi_k) = B'(\xi_k) = 0 \quad 1 \leqq k \leqq n-1$$
$$E(A) = 1 \quad E(B) = 0$$
$$A'(\xi) = 0 \quad B'(\xi) = 1.$$

Dans cette base, le système d'équations $(\mathrm{I}_t)$ est ainsi transformé

$$(\mathrm{II}_p) \quad \left.\begin{array}{l} pA_k(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i A_k(x_i) = \pi_k \\ pB_k(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i B_k(x_i) = 0 \end{array}\right\} 1 \leqq k \leqq n-1$$

$$pA(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i A(x_i) = t$$

$$pB(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_i B(x_i) = 0.$$

Nous procédons à l'étude de ce système au voisinage des valeurs $x_i = \xi_i, p_i = \pi_i, 1 \leqq i \leqq n-1, x = \xi$ et $p = 0$.

*Remarque-clé.* Il y a un très grand avantage à considérer $p$ comme variable indépendante et de dire que $t$ est fonction de $p$ par l'avant-dernière équation.

Traitons d'abord des $2n - 2$ premières équations en considérant que $p$ et $x$ sont des paramétres fixes voisins respectivement de 0 et de $\xi$. La matrice jacobienne de ces équations en $p_i = \pi_i$, $x_i = \xi_i$, $1 \leqq i \leqq n-1$ est une matrice diagonale dont les divers éléments sont tantôt 1, tantôt $\pi_k > 0$. Ceci permet de prétendre que les $p_i$ et les $x_i$ sont des fonctions analytiques de $p$ et de $x$ si $p$ n'est pas trop écarté de 0 et si $x$ ne s'écarte pas trop de $\xi$. Développons les $p_i$ et les $x_i$ selon les puissances successives de $p$;

$$p_i = \pi_{i,0}(x) + p\pi_{i,1}(x) + \ldots$$
$$x_i = \xi_{i,0}(x) + p\xi_{i,1}(x) + \ldots$$

On vérifie d'abord que $\pi_{i,0}(x) \equiv \pi_i$ et $\xi_{i,0}(x) \equiv \xi_i$; il suffit de résoudre le système des $(2n-2)$ équations avec $p = 0$. Pour trouver le développement de Taylor d'ordre un pour $p_i$ et $x_i$, il suffit de faire la correction de Newton-Raphson avec la solution approchée $p_i = \pi_i$ et $x_i = \xi_i$: $dp_i = -pA_i(x)$ et $p_i dx_i = -pB_i(x)$. D'où

$$\pi_{i,1}(x) = -A_i(x) \quad \text{et} \quad \xi_{i,1}(x) = -B_i(x)/\pi_i.$$

Remplaçons maintenant les valeurs obtenues pour $p_i$ et $x_i$ dans les deux dernières équations:

$$pA(x) + g(p, x) = t$$
$$pB(x) + h(p, x) = 0$$

où

$$g(p, x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i A(x_i) \quad \text{et} \quad h(p, x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i B(x_i).$$

Déterminons les développements de Taylor

$$g(p, x) = g_0(x) + pg_1(x) + \ldots$$
$$h(p, x) = h_0(x) + ph_1(x) + \ldots$$

Puisque $A(\xi_k) = A'(\xi_k) = B(\xi_k) = B'(\xi_k) = 0, 1 \leqq k \leqq n - 1,$

$$A(x_i) = A(\xi_i) + A'(\xi_i)(x_i - \xi_i) + A''(\xi_i)(x_i - \xi_i)^2/2 + \ldots$$
$$A(x_i) = A''(\xi_i)(x_i - \xi_i)^2/2 + \ldots$$
$$B(x_i) = B''(\xi_i)(x_i - \xi_i)^2/2 + \ldots$$

Ainsi $g_0(x) \equiv g_1(x) \equiv h_0(x) \equiv h_1(x) \equiv 0$.

En particulier, on peut diviser la fonction $h(p, x)$ par $p^2$ : $h(p, x) = p^2 h_2(p, x)$.

Lorsque $p \neq 0$, l'équation $pB(x) + h(p, x) = 0$ est équivalente à $B(x) + ph_2(p, x) = 0$. Puisque $B'(\xi) = 1$, la solution $x$, voisine de $\xi$, à cette dernière équation, existe lorsque $p$ est voisin de 0 et $x$ est une fonction analytique de $p$. Remplaçons enfin cette valeur de $x$ dans l'équation qui définit la fonction $t$ : $pA(x) + g(p, x) = t$. La dérivée de $t$ par rapport à $p$ en $p = 0$ est $dt/dp = A(\xi) \neq 0$. On peut finalement exprimer $p$ en fonction de $t$ et dans ce cas $p$ est analytique en fonction de $t$. On peut résumer tous ces calculs sous la forme d'un théorème.

THÉORÈME 8. *Dans le cas où la racine cachée $\xi$ est simple, les familles de solutions $p_i(t)$, $x_i(t)$ au système* ($\mathrm{I}_t$) *sont des fonctions qui se prolongent analytiquement jusqu'en $t = 0$. Il existe un entier $k$ tel que $x_k(t)$ converge vers $\xi$ et $p_k(t)$ converge vers 0 lorsque $t$ décroît vers zéro. Les autres valeurs $x_i(t)$ convergent vers $\xi_i$ ou $\xi_{i-1}$ et $p_i(t)$ converge vers $\pi_i$ ou $\pi_{i-1}$ selon que $i < k$ ou $i > k$ lorsque $t$ décroît vers zéro.*

*B. Analyse du cas singulier.* Pour étudier le système ($\mathrm{I}_t$) alors que la racine cachée $\xi$ est triple et coïncide avec une des racines $\xi_i$, nous changerons de base pour le système de Tchebycheff. Pour la commodité de l'écriture nous supposerons que $\xi = \xi_1$ bien que ce choix d'indice sera sans conséquence dans l'argumentation future. Introduisons les $2n$ fonctionnelles linéaires suivantes:

$$L_i(f) = f(\xi_i),\ L_i'(f) = f'(\xi_i),\ L'''(f) = f'''(\xi)/6 \quad \text{et}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{2n} c_j f_j\right) = \sum_{j=1}^{2n} c_j(y_j - \zeta_j).$$

LEMME 9. *Les fonctionnelles* $\{L_i\}_1^{n-1}$, $\{L_i'\}_1^{n-1}$, $L'''$ *et* $E$ *restreintes au système de Tchebycheff sont linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* Soit $L''$ la fonctionnelle $L''(f) = f''(\xi)/2$, les fonctionnelles $\{L_i\}_1^{n-1}$, $\{L_i'\}_1^{n-1}$, $L''$ et $L'''$ sont linéairement indépendantes comme fonctionnelles sur le système de Tchebycheff. $E$ s'exprime à l'aide de ces fonctionnelles

$$E = cL + c'L' + c''L'' + c'''L''' + \sum_{i=2}^{n-1} (c_iL_i + c_i'L_i').$$

Soit $S(x)$ le polynôme de Tchebycheff tel que $S(\xi_i) = S'(\xi_i) = 0$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $S''(\xi) = 2$ et $S'''(\xi) = 0$. La fonction $B(x)$ du Théorème 6 admet une racine triple en $x = \xi$ et $B'''(\xi) \neq 0$ (sinon $B(x)$ admettrait $2n$ racines compte tenu de la multiplicité des racines). $S(x)$ n'est pas proportionnelle à $B(x)$ et ainsi $E(S) \neq 0$ vu le Théorème 6. Or $E(S) = c''$. D'où $c'' \neq 0$ on peut donc faire l'échange de $E$ avec $L''$ pour obtenir une nouvelle base de l'espace des fonctionnelles linéaires sur le système de Tchebycheff.

Le lemme précédent permet de trouver $2n$ polynômes de Tchebycheff linéairement indépendants $A_i(x)$, $B_i(x)$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $C(x)$ et $D(x)$ orthogonaux au $x$ fonctionnelles mentionnées.

$$\left.\begin{array}{ll} A_i(\xi_k) = \delta_{ik} & B_i(\xi_k) = 0 \\ A_i'(\xi_k) = 0 & B_i(\xi_k) = \delta_{ik} \end{array}\right\} 1 \leqq k \leqq n - 1$$

$$E(A_i) = 0 \quad E(B_i) = 0$$

$$A_i'''(\xi) = 0 \quad B_i'''(\xi) = 0.$$

Ceci pour $i$ de 1 à $n - 1$

$$C(\xi_k) = C'(\xi_k) = 0 \quad D'(\xi_k) = D(\xi_k) = 0 \quad 1 \leqq k \leqq n - 1$$

$$E(C) = 1 \quad E(D) = 0$$

$$C'''(\xi) = 0 \quad D'''(\xi) = 6.$$

Dans cette base, le système d'équations $(\mathrm{I}_t)$ est ainsi transformé

$$(\mathrm{III}_x)\qquad \left.\begin{aligned} pA_k(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_iA_k(x_i) &= \pi_k \\ pB_k(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_iB_k(x_i) &= 0 \end{aligned}\right\} 1 \leqq k \leqq n-1$$

$$pC(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_iC(x_i) = t$$

$$pD(x) + \sum_{i=1}^{n-1} p_iD(x_i) = 0.$$

L'étude de ce système se fait au voisinage des valeurs $x = \xi$, $p$ une valeur arbitraire entre 0 et $\pi_1$, $x_i = \xi_i$, $1 \leqq i \leqq n-1$, $p_1 = \pi_1 - p$, $p_i = \pi_i$, $2 \leqq i \leqq n-1$.

*Remarque clé.* $x$ est choisi comme variable indépendante et $t$ est fonction de $x$ par l'avant-dernière équation.

Traitons d'abord des $2n - 2$ premières équations en considérant que $p$ et $x$ sont des paramètres fixes, $0 < p < \pi_1$ et $x$ est voisin de $\xi$. Le jacobien du système pour déterminer les $p_i$ et les $x_i$ est régulier. Les $p_i$ et les $x_i$ sont des fonctions analytiques de $p$ et de $x$. Développons les $p_i$ et les $x_i$ selon les puissances de $x - \xi$:

$$p_i = \pi_{i,0}(p) + (x - \xi)\pi_{i,1}(p) + \ldots$$
$$x_i = \xi_{i,0}(p) + (x - \xi)\xi_{i,1}(p) + \ldots$$

On vérifie d'abord que $\pi_{1,0}(p) = \pi_1 - p$, $\pi_{i,0}(p) = \pi_i$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$ et $\xi_{i,0}(p) = \xi_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$; il suffit de résoudre le système de $(2n - 2)$ équations avec $x = \xi$. Pour trouver le développement de Taylor d'ordre un pour $p_i$ et $x_i$, il suffit de faire la correction de Newton-Raphson avec la solution approchée $p_i = \pi_{i,0}(p)$, $x_i = \xi_{i,0}(p)$. On observe les développements suivants:

$$A_k(x) = \delta_{k1} + O((x - \xi)^2) \qquad B_k(x) = (x - \xi)\delta_{k1} + O((x - \xi)^2)$$
$$A_k(x_i) = \delta_{ki} + O((x_i - \xi_i)^2)$$
$$B_k(x_i) = (x_i - \xi_i)\delta_{ki} + O((x_i - \xi_i)^2).$$

Désignons par $dp_i$ et $dx_i$ la correction recherchée au moins aussi exacte que l'écart $(x - \xi)$.

$$\left.\begin{aligned} p\delta_{k1} + (\pi_{k,0}(p) + dp_k) &= \pi_k \\ p(x - \xi)\delta_{k1} + (\pi_{k,0}(p) + dp_k)dx_k &= 0 \end{aligned}\right\} 1 \leqq k \leqq n-1.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-041-8 Published online by Cambridge University Press

D'où

$$dp_1 = 0, dx_1 = -(x - \xi)p/(\pi_1 - p)$$
$$dp_i = dx_i = 0, i \geqq 2.$$

Remplaçons maintenant les valeurs obtenues pour $p_i$ et $x_i$ dans les deux dernières équations du système ($\mathrm{III}_x$):

(III.1) $pC(x) + g(p, x) = t$

(III.2) $pD(x) + h(p, x) = 0$

où

$$g(p, x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i C(x_i) \quad \text{et} \quad h(p, x) = \sum_{i=1}^{n-1} p_i D(x_i).$$

Déterminons les développements de Taylor

$$g(p, x) = g_0(p) + (x - \xi)g_1(p) + (x - \xi)^2 g_2(p) + \dots$$
$$h(p, x) = h_0(p) + (x - \xi)h_1(p) + (x - \xi)^2 h_2(p) + (x - \xi)^3 h_3(p) + \dots$$

Puisque $C$ et $D$ ainsi que leur dérivée première s'annulent en chacune des racines $\xi_i$,

$$C(x_i) = C''(\xi_i)(x_i - \xi_i)^2/2 + \dots$$
$$D(x_i) = D''(\xi_i)(x_i - \xi_i)^2/2 + \dots$$

Si l'on néglige les puissances de $(x - \xi)$ supérieure à deux dans la première équation (III.1) et supérieure à trois dans la seconde équation (III.2), on obtient:

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i C(x_i) = p_1 C(x_1) + O((x - \xi)^4)$$
$$= (\pi_1 - p)C''(\xi)(x - \xi)^2/2$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i D(x_i) = p_1 D(x_1) + O((x - \xi)^4).$$

Or $D(x)$ est un multiple de la fonction $B(x)$ du Théorème 6. Ainsi $D''(\xi) = 0$ et

$$D(x_1) = (x_1 - \xi)^3 + O((x_1 - \xi)^4).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i D(x_i) = -(x - \xi)^3 p^3/(\pi_1 - p)^2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g_0(p) &= g_1(p) = h_0(p) = h_1(p) = h_2(p) = 0 \\ g_2(p) &= (\pi_1 - p)C''(\xi)/2 \\ h_3(p) &= -p^3/(\pi_1 - p)^2. \end{aligned}$$

La fonction $D(x)$ est divisible par $(x - \xi)^3$: $D(x) = (x - \xi)^3 D_3(x)$; il en est de même pour la fonction $h(p, x) = (x - \xi)^3 h_3(p, x)$. Lorsque $x \neq \xi$, l'équation $pD(x) + h(p, x) = 0$ est équivalente à $pD_3(x) + h_3(p, x) = 0$. Lorsque $x = \xi$, l'unique solution en $p$, $0 < p < \pi_1$, à cette équation est $p = \pi_1/2$. Regardons maintenant la valeur de la dérivée par rapport à $p$ en $p = \pi_1/2$ de la fonction

$$pD_3(\xi) + h_3(p, \xi) = p - p^3/(\pi_1 - p)^2.$$

En $p = \pi_1/2$, cette dérivée vaut $-4$. Par le théorème des fonctions implicites, on peut donc exprimer $p$ en fonction de $x$ à l'aide de l'équation (III.2); cette fonction est analytique.

Remplacons enfin cette valeur de $x$ dans l'équation (III.1) qui définit la fonction

$$\begin{aligned} &t : pC(x) + g(p, x) = t \\ &t = \tfrac{1}{2}C''(\xi)(x - \xi)^2(p + p_1) + O((x - \xi)^3) \\ &t = \tfrac{1}{2}\pi_1 C''(\xi)(x - \xi)^2 + O((x - \xi)^2). \end{aligned}$$

Puisque $E(C) = 1$, le Théorème 6 nous assure que $C''(\xi) \neq 0$. Ceci décrit le comportement de $t$ lorsque $x$ est voisin de $\xi$. Comme $t > 0$, $C''(\xi) > 0$.

On peut résumer ces calculs par le résultat suivant:

THÉORÈME 10. *Dans le cas où la racine cachée $\xi$ est le nombre $\xi_k$, les familles de solutions $p_i(t)$, $x_i(t)$ s'expriment analytiquement en fonction de $\sqrt{t}$ jusqu'en $t = 0$. Lorsque $t$ décroît vers zéro,*

$$\lim_{t\downarrow 0} x_i(t) = \xi_i,\ i \leqq k \quad \textit{et} \quad \lim_{t\downarrow 0} x_{i+1}(t) = \xi_i,\ k \leqq i \leqq n-1,$$
$$\lim_{t\downarrow 0} p_k(t) = \pi_k/2 = \lim_{t\downarrow 0} p_{k+1}(t)$$

*et* $\lim_{t\downarrow 0} p_i(t) = \pi_i$ *ou* $\pi_{i-1}$ *selon que* $i < k$ *ou* $i > k + 1$.

Il suffit de vérifier que $x - \xi$ est une fonction analytique de $\sqrt{t}$. Or $t = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x - \xi)^n$ et $a_2 > 0$. Soit $B(x)$ la racine carré de $\sum_{n=2}^{\infty} a_n(x - \xi)^{n-2}$ avec $B(\xi) = \sqrt{a_2}$ et soit $g$ l'inverse fonctionnel de la fonction $(x - \xi)B(x)$, alors $x = g(\sqrt{t})$.

**5. Détermination numérique de la solution du système (I) (cas régulier).** Maintenons-nous dans le contexte de la Section 5 où nous voulons résoudre le système (I)

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i f_j(x_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n$$

à partir de la donnée de $2n - 2$ quantités $\pi_i$, $\xi_i$, $1 \leqq i \leqq n - 1$ telles que $\pi_i > 0$ et les $\xi_i$ sont des nombres distincts de $(a, b)$. Posons

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i), \quad y_j(t) = \zeta_j + t(y_j - \zeta_j), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Pour $0 \leqq t \leqq 1$, on peut trouver une famille continue à un paramètre $p_i(t)$, $x_i(t)$ telle que

$$(\mathrm{I}_t) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_j(x_i(t)) = y_j(t), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

Nous allons supposer que la racine cachée est distincte des autres racines $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$. Pour la commodité de la notation, nous supposons que $\lim_{t\downarrow 0} x_i(t) = \xi_i$ et $\lim_{t\downarrow 0} p_i(t) = \pi_i$, $1 \leqq i \leqq n$ où $\xi_n = \xi$ et $\pi_n = 0$.

Nous entreprenons la résolution numérique du système (I) par la technique décrite dans la Section 1. L'espace $X = \{(p_i, x_i)_{i=1}^n\}$ est $\mathbf{R}^{2n}$, il contient l'arc inconnu $(p_i(t), x_i(t))$. Définissons immédiatement l'opérateur de correction qui à une solution approximative $(q_i, w_i)$ au système $(\mathrm{I}_t)$ propose une autre solution approximative $Q_t(q_i, w_i) = (\bar{q}_i, \bar{w}_i)$. On se sert de quantités auxiliaires $\bar{v}_i$. Dans un premier temps, on détermine la solution $(\bar{q}_i, \bar{v}_i)$ du système linéaire

$$(\mathrm{IV}_t) \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i f_j(w_i) + \bar{v}_i f_j'(w_i) = y_j(t), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

On pose ensuite $\bar{w}_i = w_i + \bar{v}_i/\bar{q}_i$. Il s'agit d'un simple raffinement à la correction de Newton-Raphson.

Si $t$ est entre 0 et 1, si $(p_i, x_i)$ et $(q_i, w_i)$ sont deux points de $X$, la pseudo-distance $d_t$ entre ces deux points sera le plus grand des nombres $|w_n - x_n|$ et $\max\{|w_i - x_i|/\sqrt{t} : 1 \leqq i \leqq n - 1\}$. Pour alléger la notation, nous désignerons par $\nu$ un point générique de $X$ et par $\mu_t$ le point $(p_i(t), x_i(t))_{i=1}^n$.

LEMME 11. *Il existe un nombre $\epsilon_0$ et une constante $M$ tel que pour tout $t \in (0, 1]$, $Q_t$ est défini sur $\{\nu : d_t(\nu, \mu_t) \leqq \epsilon_0\}$ et alors*

$$d_t(Q_t(\nu), \mu_t) \leqq M d_t^2(\nu, \mu_t).$$

*Démonstration.* Les $n$ nombres $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ sont toujours écartés entre eux et ne s'approchent jamais de $a$ ou de $b$; on peut trouver un $r > 0$ tel que pour tout $t$ entre 0 et 1, $|x_i(t) - x_j(t)| > r$ si $i \neq j$ et $a + r < x_i(t) < b - r$ si $1 \leqq i \leqq n$. Soit $t$ une valeur donnée de $(0, 1]$, commençons par exiger la validité des inégalités

$$|w_i - x_i(t)| \leqq r/2.$$

Les nombres $w_1, w_2, \ldots, w_n$ seront donc tous distincts. On peut trouver des polynômes de Tchebycheff

$$A_k(w) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{kj}(w_1, \ldots, w_n) f_j(w)$$

$$B_k(w) = \sum_{j=1}^{2n} \beta_{kj}(w_1, \ldots, w_n) f_j(w)$$

tels que

$$\left.\begin{array}{ll} A_k(w_i) = \delta_{ik} & B_k(w_i) = 0 \\ A_k'(w_i) = 0 & B_k'(w_i) = \delta_{ik} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq k \leqq n. \end{array}$$

Pour $k$ fixé et pour $j$ de 1 à $2n$, on peut multiplier la $j$-ième équation du système $(\mathrm{I}_t)$ et on peut sommer toutes ces équations.

Pour $k$ fixé et pour $j$ de 1 à $2n$, on peut multiplier la $j$-ième équation du système $(\mathrm{I}_t)$ par le nombre $\alpha_{kj}(w_1, \ldots, w_n)$ et l'on peut sommer toutes ces équations. On peut faire la même opération avec le système $(\mathrm{IV}_t)$. Après comparaison entre ces deux équations, on obtient l'équation

$$\bar{q}_k = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) A_k(x_i(t)).$$

Si l'on reprend le procédé en remplaçant les nombres $\alpha_{k,j}(w_1, \ldots, w_n)$ par $\beta_{k,j}(w_1, \ldots, w_n)$ on obtient l'équation

$$\bar{v}_k = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) B_k(x_i(t)).$$

Par un développement de Taylor d'ordre 1 et vu la compacité des variations possibles des $w_i$, on peut trouver une constante $M_1$ (qui ne dépend pas de $t$) telle que les inégalités suivantes ont lieu:

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{q}_k - p_k(t)| \leqq M_1 \sum_{i=1}^{n} p_i(t)(w_i - x_i(t))^2 \\ |\bar{v}_k - p_k(x_k(t) - w_k)| \leqq M_1 \sum_{i=1}^{n} p_i(t)(w_i - x_i(t))^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1 \leqq k \leqq n \\ (V_t) \end{array}$$

En se servant du fait que les fonction $\{p_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ sont bornées et que $p_n'(t)$ est bornée, et si l'on suppose que $|w_n - x_n(t)| \leqq \epsilon$, $|w_i - x_i(t)| \leqq \epsilon\sqrt{t}$ pour $1 \leqq i \leqq n - 1$, on voit que l'on peut choisir une constante $M_2$ (indépendante de $t$) telle que

(VI) $\qquad |\bar{q}_k - p_k(t)| \leqq M_2 t \epsilon^2.$

Si l'on observe que $\bar{v}_k = \bar{q}_k(\bar{w}_k - w_k)$, et du fait que les $w_k$ sont uniformément bornés, on obtient l'inégalité

$$|q_k w_k - p_k(t)x_k(t)| \leqq M_3 t\epsilon^2.$$

Comme $x_k(t)$ est uniformément borné,

$$|\bar{q}_k(\bar{w}_k - x_k(t))| \leqq M_4 t\epsilon^2.$$

Or lorsque $k < n$, $p_k(t)$ ne s'approche jamais de 0, d'où si $\epsilon$ est assez petit, $\bar{q}_k$ sera toujours éloigné de zéro et alors

$$|\bar{w}_k - x_k(t)| \leqq M_5 t\epsilon^2.$$

D'autre part, $p_n'(0) > 0$, si $\epsilon$ est suffisamment petit, on saura que $\bar{q}_n/t$ sera éloigné de zéro

$$|\bar{w}_n - x_n(t)| \leqq M_6\epsilon^2.$$

On peut donc trouver un nombre $\epsilon_0 \in (0, r/2)$ et une constante $M$ telle que

$$|\bar{w}_n - x_n(t)| \leqq M\epsilon^2$$

et

$$|\bar{w}_k - x_k(t)| \leqq Mt\epsilon^2 \quad \text{si} \quad \epsilon \leqq \epsilon_0 \quad \text{et } k < n.$$

La démonstration du lemme est complétée.

Cherchons maintenant une chaîne $\delta$-admissible à partir de la courbe $\mu_t = (p_i(t), x_i(t))$ relativement à la famille de pseudo-métriques $d_t$.

LEMME 12. *Soit la suite $\{\mu_t\}$ lorsque $t$ parcourt les points de la forme $(i/m)^2$, $i = 0, 1, \ldots, m$ alors il existe une constante $A$ indépendante de $m$ telle que $\{\mu_t\}$ est une chaîne $(A/m)$-admissible.*

*Démonstration.* Soit $A_1$ une borne pour les fonctions $\{x_i'(t) : 0 \leqq t \leqq 1, 1 \leqq i \leqq n\}$. Par le Théorème 8, $A_1 < \infty$. On voit que

$$\left| x_n\left(\left(\frac{i+1}{m}\right)^2\right) - x_n\left(\left(\frac{i}{m}\right)^2\right)\right| \leqq 2A_1/m$$

et si $i < n$,

$$\frac{\left| x_i\left(\left(\frac{i+1}{m}\right)^2\right) - x_i\left(\left(\frac{i}{m}\right)^2\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{i+1}{m}\right)^2}} \leqq 2A_1/m.$$

Il suffit de poser $A = 2A_1$ pour obtenir

$$d_{(i+1)^2/m^2}(\mu_{(i+1)^2/m^2}, \mu_{i^2/m^2}) \leqq A/m.$$

Soit $m$ et $k$ deux entiers donnés, on pose $\{t_i = (i/m)^2\}_{k=0}^{m}$, la solution approchée à la solution $\mu_1$ du système (I) que nous proposons est

$$\mu_{m,k} = Q_{tm}{}^k \circ Q^k_{tm-1} \circ \ldots \circ Q_{t1}{}^k(\nu_0)$$

où $\nu_0 = (\pi_i, \xi_i)_{i=1}^n$.

THÉORÈME 13. *Il existe un entier $m_0$ et une constante $C$ indépendante de $m$ et de $k$ tels que*

$$\|\mu_{m,k} - \mu_1\| \leqq (C/m)^{2^k},$$

*si $m \geqq m_0$ et si $k = 1, 2, 3, \ldots$*

*Démonstration.* Soient $\epsilon_0$ et $M$ les deux constantes qui proviennent du Lemme 11, si l'on choisit un nombre $a$, $a < \epsilon_0$ et $a < 1/2M$, les opérateurs $Q_t$ sont des opérateurs de correction au sens de la Section 1 avec comme fonction de contraction locale $\varphi(x) = Mx^2$; a sera un niveau de contraction. Soit $A$ la constante indiquée dans le Lemme 12, la constante $m_0$ sera un entier tel que $A/m_0 \leqq a - \varphi(a)$. Si $m \geqq m_0$ et si $\mu_{m,k} = (q_i, w_i)$, le Théorème 2 nous assure que

$$\max_i |w_i - x_i| \leqq \varphi_k{}^*(A/m).$$

En faisant appel au Lemme 3

$$\varphi_k{}^*(A/m) \leqq \varphi_k(A/m)/(1 - \varphi_k'(a)) \leqq \varphi_k(A/m)/(1 - \varphi'(a)).$$

Choisissons $C$ pour que $A^2/(1 - \varphi'(a)) \leqq C^2$. On saura alors que

$$\max_i |w_i - x_i| \leqq \varphi_k(C/m).$$

D'autre part $|q_i - p_i|$ est toujours dominé par un multiple de $\max_i |w_i - x_i|$, vu les inégalités (VI). Quitte à augmenter la constante, si $\|\cdot\|$ est une norme dans $\mathbf{R}^{2n}$ $\|\mu_{m,k} - \mu_1\| \leqq (C/m)^{2^k}$.

**6. Détermination numérique de la solution du système I** (**cas singulier**). On veut résoudre le système

$$\sum_{i=1}^n p_i f_j(x_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n$$

alors que l'on dispose de $2n - 2$ quantités $(\pi_i, \xi_i)_{i=1}^{n-1}$ pour lesquelles

$$\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i) = y_j, \quad 1 \leqq j \leqq 2n - 2$$

et qui donneraient lieu à une racine cachée multiple. Si

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i f_j(\xi_i), \quad 1 \leqq j \leqq 2n,$$

ceci veut dire que le polynôme de Tchebycheff du Théorème 6, $D(x) = \sum_{j=1}^{2n} \beta_j f_j(x)$ où $D(\xi_i) = 0$, $1 \leqq i \leqq n - 1$, $\sum_{j=1}^{n} \beta_j(y_j - \zeta_j) = 0$, $D \not\equiv 0$

admet une racine triple $\xi$ pour une des valeurs $\xi_i$. Pour la commodité de l'écriture, nous supposerons que $\xi = \xi_1$. La résolution numérique que nous proposons s'appuie encore sur les solutions des équations

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_j(x_i(t)) = \zeta_j + t(y_j - \zeta_j).$$

Il s'agit d'adapter la technique du cas régulier. Pour ce faire, on choisit un nombre $t$, suffisamment près de 0. Nous indiquerons comment par un développement de Taylor d'ordre 2, on peut obtenir une approximation suffisamment précise de la solution $(p_i(t_1), x_i(t_1))_{i=1}^{n}$. Cette approximation pourra être corrigée $k$ fois par l'opérateur $Q_{t_1}$. Nous indiquerons ensuite une suite appropriée d'abcisses $t_2, t_3, \ldots, t_m = 1$ où sera appliqué l'algorithme du cas régulier: partant de la prédiction $(p_i(t_{j-1}), x_i(t_{j-1}))$ pour $(p_i(t_j), x_i(t_j))$, on corrige $k$ fois par l'opérateur $Q_{t_j}$, ceci pour $2 \leqq j \leqq m$.

Pour étudier davantage le comportement des fonctions $p_i(t)$, $x_i(t)$ lorsque $t$ est voisin de zéro, servons-nous de la variable $u = \sqrt{t}$ et posons $p_i^*(u) = p_i(\sqrt{t})$ et $x_i^*(u) = x_i(\sqrt{t})$. On sait que

$$(\mathrm{VII_u}) \quad \sum_{i=1}^{n} p_i^*(u) f_j(x_i^*(u)) = \zeta_j + u^2(y_j - \zeta_j), \quad 1 \leqq j \leqq n.$$

LEMME 14. *Les fonctions $p_i^*(u)$ et $x_i^*(u)$ sont des fonctions paires de $u$, si $2 \leqq i \leqq n - 1$. De plus, $p_n^*(-u) = p_1^*(u)$ et $x_n^*(-u) = x_1^*(u)$.*

*Démonstration.* Vu le Théorème 10, les fonctions $p_i^*(u)$ et $x_i^*(u)$, $1 \leqq i \leqq n$, se prolongent analytiquement sur un voisinage de $u = 0$. Puisque les équations $(\mathrm{VII}_u)$ nous assurent que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^*(u) f_j(x_i^*(u)) = \sum_{i=1}^{n} p_i^*(-u) f_j(x_i^*(-u))$$

si $u$ est suffisamment petit. La Proposition 4 donne que les $x_i^*(-u)$ sont des permutations des $x_i^*(u)$ et les $p_i^*(-u)$ correspondront aux $p_i(u)$. Puisque $x_i^*(u)$ est voisin de $\xi_i$ lorsque $u$ décroît vers zéro, il faut bien que $x_i(-u) = x_i(u)$, si $1 \leqq i \leqq n$ et alors $p_i(-u) = p_i(u)$. Remarquons que

$$x_1^*(-u) + x_n^*(-u) = x_1^*(u) + x_n^*(u).$$

Puisque $dx_1^*/du \neq 0$, il faut que $x_1^*(-u) = x_n^*(u)$. Il s'ensuit que $p_1^*(-u) = p_n^*(u)$.

COROLLAIRE.

$$\frac{dp_n^*}{du}(0) = -\frac{dp_1^*}{du}(0), \quad \frac{dx_n^*}{du}(0) = -\frac{dx_1^*}{du}(0)$$

$$\frac{dp_i^*}{du}(0) = \frac{dx_i^*}{du}(0) = 0, \quad 1 < i < n.$$

LEMME 15. *Dans le cas singulier, les équations suivantes sont valides:*

$$\frac{d^2p_1^*}{du^2}(0)d_j(\xi_1) + \left(4\frac{dp_1^*}{du}(0)\frac{dx_1^*}{du}(0) + \pi_1\frac{d^2x_1^*}{du^2}(0)\right)f_j'(\xi_1)$$
$$+ \pi_1\left(\frac{dx_1^*}{du}(0)\right)^* f''(\xi_1)$$
$$+ \sum_{i=2}^{n-1}\left(\frac{d^2p_1^*}{du^2}(0)f_j(\xi_i) + \pi_i\frac{d^2x_i^*}{du^2}(0)f_j'(\xi_i)\right)$$
$$= 2(y_j - \zeta_j), \quad 1 \leqq j \leqq 2n.$$

*Démonstration.* Il suffit de dériver 2 fois par rapport à $u$ les équations de $(\mathrm{VII}_u)$, d'évaluer en $u = 0$ et de simplifier les évaluations grâce au corollaire du Lemme 14.

LEMME 16. *Dans le cas singulier, soient $\{S_i, V_i\}_{i=1}^{n-1}$ et $W$, $R$ les quantités obtenués par la solution du système linéaire de $2n$ équations linéaires*

$$(\mathrm{VIII}) \quad S_1f_j(\xi_1) + V_1f_j'(\xi_1) + Wf_j''(\xi_1) + Rf_j'''(\xi_1)$$
$$+ \sum_{i=2}^{n-1}(S_if_j(\xi_i) + V_if_j'(\xi_i)) = (y_j - \zeta_j) \quad (1 \leqq j \leqq 2n).$$

*Alors les identités suivantes ont lieu*

1. $S_i = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2p_i^*}{du^2}(0), \quad 1 \leqq i \leqq n-1$

2. $V_i = 2\dfrac{dp_1^*}{du}(0)\dfrac{dx_1^*}{du}(0) + \dfrac{\pi_1}{2}\dfrac{d^2x_1^*}{du^2}(0)$

   $V_i = \dfrac{\pi_i}{2}\dfrac{d^2x_i^*}{du^2}(0), \quad 2 \leqq i \leqq n-1$

3. $W = \dfrac{\pi_1}{2}\left(\dfrac{dx_1^*}{du}(0)\right)^2$

4. $R = 0.$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour un système de Tchebycheff au sens étendu, le système linéaire considéré admet une et une seule solution $(S_i, V_i)_{i=1}^{n-1}$, $W$ et $R$. On se sert du Lemme 15 pour obtenir cette solution.

THÉORÈME 17. *Si $\{S_i, V_i\}_{i=1}^{n-1}$ et $W$, $R$ donnent la solution du système* (VIII), *et si $dx_1^*/du(0) > 0$, alors*

1. $\dfrac{dx_1^*}{du}(0) = \sqrt{\dfrac{2W}{\pi_1}}$ *et* $\dfrac{dx_n^*}{du}(0) = -\sqrt{\dfrac{2W}{\pi_1}}$

2. $\dfrac{d^2x_1^*}{du^2}(0) = \dfrac{d^2x_n^*}{du^2}(0) = \dfrac{V_1}{\pi_1} - \dfrac{1}{2}W\dfrac{D^{iv}(\xi_1)}{D'''(\xi_1)} - \dfrac{3}{2}\sum_{i=2}^{n-1}\dfrac{V_i^2}{\pi_i}W\dfrac{D''(\xi_i)}{D'''(\xi_i)}$

*où $D$ est le polynôme de Tchebycheff dont $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ sont au moins racines doubles et où $\xi_1$ est une racine triple.*

*Démonstration.* L'équation 1 du théorème vient simplement de la relation 3 du Lemme 16.

Soit $D(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j(x)$ le polynôme de Tchebycheff dont $\xi_i$ sont des racines doubles $(2 \leqq i \leqq n-1)$ et dont $\xi_i$ est une racine triple. Si l'on multiplie par $\beta_j$ la $j^e$ équation du système $(\mathrm{VII}_u)$ et en faisant appel au Théorème 6, on obtient

$$\sum_{i=1}^n p_i^*(u)D(x_i^*(u)) = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i D(\xi_i) = 0.$$

Maintenant, en dérivant 4 fois par rapport à $u$ en $u = 0$ le terme de gauche et en utilisant les propriétés de $D$ et du Lemme 16, nous obtenons le résultat. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails.

Le Théorème 17, permet d'approcher le point $(x_i(t_1))_{i=1}^n$. Les résultats suivants cherchent à établir que les corrections $Q_t$ déjà considérées se comportent bien lorsque l'on a quitté le point singulier $(x_i(0))_{i=1}^n$. Ce comportement est bon vis-à-vis une nouvelle famille de pseudo-métriques que nous définissons présentement:

$$d_t^*(w, x) = \max \{|w_i - x_i|/t : 1 \leqq i \leqq n\}.$$

LEMME 18. *Il existe deux constantes positives $M$ et $p$ indépendantes de $t$, telles que pour $(w_i, q_i)_{i=1}^n$ avec $|w_i - x_i(t)| \leqq p$, $2 \leqq i \leqq n-1$, $|w_k - x_k(t)| \leqq p\sqrt{t}$, $k = 1$ et $n$ et $t \in (0, 1]$, nous avons*

1. $|\bar{q}_j - p_j(t)| \leqq M\sqrt{t}(d_t^*(v, u_t))^2, \quad 1 \leqq j \leqq n$
2. $|v_j - p_j(t)(x_j(t) - w_j)| \leqq Mt(d_t^*(v, u_t))^2,$

*où les quantités $\bar{q}_i$, $\bar{v}_i$ sont solutions de* $(\mathrm{IV}_t)$.

*Esquisse de la démonstration.* Nous pouvons trouver un nombre $r \neq 0$ tel que pour $(w_i)_{i=1}{}^n$ où

$$\left.\begin{array}{l} |w_i - x_i(t)| \leqq r \\ |w_k - x_k(t)| \leqq r\sqrt{t} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \leqq i \leqq n-1 \\ k = 1 \text{ ou } n \end{array}$$

nous avons

$$\left.\begin{array}{l} |w_i - w_l| \geqq r \\ |w_k - w_l| \geqq r \\ |w_1 - w_n| \geqq r\sqrt{t} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i \neq l, 2 \leqq i, l \leqq n-1 \\ k = 1 \text{ ou } n. \end{array}$$

Maintenant considérons $A_k(w)$ et $B_k(w)$ les polynômes définis dans la démonstration du Lemme 11 pour $(w_r)_{r=1}^n$ tel que ci-haut. Nous obtenons par une étude minutieuse, qu'il existe une constante $K$ positive tel que

$$\alpha_{kj}(w_1, \ldots, w_n) \leqq K/(w_1 - w_n)^3$$
$$B_{kj}(w_1, \ldots, w_n) \leqq K/(w_1 - w_n)^2.$$

En faisant un développement d'ordre deux et en utilisant le fait que $|w_1 - w_n| > r\sqrt{t}$, nous obtenons

$$|\bar{q}_k - p_k(t)| \leqq \sum_{i=1}^{n} |p_i(t)|\, |x_i(t) - w_i|^2\, |A_k''(\eta_{ki})|$$
$$\leqq \frac{M}{t^{3/2}} \max |w_i - x_i(t)|^2.$$

D'une façon similaire,

$$|\bar{v}_k - p_k(t)(x_k(t) - w_k)| \leqq \frac{M}{t} \max\nolimits_{1 \leqq i \leqq n} |w_i - x_i|^2.$$

Nous avons maintenant le résultat puisque

$$td_t^*(\nu, \mu_t) = \max\nolimits_{1 \leqq i \leqq n} |w_i - x_i(t)|.$$

LEMME 19. *Il existe deux constantes positives $\epsilon_0$ et $M$ indépendantes de $t$ telles que pour $t \in (0, 1]$, nous avons que l'opérateur $Q_t$ est bien défini sur $\{v : d_t^*(\nu, \mu_t) \leqq \epsilon_0\}$ et sur cet ensemble nous avons l'inégalité suivante*

$$d_t^*(Q_t(\nu), \mu_t) \leqq M(d_t^*(\nu, \mu_t))^2.$$

*Démonstration.* Soient $M_1$ et $p$ les deux constantes de Lemme 14. Il existe $M_3$ telle que

$$p_k(t) \geqq M_3, \quad 1 \leqq k \leqq n, t \in [0, 1].$$

Posons $\epsilon_0 = \min\, (r, 1, \sqrt{M_3/2M_1})$. Nous avons alors,

$$\bar{q}_k \geqq M_3/2$$

puisque

$$\bar{q}_k \geqq p_k(t) - |p_k(t) - \bar{q}_k| \geqq M_3 - M_1t(d_t^*(v, u_t))^2$$
$$\geqq M_3 - (M_3/2)t \geqq M_3/2.$$

De plus,

$$\bar{q}_k|\bar{w}_k - x_k(t)| \leqq 2M_1t(d_t^*(\nu, \mu_t))^2$$

puisque,

$$\begin{aligned}\bar{q}_k|w_k - x_k(t)| &= |\bar{q}_k(\bar{w}_k - w_k) - \bar{q}_k(x_k(t) - w_k)|\\ &= |\bar{v}_k - \bar{q}_k(x_k(t) - w_k)|\\ &\leqq |\bar{v}_k - p_k(t)(x_k(t) - w_k)| + |p_k(t) - \bar{q}_k|\, |x_k(t) - w_k)|\\ &\leqq M_1t(d_t^*(\nu, \mu_t))^2 + M_1\sqrt{t}(d_t^*(\nu, \mu_t))^2td_t^*(\nu, \mu_t)\end{aligned}$$

par le Lemme 14

$$\leqq 2M_1 t(d_t^*(\nu, \mu_t))^2.$$

Par conséquent,

$$\bar{w}_k - x_k(t)/t \leqq (1/M_3)2M_1(d_t^*(\nu, \mu_t))^2.$$

Ainsi en prenant $M = 2M_1/M_3$, on obtient

$$d_t^*(Q_t(\nu), \mu_t) \leqq M(d_t^*(\nu, \mu_t))^2.$$

Cherchons maintenant une chaine $\delta$-admissible à la courbe $\mu_t = (p_i(t), x_i(t))_{i=1}^n$ relativement à la famille de pseudo-métriques $d_t^*$.

LEMME 20. *Soit $\gamma$ et $t_0$ deux nombres tels que $0 < \gamma, t_0 \leqq 1$, soit $t_n$ définit d'une façon récurrente par $\sqrt{t_{n+1}}$ = le minimum entre 1 et $\sqrt{t_n} + \gamma t_n$, et soit $n_\gamma$ le plus petit entier $n$ tel que $t_n = 1$; alors il existe une constante $A$ indépendante de $\gamma$ et $t_0$ telle que $\{u_{t_i}\}_{i=1}^m$, $m = n_\gamma$, est une chaîne $A$-admissible.*

La démonstration est semblable à celle du Lemme 12.

Maintenant posons,

$$x_i^*(t) = x_i(0) + \frac{\partial x_i}{\partial u}(0)\sqrt{t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}(0)t, \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Comme $x_i(t)$ est une fonction analytique de $t$, en prenant $\sqrt{t}$ suffisamment petit, $t < t_0$, nous avons

$$|x_i^*(t) - x_i(t)|/t \leqq \eta$$

où $\eta$ est un nombre positif.

Pour un $t_0$ donné, nous posons

$$\mu_0 = (\pi_i', x_i^*(t_0))_{i=1}^n.$$

THÉORÈME 21. *Si $\delta$ est suffisamment petit, alors pour toute chaîne $\{u_{t_i}\}_{i=0}^m$ telle que définie au Lemme 20 avec $t_0$ suffisamment petit et $A\gamma = \delta$, nous avons que*

$$\mu_{m,k} = Q_{t_m}{}^k, \ldots, Q_{t_1}{}^k(\mu_0)$$

*est bien définie et*

$$\|\mu_{m,k} - \mu_0\| \leqq C(\delta/2)^{2^k}.$$

*Démonstration.* Soient $\epsilon_0$ et $M$ les deux constantes qui proviennent du Lemme 15. Si on choisit $a < \epsilon_0$ et $a < 1/2M$, les opérateurs $Q_t$ sont des opérateurs de corrections au sens de la Section 1 avec comme fonction de contraction locale $\varphi(x) = Mx^2$; $a$ sera le niveau de contraction.

Prenons $\delta \leqq a - \varphi(a)$. Soit $t_0$ tel que pour tout $t \leqq t_0$, nous avons

$$|x_i^*(t_0) - x_i(t)|/t \leqq \varphi_k^*(\delta).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-041-8 Published online by Cambridge University Press

En prenant $\{\mu_{t_i}\}_{i=0}^{m}$ une chaîne $A\gamma$-admissible avec $A\gamma \leqq \delta$ nous avons par le Théorème 2 que $\mu_{m,k}$ est bien définie et que

$$\max_{1\leqq i\leqq n} |w_i - x_i(1)| = d_1^*(\mu_{m,k}, \mu_0) \leqq \varphi_k^*(\delta).$$

En faisant appel au Lemme 3,

$$\varphi_k^*(\delta) \leqq \varphi_k(\delta)/(1 - \varphi_k'(a)) \leqq \varphi_k(\delta)/(1 - \varphi_k'(a)) \\ \leqq C(M\delta)^{2^k} \leqq C(\delta/2)^2 .$$

D'autre part, par l'inégalité du Théorème 14.1,

$$|q_j - p_j(1)| \leqq \varphi(d_1^*(Q_m^{k-1}(\mu_{m-1,k}), \mu_0) \\ \leqq \varphi \cdot \varphi_{k-1}(d_1^*(\mu_{m-1,k}, \mu_0)) \leqq \varphi_k(\delta + \varphi_k^*(\delta)) = \varphi_k^*(\delta).$$

Quitte à augmenter la constante si $\|\cdot\|$ est une norme dans $\mathbf{R}^{2n}$.

$$\|\mu_{m,k} - \mu_0\| \leqq (\delta/2)^{2^k}.$$

**7. Exemple numérique de résolution du système I.** Nous présentons un premier système d'équations dont nous ne ferons pas l'analyse numérique mais dont nous observerons la symétrie pour créer un second système d'équations. Partons du système de Tchebycheff sur l'intervalle $(-1, 1)$ : $1, u, u^2, \ldots, u^{2r-1}$; $u$ est la variable indépendante qui s'étend de $-1$ à $1$. Soit $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ la suite des intégrales,

$$z_j = \int_{-1}^{1} u^j du;$$

si $j$ est impair $z_j = 0$ et si $j$ est pair $z_j = 2/(j + 1)$. Rechercher la solution la solution du système

$$\sum_{i=1}^{r} p_i u_i^{\,j} = z_j, \quad 0 \leqq j \leqq 2r - 1,$$

où $p_i$ et $u_i$ sont les inconnues, revient à trouver la formule de quadrature de Gauss-Legendre. Les $u_i$ sont les divers zéros du $r^e$ polynôme de Legendre, $P_r(u)$. Si $u_i$ est un de ces zéros, si $L_i(u)$ est le polynôme $P_r(u)/(P_r'(u_i)(u - u_i))$, alors

$$p_i = \int_{-1}^{1} L_i^{\,2}(u)du.$$

On peut retrouver ces nombres $p_i$ et $u_i$ dans des tables mathématiques. Par exemple, Kronod [**5**] donne les valeurs des quantités $p_i$ et $(1 + u_i)/2$ lorsque $n$ est un entier qui ne dépasse pas 40.

Considérons le cas où $r = 2n$; désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les racines positives de $p_{2n}(u)$, les autres racines seront $-u_1, -u_2, \ldots, -u_n$. Les

https://doi.org/10.4153/CJM-1982-041-8 Published online by Cambridge University Press

équations suivantes sont valides

$$\sum_{i=1}^{n} 2p_i u_i^{2j} = 2/(2j+1), \quad 0 \leqq j \leqq 2n-1.$$

Si nous faisons le changement de variable $x = u^2$, $x_i = u_i^2$, le système d'équations dont nous voulons faire l'analyse numérique est le suivant:

$$\text{VIII)} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^{\,j} = 1/(2j+1), \quad 0 \leqq j \leqq 2n-1.$$

Il s'agit d'un exemple du système I pour le système de Tchébycheff $\{1, x, \ldots, x^{2n-1}\}$.

Regardons la résolution du système VIII avec $n = 7$ par la méthode du couplage des équations. Nous avons fait un programme complet dans le langage FORTRAN selon les instruction élaborées dans la dernière section. On commence par résoudre le système VIII avec $n = 1$ : $p_1 = 1$ et $x_1 = 1/3$. On procède ensuite par récurrence sur $n$. Si les $(2n - 2)$ premières équations ont été résolues de façon satisfaisante, la recherche de la solution des $2n$ premières équations commence par l'évaluation de ce que nous avons appelé une racine cachée et poursuit selon un algorithme qui dépend de deux paramètres $m$ et $k$. $m$ est le nombre de subdivisions opérées sur la courbe-solution $(p_i(t), x_i(t))_{i=1}^{n}$ où $0 \leqq t \leqq 1$; $k$ est le nombre d'itérations dans les corrections raffinées de Newton-Raphson. Pour une solution présumée $(q_i, w_i)_{i=1}^{n}$ du système VIII, nous noterons par $e$ l'erreur commise dans l'espace-image: $e$ est la plus grande des quantités

$$\left| \sum_{i=1}^{n} q_i w_i^{\,j} - 1/(2j+1) \right|, \quad 0 \leqq j \leqq 2n-1.$$

Pour chacune des valeurs entières de $n$ de 2 à 7, nous donnons dans le tableau 1 le nombre $m$ de subdivisions et le nombre $k$ d'itérations utilisées à l'étape $n$. Nous donnons aussi la valeur $\xi$ de la racine cachée, l'erreur commise $e$ au terme de l'algorithme et le temps $t$ de calcul qu'a pris le CYBER 173 de l'Université de Montréal pour exécuter cette tranche de calcul. Pour le nombre $m$ nous retenons toujours une puissance entière de 2.

TABLEAU 1 Erreurs et temps de calcul ($n \leqq 7$)

| $n$ | $\xi$ | $m$ | $k$ | $e$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0,52380952 | 4 | 5 | $4 \times 10^{-15}$ | 0,23$s$ |
| 3 | 0,50649351 | 4 | 5 | $3 \times 10^{-15}$ | 0,39$s$ |
| 4 | 0,50303030 | 4 | 5 | $5 \times 10^{-15}$ | 0,61$s$ |
| 5 | 0,50175439 | 4 | 5 | $6 \times 10^{-15}$ | 0,92$s$ |
| 6 | 0,50114416 | 8 | 4 | $4 \times 10^{-15}$ | 1,96$s$ |
| 7 | 0,50080508 | 4 | 5 | $6 \times 10^{-14}$ | 1,80$s$ |

Pour illustrer le gain ou la perte de précision selon le choix de $m$ et de $k$, nous formons le tableau des erreurs $e(m, k)$ obtenues au stade $n = 3$ lorsque $m$ varie parmi les nombres 1, 2, 4, 8 et 16 et lorsque $k$ varie de 1 à 5. Lorsque dans ce tableau, $e(m, k) = \infty$, il est sous-entendu que l'algorithme n'a pas été complété parce que les corrections successives de type de Newton-Raphson donnaient un poids $p_i$ négatif ou inversaient l'ordre de deux racines.

TABLEAU 2. Erreurs commises ($n = 3$)

| $m/k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 2 | $8{,}3 \times 10^{-3}$ | $6{,}5 \times 10^{-2}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 4 | $3{,}0 \times 10^{-4}$ | $3{,}4 \times 10^{-4}$ | $1{,}1 \times 10^{-5}$ | $4{,}9 \times 10^{-9}$ | $2{,}7 \times 10^{-15}$ |
| 8 | $6{,}7 \times 10^{-4}$ | $2{,}1 \times 10^{-5}$ | $2{,}3 \times 10^{-8}$ | $2{,}0 \times 10^{-14}$ | $1{,}9 \times 10^{-15}$ |
| 16 | $1{,}8 \times 10^{-4}$ | $1{,}2 \times 10^{-6}$ | $6{,}1 \times 10^{-11}$ | $2{,}7 \times 10^{-17}$ | $5{,}3 \times 10^{-15}$ |

Nous terminons par quelques commentaires. Ces deux tableaux indiquent que le choix de 5 pour $k$ suffit pour obtenir toute la précision souhaitée dans tous les cas. Notre expérience acquise dans d'autres exemples du système I maintient cette affirmation. L'algorithme de la Section 7 se comporte bien selon le tableau 1 et ne demande que des valeurs petites pour $m$. Cependant, si l'on tente de résoudre le système VII $n = 8$, on a la mauvaise surprise que même la subdivision en 256 parties de la courbe-solution est insuffisante pour pouvoir résoudre le système. Il faut choisir $m$ encore plus grand. Ce phénomène a lieu semble-t-il parce que la racine cachée au stade $n = 8$ vaut 0,5013 et est rapprochée de l'une des 7 racines $x_i$ du système avec $n = 7$, ces racines qui sont 0,0117, 0,1018, 0,2655, 0,4724, 0,6843, 0,8620, et 0,9728.

## BIBLIOGRAPHIE


**1.** R. E. Bellman, R. E. Kalaba et J. A. Lockett, *Numerical inversion of the Laplace transform: applications to biology, economics and physics* (American Elsevier, New York, 1966).

**2.** S. Karlin et W. Studden, *Tchebycheff systems: with application in analysis and statistics* (Interscience, New York, 1966).

**3.** M. G. Krein, *The ideas of P. L. Cebysev and A. A. Markov in the theory of integrals and their further development*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) *6* (1951), (44), 3–120. (Amer. Math. Soc. Transl. *12* (1959), 1–121).

**4.** M. G. Krein et A. A. Nudel'man, *The Markov moment problem and extremal problems*, Nauka, Moscou (1973). Traduction anglaise: American Mathematical Society (1977).

**5.** A. S. Kronrod, *Nodes and weights of quadrature formulas* (Consultants Bureau, New York, 1965).

6. H. Rutishauser, *Der Quotienten-Differenzen Algorithmus* (Birkhaüser, Verlag, Basel, 1957).

7. J. Savoie, *Résolution numérique d'un système d'équations non linéaires déterminé par un système de Tchebycheff*, Thèse de doctorat, Université de Montréal (1981).

*Université de Montréal,*
*Montréal, Québec*