Canad. Math. Bull. Vol. **40** (1), 1997 pp. 117–128

UN LEMME DE SCHWARZ POUR LES BOULES-UNITÉS OUVERTES

JEAN-PIERRE VIGUÉ

RÉSUMÉ. Let B_1 and B_2 be the open unit balls of $\mathbb{C}^{n_1}$ and $\mathbb{C}^{n_2}$ for the norms $\|\,.\,\|_1$ and $\|\,.\,\|_2$. Let $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ be a holomorphic mapping such that $f(0) = 0$. It is well known that, for every $z \in B_1$, $\|f(z)\|_2 \le \|z\|_1$, and $\|f'(0)\| \le 1$.

In this paper, I prove the converse of this result. Let $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ be a holomorphic mapping such that $f'(0)$ is an isometry. If B_2 is strictly convex, I prove that $f(0) = 0$ and that f is linear. I also define the rank of a point x belonging to the boundary of B_1 or B_2. Under some hypotheses on the ranks, I prove that a holomorphic mapping such that $f(0) = 0$ and that $f'(0)$ is an isometry is linear.

1. **Introduction.** Le lemme de Schwarz dit que, si une application holomorphe f du disque-unité ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$ dans lui-même est telle que $f(0) = 0$, alors, pour tout $z \in \Delta$, $|f(z)| \le |z|$, et $|f'(0)| \le 1$. Réciproquement, si $f\colon \Delta \longrightarrow \Delta$ est une application holomorphe telle que $|f'(0)| = 1$ (et il n'est pas nécessaire dans ce cas de supposer que $f(0) = 0$), alors $f(z) = \lambda z$, où λ est un nombre complexe de module 1, et f est un automorphisme linéaire de Δ.

Si maintenant B_1 et B_2 sont les boules-unités ouvertes de $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$ respectivement pour des normes quelconques $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$, et si $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ est une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, on déduit du lemme de Schwarz et du théorème de Hahn-Banach que, pour tout $z \in B_1$, $\|f(z)\|_2 \le \|z\|_1$, et $\|f'(0)\| \le 1$.

Le problème que nous nous proposons d'étudier dans cet article est la réciproque éventuelle de ce résultat : soit $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ une application holomorphe telle que $f'(0)$ soit une isométrie pour les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$. Sous quelles hypothèses sur les normes, ceci entraîne-t-il que $f(0) = 0$? Dans ce cas, est-ce que f est la restriction à B_1 de $f'(0)$?

Des exemples (voir Z. Yan [20]) montrent que c'est faux en général. Ainsi, l'application holomorphe f de $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$ dans $\Delta^3 = \Delta \times \Delta \times \Delta$ définie par

$$f(z_1, z_2) = \big(z_1, z_2, h(z_1, z_2)\big)$$

où $h\colon \Delta \times \Delta \longrightarrow \Delta$ est une application holomorphe quelconque, est telle que $f'(0)$ soit une isométrie pour les normes correspondantes (il s'agit ici des normes $\sup(|z_1|, |z_2|)$ et $\sup(|z_1|, |z_2|, |z_3|)$) mais ne vérifie pas $f(0) = 0$ en général. Même si on suppose que $f(0) = 0$, f n'est pas linéaire en général.

Reçu par les éditeurs le August 2, 1995.
Classification (AMS) par sujet : 32H15, 32H02.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-014-4 Published online by Cambridge University Press

Si on suppose que $f(0) = 0$, des résultats partiels ont été démontrés par M. Hervé [6], A. Renaud [12] et E. Vesentini [15, 16 et 17]. En particulier, E. Vesentini [15] montre que, si $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ est une application holomorphe telle que $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$, pour tout x, et sous l'hypothèse que les points de la frontière ∂B_2 sont des points complexe-extrémaux de $\overline{B}_2$, alors f est linéaire. Si on suppose que $B_1 = B_2$ et que $f(0) = 0$, j'ai démontré [18 et 19], sous certaines hypothèses sur la frontière de B_1, que, si $\|f'(0)\cdot v\| = \|v\|$, pour tous les vecteurs v d'un ouvert non vide U de B_1, alors f est linéaire. D'après A. Koranyi [8], on peut même considérer une hypothèse plus faible dans le cas de la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour la norme hermitienne.

Si B_1 et B_2 sont contenus dans des espaces de dimensions différentes et si on ne suppose pas $f(0) = 0$, il faut citer un résultat positif de W. Rudin [14] dans le cas des boules-unités ouvertes de $\mathbb{C}^{n_1}$ et de $\mathbb{C}^{n_2}$ pour les normes hermitiennes. Sous ces hypothèses, W. Rudin montre que $f(0) = 0$ et que f est linéaire. Plus récemment, Z. Yan [20] a montré le même résultat lorsque B_1 et B_2 sont deux domaines bornés symétriques dans leur réalisation de Harish-Chandra (B_1 et B_2 sont alors les boules-unités ouvertes de $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$ pour des normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\|_2$) sous la condition que le rang de B_2 soit inférieur ou égal au rang de B_1.

Dans cet article, nous allons d'abord étudier dans quel cas l'hypothèse que $f'(0)$ soit une isométrie pour les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ entraîne que $f(0) = 0$. Nous montrerons en particulier que c'est le cas si B_2 est strictement convexe. Nous montrerons alors que f est linéaire.

Ensuite, dans le cas où $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ est une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie pour les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$, nous étudierons la question de savoir si f est linéaire. Bien sûr, dans le résultat de Z. Yan [20], l'hypothèse sur les rangs de B_1 et B_2 est fondamentale. Si on regarde attentivement la définition du rang d'un domaine borné symétrique B (voir par exemple O. Loos [11]), on remarque que le rang de B est la dimension r du plus grand sous-espace vectoriel complexe V tel que $V \cap B$ soit linéairement isomorphe au polydisque Δ^r. Ceci nous aménera à définir un rang local en un point x de la frontière de la boule-unité ouverte B de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\,.\,\|$. Dans un certain nombre de cas, ce rang sera constant en tout point x de la frontière de B ; on parlera alors du rang de B. Sous l'hypothèse que le rang de B_2 est inférieur ou égal au rang de B_1, nous généraliserons alors le résultat de Z. Yan [20].

Nous allons commencer par un certain nombre de rappels sur les distances et métriques invariantes et les géodésiques complexes.

2. **Distance invariantes et géodésiques complexes.** La distance de Carathéodory c_D sur un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est défini par la formule :

$$c_D(x,y) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} \rho\big(f(x), f(y)\big),$$

où $H(D,\Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de D dans le disque-unité Δ, et ρ est la distance de Poincaré sur Δ. De même, la métrique infinitésimale de Carathéodory E_D est définie (voir [3, 4, 5, 7 et 9]) par

$$E_D(x,v) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} |f'(x)\cdot v| \quad (x \in D, v \in \mathbb{C}^n).$$

La métrique infinitésimale de Kobayashi F_D est définie de manière duale :

$$F_D(x, v) = \inf\{|\lambda| \mid \exists\varphi \in H(\Delta, D) \text{ tel que } \varphi(0) = x \text{ et } \lambda\varphi'(0) = v\}.$$

Ensuite, on définit par intégration la distance de Kobayashi k_D à partir de la métrique infinitésimale de Kobayashi F_D, et nous renvoyons le lecteur intéressé par ces questions à [3, 4, 5, 7 et 9].

E. Vesentini [15, 16 et 17] définit les géodésiques complexes d'un domaine borné D : on dit qu'une application holomorphe φ du disque-unité Δ dans D est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour les distances de Carathéodory c_Δ et c_D. D'après E. Vesentini [16], nous avons la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

THÉORÈME 2.1. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Soit $\varphi : \Delta \longrightarrow D$ une application holomorphe, et supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite* :

(i) $E_D\big(\varphi(0), \varphi'(0)\big) = 1$;

(ii) il existe deux points distincts α et β de Δ tels que $c_D\big(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big) = c_\Delta(\alpha, \beta)$.

Alors φ est une géodésique complexe de D.

D'autre part, si D est convexe, on sait d'après H. Royden et P. Wong [13] et L. Lempert [10] (voir aussi M. Jarnicki and P. Pflug [7]) que $c_D = k_D$ et que $E_D = F_D$. On déduit de ce résultat l'existence de géodésiques complexes dans un domaine convexe borné D. Plus précisement, un point x de D et un vecteur v de $\mathbb{C}^n$ tels que $E_D(x, v) = 1$ étant donnés, il existe une géodésique complexe φ de D telle que $\varphi(0) = x$ et que $\varphi'(0) = v$.

Soit maintenant B la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\,.\,\|$. Pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$, le théorème 2.1 et le théorème de Hahn-Banach montrent que l'application de Δ dans B

$$\zeta \longmapsto \varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$$

est une géodésique complexe de B. On en déduit en particulier que, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$E_B(0, x) = F_B(0, x) = \|x\|.$$

Rappelons qu'un point x appartenant à la frontière ∂B de B est un point complexe-extrémal de $\overline{B}$ si la relation $x + \zeta y \in \overline{B}$ pour tout $\zeta \in \Delta$ entraîne $y = 0$. On déduit de E. Vesentini [16] le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Supposons que $\frac{x}{\|x\|}$ soit un point complexe-extrémal de $\overline{B}$. Alors l'application φ de Δ dans B définie par $\varphi(\zeta) = \zeta\frac{x}{\|x\|}$ est l'unique géodésique complexe de B telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \frac{x}{\|x\|}$.*

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-014-4 Published online by Cambridge University Press

3. **Une inégalité sur la métrique infinitésimale de Kobayashi.** Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\,.\,\|$. Je dirai que B est strictement convexe au voisinage d'un point v de la frontière ∂B de B s'il existe un voisinage V de v dans ∂B formé de points extrémaux (au sens réel) de $\overline{B}$.

Soit F_B la métrique infinitésimale de Kobayashi sur B. Comme on l'a déjà vu, on sait que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$,

$$F_B(0, v) = \|v\|.$$

Pour les autres points de B, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout $x \in B$, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, on a :*

$$F_B(x, v) \geq \|v\|.$$

Pour tout $x \neq 0$ dans B, il existe au moins un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$F_B(x, v) > \|v\|.$$

De plus, pour tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ de norme 1, tel que ∂B soit strictement convexe au voisinage de v, pour tout $x \neq 0$ dans B,

$$F_B(x, v) > \|v\|.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer le premier résultat. Soit $\varphi \colon \Delta \longrightarrow B$ une application holomorphe telle que $\varphi(0) = x$. Les inégalités de Cauchy montrent que $\|\varphi'(0)\| \leq 1$. Par suite, si λ est un nombre complexe tel que $\lambda\varphi'(0) = v$, on a $|\lambda| \geq \|v\|$. On en déduit que $F_B(x, v) \geq \|v\|$.

Soit $x \neq 0$. Montrons que $F_B(x, x) > \|x\|$. D'après les résultats du paragraphe précédent,

$$\zeta \longmapsto \varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$$

est une géodésique complexe de B. C'est donc une isométrie pour le métrique infinitésimale de Kobayashi. On a donc

$$F_B(x, x) = F_B\big(\varphi(\|x\|), \|x\|\varphi'(\|x\|)\big) = F_\Delta(\|x\|, \|x\|) = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|^2},$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

Si on suppose maintenant que la boule B est strictement convexe au voisinage de v, on veut montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$F_B(x, v) > \|v\|.$$

Pour cela, supposons qu'il existe $x \in B$ et un vecteur $v \neq 0$ tel que $F_B(x, v) = \|v\| = 1$. D'après la définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi, il existe une suite de fonctions holomorphes

$$\varphi_n \colon \Delta \longrightarrow B$$

telles que $\varphi_n(0) = x$ et que $\varphi_n'(0) = \lambda_n v$, avec $\lambda_n \longrightarrow 1$. Quitte à extraire une sous-suite convergente, ce qui est possible puisque il s'agit de fonctions holomorphes bornées, on construit une fonction holomorphe

$$\varphi\colon \Delta \longrightarrow \bar{B}$$

telles que $\varphi(0) = x$ et que $\varphi'(0) = v$. Comme B est convexe, on sait d'après L. Harris [5] que les boules pour la distance de Carathéodory sont compactes dans B. Du fait que $\varphi(0) = x$, on déduit facilement que φ envoie Δ dans B.

Notre démonstration s'inspire d'une méthode développée par S. Dineen [3, p. 93]. Comme φ est une fonction holomorphe bornée, on peut définir, pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$, une valeur au bord

$$\varphi^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1_-} \varphi(re^{i\theta}).$$

Soit d'autre part $\psi\colon \Delta \longrightarrow B$ la géodésique complexe définie par

$$\zeta \longmapsto \psi(\zeta) = \zeta v$$

(ψ est l'unique géodésique complexe de B telle que $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = v$). Pour tout $\lambda \in [0,1]$, considérons

$$f_\lambda = \lambda\varphi + (1-\lambda)\psi\colon \Delta \longrightarrow B.$$

On a $f_\lambda'(0) = v$, et d'après le premier résultat de notre proposition, ceci suffit à montrer que f_λ est une géodésique complexe de B. D'autre part, quand $r \longrightarrow 1_-$,

$$c_B\big(0, f_\lambda(\mathrm{re}^{i\theta})\big) \longrightarrow +\infty,$$

ce qui prouve que, pour tout θ tel que $f_\lambda^*(e^{i\theta})$ soit définie, $f_\lambda^*(e^{i\theta})$ appartient à la frontière ∂B de B. Du fait que B est strictement convexe au voisinage de v on déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, B est strictement convexe au voisinage de $e^{i\theta}v$. Mais, comme

$$f_\lambda^*(e^{i\theta}) = \lambda\varphi^*(e^{i\theta}) + (1-\lambda)\psi^*(e^{i\theta}) = \lambda\varphi^*(e^{i\theta}) + (1-\lambda)e^{i\theta}v,$$

ceci entraîne que, pour presque tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi^*(e^{i\theta}) = \psi^*(e^{i\theta}).$$

Par suite, $\varphi = \psi$, ce qui montre que $x = 0$. Le résultat est démontré.

Remarquons que, dans le dernier cas de la proposition, on pourrait remplacer l'hypothèse que B est strictement convexe au voisinage de v par l'hypothèse plus faible qu'il n'existe pas de segment $[v, x]$, avec $x \neq v$, contenu dans la frontière ∂B de B.

Cette proposition va nous permettre de montrer le théorème suivant.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-014-4 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 3.1. *Soient B_1 et B_2 les boules-unités ouvertes de $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$ pour des normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$ respectivement. Soit $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ une application holomorphe telle que $f'(0)$ soit une isométrie pour les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_2$. Alors $f(0) = 0$ et f est linéaire égale à $f'(0)$ dans les deux cas suivants :*

(i) $n_1 = n_2$;

(ii) il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^{n_1}$ de norme 1 tel que la boule-unité B_2 de $\mathbb{C}^{n_2}$ est strictement convexe au voisinage de $f'(0)\cdot v$.

De plus, dans le cas (ii), la boule-unité B_1 de $\mathbb{C}^{n_1}$ est aussi strictement convexe au voisinage de v.

DÉMONSTRATION. (i) Montrons d'abord que $f(0) = 0$. Si $n_1 = n_2$, $f'(0)$ est surjective. Si $a = f(0)$ est différent de 0, il existe donc un vecteur v de norme 1 tel que $f'(0)\cdot v = a/\|a\|_2$. Comme f est contractante pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, on a :

$$F_{B_2}(a, a/\|a\|_2) \le F_{B_1}(0, v) = \|v\| = 1.$$

Mais, d'après la proposition 3.1,

$$F_{B_2}(a, a) > \|a\|_2,$$

ce qui entraîne

$$F_{B_2}(a, a/\|a\|_2) > 1,$$

contradiction.

Il suffit alors de considérer l'application holomorphe $g = f'(0)^{-1} \circ f$. C'est une application holomorphe de B_1 dans B_1 telle que $g(0) = 0$, $g'(0) = \mathrm{id}$. D'après le théorème d'unicité de H. Cartan, $g = \mathrm{id}$, et le résultat est démontré.

(ii) Comme $f'(0)$ est une isométrie, elle envoie la frontière de B_1 dans la frontière de B_2, ce qui entraîne que les points de la frontière ∂B_1 de B_1 envoyés par $f'(0)$ sur des points extrémaux de $\bar{B}_2$ sont des points extrémaux de $\bar{B}_1$, et B_1 est strictement convexe au voisinage de v.

Montrons maintenant que $f(0) = 0$. Faisons la démonstration par l'absurde, et supposons que $a = f(0)$ soit différent de 0. Soit $v \in \mathbb{C}^{n_1}$ un vecteur de norme 1 tel que B_2 soit strictement convexe au voisinage de $f'(0)\cdot v$. On a donc $\|f'(0)\cdot v\|_2 = 1$, et d'après la proposition 3.1,

$$F_{B_2}(a, f'(0)\cdot v) > \|f'(0)\cdot v\|_2 = 1.$$

D'autre part,

$$F_{B_2}\big(a, f'(0)\cdot v\big) \le F_{B_1}(0, v) = \|v\|_1 = 1,$$

d'où la contradiction cherchée. Ainsi donc, $f(0) = 0$.

Soit alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

le développement de f en série de polynômes homogènes. Maintenant, pour tout vecteur $w \in \mathbb{C}^{n_1}$ de norme 1 appartenant à un voisinage V de v suffisamment petit, l'application f envoie la géodésique complexe

$$\zeta \longmapsto \varphi(\zeta) = \zeta w$$

sur

$$f\bigl(\varphi(\zeta)\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n P_n(w),$$

mais d'après le théorème 2.1, $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe, et, d'après le théorème 2.2 dû à Vesentini,

$$f\bigl(\varphi(\zeta)\bigr) = \zeta P_1(w).$$

Ainsi, pour tout $p \geq 2$, pour tout $w \in V$, $P_p(w) = 0$. Le théorème de prolongement analytique montre que, pour tout $p \geq 2$, $P_p \equiv 0$, et le théorème est démontré.

Remarquons que l'hypothèse (ii) est vérifiée en particulier quand la frontière ∂B_2 de B_2 est formée de points extrémaux de $\bar{B}_2$ et que ceci est le cas, par exemple, quand B_2 est la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^{n_2}$ pour la norme hermitienne (comparer avec [14]).

On peut se demander si ce théorème reste exact si on remplace la condition sur les points extrémaux par une condition sur les points complexe-extrémaux.

4. **Etude de la frontière de la boule-unité ouverte et définition du rang.** Soit B la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\| \,.\, \|$, et soit $x \in \partial B$. Comme L. Belkhchicha [1 et 2], on définit

$$V_x = \{y \in \mathbb{C}^n \mid \exists r > 0 \text{ tel que } \forall \zeta \in \mathbb{C},\ |\zeta| < r,\ x + \zeta y \in \bar{B}\}.$$

Comme $\bar{B}$ est convexe, V_x est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$, et on définit

$$r_0(B, x) = \dim_{\mathbb{C}} V_x + 1.$$

D'après L. Belkhchicha [1 et 2], on a le lemme suivant.

LEMME 4.1. *Si $y \in (x + V_x) \cap \bar{B}$, alors $V_y \subset V_x$.*

La démonstration consiste à remarquer d'abord que, par définition, $(x + V_x) \cap \bar{B}$, considéré comme un sous-ensemble du sous-espace affine $(x + V_x)$ contient un voisinage de x. Si $y \in (x + V_x) \cap \bar{B}$ et comme $\bar{B}$ est convexe, les segments joignant les points d'un voisinage de x dans $x + V_x)$ aux points voisins de y dans $(y + V_y)$ appartiennent à $\bar{B}$, et ceci montre que $V_y \subset V_x$.

Ainsi donc, $(x+V_x) \cap \bar{B}$ est l'adhérence de son intérieur U dans l'espace affine $(x+V_x)$, et $x \in U$. On déduit du lemme 4.1 que l'ensemble des points complexe-extrémaux de $\bar{U}$ dans $(x + V_x)$ est exactement l'intersection de $\bar{U}$ avec l'ensemble des points complexe-extrémaux de $\bar{B}$.

Remarquons enfin que dire que $x \in \partial B$ est un point complexe-extrémal de $\bar{B}$ est équivalent à dire que $r_0(B, x) = 1$.

On définit alors le rang de B au point $x \in \partial B$, par la formule

$$r(B,x) = r(x) = \limsup_{y \longrightarrow x} r_0(B,y).$$

En particulier, quand $r(B,x)$ ne dépend pas de $x \in \partial B$, on le note $r(B)$ et on parle du rang de B.

Si on considère un domain borné symétrique D de $\mathbb{C}^n$, dans sa réalisation de Harish-Chandra, on sait que D est un domaine cerclé borné convexe de $\mathbb{C}^n$. C'est donc la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\| \, . \, \|$. Au domaine D, est associé un système triple de Jordan (voir O. Loos [11]), c'est-à-dire une application trilinéaire

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (x,y,z) &\longmapsto \{xyz\} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}$-linéaire symétrique en x et z, $\mathbb{C}$-antilinéaire en y, et qui vérifie un certain nombre de propriétés. On dit qu'un élément e de $\mathbb{C}^n$ est un tripotent de $\{\,\}$ si $\{eee\} = e$. Deux tripotents e et f sont dits orthogonaux si $\{eef\} = \{eff\} = 0$. Un tripotent est dit minimal s'il n'est pas somme de tripotents orthogonaux non nuls. D'une manière plus générale, le rang d'un tripotent e est le nombre p de tripotents minimaux orthogonaux e_i tels que

$$e = \sum_{i=1}^{p} e_i.$$

Le rang r du domaine borné symétrique D est le maximum du rang p des tripotents e. Si M_p désigne l'ensemble des tripotents de rang p du système triple de Jordan $\{\,\}$, on montre ([11], §5) que M_p est une sous-variété algébrique réelle compacte de $\mathbb{C}^n$, et, si D est irréductible, M_p est connexe.

D'autre part si $x \in \mathbb{C}^n$, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

où les λ_i sont des nombres réels tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$, et les e_i sont des tripotents minimaux deux à deux orthogonaux. En particulier, $x \in D$ si et seulement si $\lambda_1 < 1$. Le fait que $x \in \partial D$ se traduit par $\lambda_1 = 1$, et, si r est le rang de D et si i est le plus grand indice tel que

$$1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_i > \lambda_{i+1} \geq \cdots,$$

on déduit de ces considérations et de O. Loos [11] que le rang

$$r_0(D,x) = r - i + 1.$$

On vérifie alors comme dans [18] que l'ensemble des $x \in \partial D$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i,$$

avec

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots,$$

est un ouvert dense de la frontière de D. Ainsi donc, pour tout $x \in \partial D$,

$$r(D, x) = r,$$

où r est le rang du domaine borné symétrique D ; on peut donc parler du rang de D, et notre définition redonne bien, pour les domaines bornés symétriques, la définition classique.

On peut aussi calculer le rang de B dans certains autres cas : ainsi, le rang du polydisque Δ^n est égal à n, et, pour tout $p \geq 1$, le rang de la boule

$$B_p = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < 1\}$$

est égal à 1.

5. **Le lemme de Schwarz.** Commençons par montrer une forme facile du lemme de Schwarz qui utilise r_0.

THÉORÈME 5.1. *Soit B_1 (resp. B_2) la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n_2}$) pour une norme $\|\,.\,\|_1$ (resp. $\|\,.\,\|_2$). Soit $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que, pour tout $x \in \mathrm{Ext}(\overline{B}_1)$,*

$$\|f'(0) \cdot x\|_2 = \|x\|_1 = 1.$$

Supposons que, pour tout $x \in \mathrm{Ext}(\overline{B}_1)$,

$$r_0\big(B_2, f'(0) \cdot x\big) \leq r_0(B_1, x).$$

Alors f est égale à $f'(0)$, et pour tout $x \in \partial B_1$,

$$r_0\big(B_2, f'(0) \cdot x\big) = r_0(B_1, x).$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \partial B_1$ un point complexe-extrémal de $\overline{B}_1$. Soit $\varphi\colon \Delta \longrightarrow B_1$ définie par $\varphi(\zeta) = \zeta x$. Ainsi φ est une géodésique complexe de B_1. Le fait que $\|f'(0) \cdot x\|_2 = \|x\|_1$ entraîne que $f \circ \varphi$ est une géodésique complexe de B_2, tangente en 0 à $f'(0) \cdot x$. Comme $r_0\big(B_2, f'(0) \cdot x\big) = r_0(B_1, x) = 1$, $f'(0) \cdot x$ est un point complexe-extrémal de $\overline{B}_2$. On déduit du théorème d'unicité de E. Vesentini que

$$f \circ \varphi(\zeta) = \zeta f'(0) \cdot x.$$

Soit d'autre part

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$$

le développement de f en série de polynômes homogènes. Par composition des développements, on trouve :

$$f \circ \varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n P_n(x).$$

La comparaison des deux développements en série montre que, pour tout $n \geq 2$, $P_n(x) = 0$, et ceci est vrai pour tout point complexe-extrémal x de $\bar{B}_1$. Or d'après L. Belkhchicha [1 et 2],

$$\|P_n\|_{\mathrm{Ext}(\bar{B}_1)} = \|P_n\|_{\bar{B}_1}.$$

On en déduit que $P_n \equiv 0$, pour tout $n \geq 2$, et ceci démontre que f est linéaire.

Remarquons que l'on peut exprimer autrement l'hypothèse du théorème en disant que $f'(0)$ envoie les points complexes-extrémaux de $\bar{B}_1$ dans les points complexes-extrémaux de $\bar{B}_2$.

Nous allons maintenant montrer la forme plus précise du lemme de Schwarz suivante.

THÉORÈME 5.2. *Soit B_1 (resp. B_2) la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^{n_1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n_2}$) pour une norme $\| \, . \, \|_1$ (resp. $\| \, . \, \|_2$). Soit $f\colon B_1 \longrightarrow B_2$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$ et que $f'(0)$ soit une isométrie. Supposons que, pour tout $x \in \partial B_1$,*

$$r\big(B_2, f'(0) \cdot x\big) \leq r(B_1, x).$$

Alors f est linéaire, et pour tout $x \in \partial B_1$, on a l'égalité

$$r\big(B_2, f'(0) \cdot x\big) = r(B_1, x).$$

En particulier, si on peut définir des rangs globaux $r(B_1)$ et $r(B_2)$ pour B_1 et B_2, l'hypothèse $r(B_2) \leq r(B_1)$ entraîne que f est linéaire et que $r(B_2) = r(B_1)$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que $f'(0)$, qui est une isométrie envoie ∂B_1 dans ∂B_2, ce qui permet facilement de montrer l'égalité des rangs.

Soit $x \in \partial B_1$ un point complexe-extrémal de $\bar{B}_1$, ce qui signifie que $r_0(B_1, x) = 1$. D'après la définition de $r(B_1, x)$, il existe une suite x_n de points de ∂B_1 convergeant vers x tels que

$$r(B_1, x_n) = r_0(B_1, x_n) = r(B_1, x).$$

D'autre part, on déduit des hypothèses que

$$r\big(B_2, f'(0) \cdot x_n\big) \leq r(B_1, x_n) = r_0(B_1, x_n),$$

ce qui entraîne que

$$r_0\big(B_2, f'(0) \cdot x_n\big) \leq r_0(B_1, x_n).$$

Du fait que $f'(0)$ est une isométrie, on déduit que cette inégalité est forcément une égalité.

Comme $f'(0)$ est une isométrie, $f'(0)$ envoie la frontière ∂B_1 de B_1 dans la frontière ∂B_2 de B_2. Comme $f'(0)$ est linéaire, $f'(0)$ envoie $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$ dans $(y_n + V_{y_n}) \cap \bar{B}_2$, où

$y_n = f'(0) \cdot x_n$. Comme $\dim V_{x_n} = \dim V_{y_n}$ et comme $f'(0)$ est injective, $f'(0) \cdot (x_n + V_{x_n}) = (y_n + V_{y_n})$. On en déduit que

$$f'(0) \cdot [(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1] = (y_n + V_{y_n}) \cap \bar{B}_2. \tag{1}$$

En effet, s'il existait un point z de $(y_n + V_{y_n}) \cap \bar{B}_2$ qui n'appartient pas à l'image de $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$, on aurait $z = f'(0) \cdot u$, avec $u \in (x_n + V_{x_n})$, et $u \notin (x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$, ce qui entraînerait $\|u\|_1 > 1$. Comme $\|z\|_2 = 1$, $f'(0)$ ne serait pas une isométrie, ce qui démontre le résultat.

De (1), on déduit que $f'(0)$ envoie les points complexe-extrémaux de $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$ comme sous-ensemble de l'espace affine $(x_n + V_{x_n})$ sur les points complexe-extrémaux de $(y_n + V_{y_n}) \cap \bar{B}_2$ comme sous-ensemble de l'espace affine $(y_n + V_{y_n})$. Comme nous l'avons déjà dit, l'ensemble des points complexe-extrémaux de $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$ (resp. $(y_n + V_{y_n}) \cap \bar{B}_2$) comme sous-ensemble de l'espace affine $(x_n + V_{x_n})$ (resp. $(y_n + V_{y_n})$) est, d'après le lemme 4.1, exactement l'intersection des points complexe-extrémaux de $\bar{B}_1$ (resp. $\bar{B}_2$) avec $(x_n + V_{x_n})$ (resp. $(y_n + V_{y_n})$).

Si on considère maintenant le développement de f en série de polynômes homogènes

$$f(z) = \sum_{p=1}^{\infty} P_p(z),$$

il est clair, comme précédemment, que, pour tout $p \geq 2$, P_p est nul sur les points complexe-extrémaux de $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$. On déduit du résultat de L. Belkhchicha [1 et 2] appliqué à $(x_n + V_{x_n}) \cap \bar{B}_1$, que, pour tout $p \geq 2$, $P_p(x_n) = 0$. Par passage à la limite, pour tout $p \geq 2$, $P_p(x) = 0$; d'après L. Belkhchicha [1 et 2], pour tout $p \geq 2$, $P_p \equiv 0$, et le théorème est démontré.

RÉFÉRENCES

1. L. Belkhchicha, *Caractérisation des isomorphismes analytiques de certains domains bornés*, C. R. Acad. Sc. Paris Série I Math. **313**(1991), 281–284.

2. ———, *Caractérisation des isomorphismes analytiques sur la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme*, Math. Z. **215**(1994), 129–141.

3. S. Dineen, *The Schwarz Lemma*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

4. T. Franzoni and E. Vesentini, *Holomorphic maps and invariant distances*, Math. Studies **40**, North-Holland, Amsterdam, 1980.

5. L. Harris, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*. In: Advances in Holomorphy, Mathematical Studies **34**, North-Holland, Amsterdam, 1979, 345–406.

6. M. Hervé, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule à m dimensions dans elle-même*, J. Math. Pures et Appl. (9)**42**(1963), 117–147.

7. M. Jarnicki and P. Pflug, *Invariant distances and metrices in complex analysis,* De Gruyter Expositions in Mathematics **9**, De Gruyter, Berlin, 1993.

8. A. Korányi, *A Schwarz lemma for founded symmetric domains*, Proc Amer. Math. Soc. **17**(1966), 210–213.

9. S. Kobayashi, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 357–416.

10. L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. Math. **8**(1982), 257–261.

11. O. Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Math. Lectures, University of California at Irvine, 1977.

12. A. Renaud, *Quelques propriétés des applications analytiques d'une boule de dimension infinie dans une autre*, Bull Sc. Math (2)**97**(1973), 129–159.
13. H. Royden and P. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains*, (1983), preprint.
14. W. Rudin, *Function theory on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New-York, 1980.
15. E. Vesentini, *Complex geodesics*, Compositio Math. **44**(1981), 375–394.
16. ______, *Complex geodesics and holomorphic mappings*, Symposia Math. **26**(1982), 211–230.
17. ______, *Invariant distances and invariant differential metrics in locally convex spaces*. In: Spectral theory, Banach Center Publications, Warsaw **8**(1982), 493–512.
18. J.-P. Vigué, *Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domains bornés strictement convexes*, Indiana Univ. J. **40**(1991), 293–304.
19. ______, *Le lemme de Schwarz et la caractérisation des automorphismes analytiques*, Colloque d'analyse complexe et géométrie, Astérisque **217**(1993), 241–249.
20. Z. Yan, *A norm-preserving* H^∞ *extension problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **121**(1994), 1049–1056.

URA CNRS D1322 Groupes de Lie et Géométrie
Mathématiques, Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers, CEDEX
France
e-mail: vigue@mathrs.univ-poitiers.fr