

# Singularités quasi-ordinaires toriques et polyèdre de Newton du discriminant

P. D. González Pérez

*Abstract.* Nous étudions les polynômes  $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$  à coefficients dans l'anneau de germes de fonctions holomorphes au point spécial d'une variété torique affine. Nous généralisons à ce cas la paramétrisation classique des singularités quasi-ordinaires. Cela fait intervenir d'une part une généralisation de l'algorithme de Newton-Puiseux, et d'autre part une relation entre le polyèdre de Newton du discriminant de  $F$  par rapport à  $Y$  et celui de  $F$  au moyen du polytope-fibre de Billera et Sturmfels [3]. Cela nous permet enfin de calculer, sous des hypothèses de non dégénérescence, les sommets du polyèdre de Newton du discriminant à partir de celui de  $F$ , et les coefficients correspondants à partir des coefficients des exposants de  $F$  qui sont dans les arêtes de son polyèdre de Newton.

## 1 Introduction

Le sujet de la première partie de ce travail est la représentation des racines  $Y(X)$  d'une équation polynôme  $F(X_1, \dots, X_d; Y) = 0$  par des séries à exposants fractionnaires en les variables  $X = (X_1, \dots, X_d)$ . Il s'agit de généraliser le théorème de Newton-Puiseux. Nous poursuivrons dans une direction inaugurée par McDonald dans [9], et précisons ses résultats.

Notre approche est d'étudier d'abord le problème dans le cas d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ , où  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  est l'anneau des germes des fonctions holomorphes au point spécial d'une variété torique affine correspondant à un cône rationnel strictement convexe,  $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$ , de dimension  $d$ . Nous résolvons le problème, lorsque le discriminant  $\Delta_Y F$  de  $F$  par rapport à  $Y$  est de la forme  $X^u \epsilon$  où  $\epsilon$  est une unité dans  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  et  $u$  appartient au semigroupe  $S_\tau := \tau^\vee \cap \mathbb{Z}^d$  des éléments de  $\mathbb{Z}^d$  qui appartiennent au cône dual  $\tau^\vee := \{w \in \mathbb{R}^d / \langle w, u \rangle \geq 0, \forall u \in \tau\}$ . Ceci est en fait une généralisation de l'étude classique des singularités quasi-ordinaires, qui correspondent au cas où  $\tau$  est le quadrant positif.

La réduction du cas général à ce cas fait appel à des constructions combinatoires sur le polyèdre de Newton  $\mathcal{N}(F) \subset \mathbb{R}^{d+1}$  de  $F$ . La plus importante, déjà utilisée dans [9] est celle du polyèdre-fibre  $\mathcal{Q}(F) \subset \mathbb{R}^d$  de  $\mathcal{N}(F)$  par rapport à sa projection  $\mathcal{N}(F) \rightarrow \mathbb{R}^d$  sur l'espace des exposants des monômes en  $X$ . Les points extrêmes de  $\mathcal{Q}(F)$  correspondent à certains chemins dans les arêtes de  $\mathcal{N}(F)$ .

Le polyèdre-fibre est également relié au polyèdre de Newton de  $F$  du discriminant de  $F$  par rapport à  $Y$ . Si  $F = a_0(X) + \dots + a_r(X)Y^r$ , on a l'inclusion de polyèdres de Newton

$$\mathcal{N}(\Delta_Y F) + \mathcal{N}(a_0) + \mathcal{N}(a_r) \subseteq \mathcal{Q}(F)$$

(où la somme est la somme de Minkowski), avec l'égalité sous des hypothèses de non-dégénérescence des coefficients de  $F$  par rapport à  $\mathcal{N}(F)$ , (théorème 4).

---

Reçu par les éditeurs le 18 juin 1998; révisée le 1<sup>er</sup> novembre, 1999.  
Classification (AMS) par sujet: primaire: 14M25; secondaire: 32S25.  
©Société Mathématique du Canada 2000.

Un cône  $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$  est compatible avec des polyèdres  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s \subset \mathbb{R}^d$  s'il est constitué des fonctions linéaires qui prennent toutes leur valeur minimale sur  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s$  en des points fixés  $p_1 \in \mathcal{P}_1, \dots, p_s \in \mathcal{P}_s$ . On décrit le résultat principal, le théorème 3, dans le cas où  $F$  est un polynôme réduit dans l'anneau  $\mathbb{C}\{X\}[Y]$ . Si  $\tau \subset (\mathbb{R}_+^d)^\vee$  est un cône rationnel strictement convexe de dimension  $d$  compatible avec les polyèdres  $\mathcal{N}(\Delta_Y F)$ ,  $\mathcal{N}(a_r)$  et  $\mathcal{Q}(F)$ , alors l'homomorphisme  $\mathbb{C}\{X\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$  étendant l'inclusion des algèbres  $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_+^d] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$  transforme  $F$  en un polynôme  $F_\tau \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$  dont toutes les racines sont de la forme  $X^u \varepsilon(X)$  où  $u \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$ ,  $\varepsilon(X)$  est une unité dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$  et  $k$  est un entier positif. La construction des racines est donnée par un algorithme qui généralise celui du théorème de Newton-Puiseux (théorème 2), et qui pourrait se développer à l'aide d'un logiciel de calcul formel. On peut comparer l'algorithme obtenu avec celui de [2], développé pour le cas quasi-ordinaire.

Nous utilisons ces résultats pour donner une description des sommets du polyèdre de Newton du *résultant*  $\text{Res}_Y(F, G)$  des polynômes  $F, G \in \mathbb{C}\{S_\tau\}$  à partir des polyèdres-fibres  $\mathcal{Q}(F)$ ,  $\mathcal{Q}(G)$  et  $\mathcal{Q}(FG)$ ; nous calculons enfin les coefficients des monômes correspondants aux sommets du polyèdre de Newton de  $a_0 a_r \Delta_Y F$  et de  $\text{Res}_Y(F, G)$  sous des hypothèses de non dégénérescence. Ces coefficients dépendent entre autres des résultants des paires de polynômes à une variable obtenus en regardant de  $F$  et de  $G$  que les termes dont les exposants appartiennent à des paires parallèles d'arêtes de  $\mathcal{N}(F)$  et  $\mathcal{N}(G)$ . On montre un résultat analogue pour le discriminant. Nous trouvons aussi, avec une méthode très différente, des résultats de même nature que ceux de Gel'fand, Kapranov et Zelevinski dans [6].

## 2 Paramétrisation de singularités quasi-ordinaires toriques

### 2.1 L'algèbre des germes de fonctions holomorphes au point distingué d'une variété torique affine

Soit  $\tau$  un cône convexe rationnel de dimension  $d$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$ . Cette condition garantit que le cône dual  $\tau^\vee := \{w \in \mathbb{R}^d / \langle w, u \rangle \geq 0, \forall u \in \tau\}$  est un cône rationnel strictement convexe. Pour cette raison, chaque élément de  $S_\tau$  peut s'exprimer comme somme d'éléments du semigroupe  $S_\tau$  d'un nombre fini de manières. L'ensemble des séries formelles à exposants dans  $S_\tau$  est un anneau, que nous notons par  $\mathbb{C}[[S_\tau]]$ . La propriété de finitude précédente permet de garantir que les coefficients de la série produit sont des fonctions polynomiales des coefficients des facteurs. Ces anneaux sont définis dans [9], pour construire des racines d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ , à la Newton-Puiseux.

On va donner une interprétation géométrique de ces anneaux au moyen de la variété torique associée au cône  $\tau$  dans le cas où  $\tau$  est un cône rationnel strictement convexe de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^d$ .

Soit  $N \subset (\mathbb{R}^d)^*$  un réseau de dimension  $d$ , de réseau dual  $M \subset \mathbb{R}^d$ . Le cône  $\tau$  définit le semi-groupe de type fini  $S_\tau := \tau^\vee \cap M$ . Soit  $\mathbb{C}[S_\tau]$  l'algèbre du semi-groupe  $S_\tau$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Associons à  $(\tau, N)$  la variété torique affine  $Z_\tau := \text{Spec } \mathbb{C}[S_\tau]$ . Chaque point fermé de  $Z_\tau$  est défini par un homomorphisme de semi-groupes  $S_\tau \rightarrow \mathbb{C}$ . La valeur de la fonction  $X^u \in \mathbb{C}[S_\tau]$  au point  $x$  est  $x(u)$ . L'orbite de dimension 0 de la variété  $Z_\tau$  est le point spécial  $z_\tau$  défini par l'homomorphisme de semi-groupes  $S_\tau \rightarrow \mathbb{C}$  qui applique  $0 \mapsto 1$  et  $u \mapsto 0$  si  $u \neq 0$  (pour tout ceci, voir [4] ou [10]).

L'anneau des séries convergentes à exposants dans  $S_\tau$ , que nous notons par  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ , est

l'ensemble des séries de  $\mathbb{C}[[S_\tau]]$  qui sont absolument convergentes dans un voisinage du point spécial  $z_\tau$  de la variété torique  $Z_\tau$ . Si  $\tau$  est un cône convexe rationnel de dimension  $d$ , on définit  $\mathbb{C}\{S_\tau\} = \bigcap \mathbb{C}\{S_\sigma\}$  où  $\sigma$  parcourt les cônes rationnels strictement convexes de dimension  $d$  contenus dans  $\tau$ .

**Lemme 1** *L'algèbre locale des germes de fonctions holomorphes au point  $z_\tau$  de  $Z_\tau$  est isomorphe à  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ .*

**Preuve** Soient  $u_1, \dots, u_s$  des générateurs du semi-groupe  $S_\tau$ . L'homomorphisme  $\mathbb{C}[U_1, \dots, U_s] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ , défini par  $U_i \mapsto X^{u_i} \in \mathbb{C}[S_\tau]$  est surjectif. Son noyau est un idéal premier  $I$ . Ce morphisme définit un plongement  $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$  de la variété torique affine  $Z_\tau := \text{Spec } \mathbb{C}[S_\tau]$  définie par le cône  $\tau$ , et l'image du point distingué  $z_\tau$  est l'origine de  $\mathbb{C}^s$ . Soit  $R$  l'algèbre des germes fonctions holomorphes dans un voisinage de  $z_\tau$  dans  $Z_\tau$ .

Remarquons que l'homomorphisme composé  $\mathbb{C}[U_1, \dots, U_s] \rightarrow \mathbb{C}[S_\tau] \hookrightarrow \mathbb{C}[[S_\tau]]$  s'étend en un homomorphisme  $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}[[S_\tau]]$  dont l'image est  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ . En effet, l'image du monôme  $U^\lambda$ , où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \mathbb{N}^s$ , est le monôme  $X^{u(\lambda)}$ , où  $u(\lambda) = \sum \lambda_i u_i \in S_\tau$ . Donc, l'image de  $\phi$  est la série  $\chi(\phi) = \sum_{u \in S_\tau} (\sum_{u(\lambda)=u} c_\lambda) X^u$ , qui est bien définie parce que  $\tau$  est strictement convexe. Supposons que  $\phi$  est absolument convergente au point  $x' = (x'_1, \dots, x'_s)$  correspondant au point  $x \in Z_\tau$  par le plongement torique  $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$ . La valeur de la fonction  $X^u \in \mathbb{C}[S_\tau]$  au point de  $Z_\tau$ , ne dépend pas de l'immersion, donc si  $u = u(\lambda)$ , on a  $x(u) = x'^\lambda$  et la série  $\chi(\phi)$  est absolument convergente au point  $x$ . Ceci implique que la série  $\chi(\phi) \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$  est convergente. Avec un raisonnement analogue, on peut montrer que l'homomorphisme d'algèbres  $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$  est surjectif.

Par ailleurs, on a montré aussi que  $\chi(\phi)$  est une fonction holomorphe dans un voisinage de  $z_\tau$  dans  $Z_\tau$ , définissant un unique élément de  $R$ . Clairement, tous les éléments de  $R$  sont obtenus de cette forme. Si la fonction  $\chi(\phi)$  est nulle dans un voisinage de  $z_\tau$  dans  $Z_\tau$ , la série  $\phi$  est dans l'idéal engendré par  $I$  dans  $\mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\}$  donc  $\chi(\phi) = 0$ . ■

Comme conséquence de ce lemme, on déduit que l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  est noethérien et intégralement clos parce que  $Z_\tau$  est une variété normale (voir [7, Section 71]).

## 2.2 Extensions galoisiennes

Soit  $k \in \mathbb{Z}$  un entier positif fixé. Considérons les réseaux  $N' = kN \subset N$ . Leurs réseaux duaux respectifs sont  $M' = \frac{1}{k}M \supset M$ . Un cône  $\tau$  strictement convexe dans  $(\mathbb{R}^d)^*$  est rationnel pour les deux réseaux en même temps. Nous notons  $Z_\tau$  (resp.  $Z'_\tau$ ) la variété torique associée à  $(\tau, N)$  (resp. à  $(\tau, N')$ ). Le semi-groupe associé à  $(\tau, N')$  est  $S'_\tau := \frac{1}{k}S_\tau \subset M'$ . L'homomorphisme de semi-groupes  $M \supset S_\tau \hookrightarrow S'_\tau \subset M'$  définit un morphisme torique  $f_k: Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$ . L'image du point distingué de  $Z'_\tau$  est le point distingué de  $Z_\tau$ , donc on obtient un morphisme de germes irréductibles  $(Z'_\tau, z'_\tau) \rightarrow (Z_\tau, z_\tau)$ . En utilisant le lemme 1 on vérifie que l'homomorphisme des algèbres entières associées est  $\mathbb{C}\{S_\tau\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ .

L'homomorphisme des semi-groupes  $M \hookrightarrow M'$  définit le morphisme  $f_k: T' \rightarrow T$  obtenu en restreignant  $f_k$  aux tores respectifs de  $Z'_\tau$  et  $Z_\tau$ . On peut vérifier directement que

le noyau de ce morphisme  $f_{k|T'}$ , comme morphisme de groupes algébriques, est le sous-groupe fini  $H$  de  $T'$ , formé des éléments  $(w_1, \dots, w_d)$  tels que  $w_i^k = 1$ , pour  $i = 1, \dots, d$ . Ce morphisme est un revêtement galoisien à  $k^d$  feuilles de la variété  $T$ , parce que le groupe  $H$  agit transitivement sur les fibres. Donc on a une extension galoisienne des corps des fonctions rationnelles  $\mathbb{C}(T) \hookrightarrow \mathbb{C}(T')$ . On va montrer qu'on a une situation analogue pour les corps des fonctions méromorphes aux points distingués des variétés toriques correspondantes.

Soit  $L$  (resp.  $L'$ ) le corps des fractions de  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ , (resp. de  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ ). L'homomorphisme  $\mathbb{C}\{S_\tau\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$  définit une extension de corps  $L \hookrightarrow L'$ .

**Lemme 2** *L'extension de corps  $L \hookrightarrow L'$  est galoisienne. Soit  $G$  son groupe de Galois. L'action de  $H$  sur les monômes définit un épimorphisme de groupes  $H \rightarrow G$  et l'ensemble des éléments  $G$ -invariants de l'anneau  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$  est  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ .*

**Preuve** Clairement,  $L \hookrightarrow L'$  est une extension normale finie. À chaque  $w \in H$  est associé l'homomorphisme d'algèbres  $\mathbb{C}\{S'_\tau\} \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$  qui applique  $X^{\frac{u}{k}} \mapsto w(u)X^{\frac{u}{k}}$ . Cela définit un homomorphisme de groupes  $H \rightarrow G$ .

Remarquons que  $X^{\frac{u}{k}} \mapsto w(u)X^{\frac{u}{k}}$  définit l'action de l'élément  $w \in H$  sur un monôme de  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ . Le corollaire 1.16 de [10] garantit que le morphisme  $Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$  coïncide avec la projection du quotient de  $Z_\tau$  par rapport à l'action du groupe  $H$ . C'est-à-dire que  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  est l'ensemble des éléments invariants de l'algèbre  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$  par l'action de  $H$ .

Si  $H'$  est l'image de  $H$  dans  $G$  on a montré que le sous-corps fixe de  $L'$  par  $H'$  coïncide avec  $L$ , donc  $(L')^{G'} \subset L$ , c'est-à-dire que  $L \subset L'$  est une extension galoisienne et donc  $H' = G$ . ■

### 2.3 Paramétrisation de singularités quasi-ordinaires toriques

Supposons que  $F \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}[Y]$  est un polynôme réduit tel que  $0 \in \mathbb{C}$  est une racine de multiplicité  $r \geq 1$  du polynôme  $F(0, Y)$  et que le discriminant de  $F$  soit de la forme  $X^q \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une unité de  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$ . D'après le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un pseudo-polynôme à la Weierstrass  $H$  de degré  $r$  en  $Y$ , et une unité  $\epsilon$  dans  $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d, Y\}$  tels que  $F = \epsilon H$ . Par définition, la projection du germe  $(X, 0) \subset \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}$  défini par le polynôme  $H \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}[Y]$  sur  $(\mathbb{C}^d, 0)$  est quasi-ordinaire. D'après [1, Theorem 3], il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $H$  ait ses  $r$  racines dans l'anneau  $\mathbb{C}\{X_1^{1/k}, \dots, X_d^{1/k}\}$ .

On va généraliser la construction de racines associées à une projection quasi-ordinaire, au cas où le germe  $(\mathbb{C}^d, 0)$  est remplacé par un germe de variété torique affine  $(Z_\tau, z_\tau)$  au point distingué.

**Théorème 1** *Pour tout polynôme  $F \in \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$  réduit tel que le discriminant de  $F$  soit de la forme  $X^{u_0} \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est une unité dans l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  et que  $0 \in \mathbb{C}$  soit une racine de multiplicité  $r \geq 1$  du polynôme  $F(z_\tau, Y)$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  ait  $r$  racines sans terme constant dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ .*

**Preuve** Nous fixons un nombre fini de générateurs du semi-groupe  $S_\tau$ . Cela permet de définir un plongement de la variété torique affine  $Z_\tau \subset \mathbb{C}^s$ . Il lui est associé un épimor-

phisme d'algèbres  $\chi: \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\} \rightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$  (voir le lemme 1). Considérons un polynôme  $G \in \mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s\}[Y]$  tel que  $G^x = F$ . On a  $G(0, Y) = F(z_\tau, Y)$ . D'après le théorème de préparation de Weierstrass il existe un pseudo-polynôme à la Weierstrass  $H$  de degré  $r$  en  $Y$ , et une unité  $\varepsilon$  dans  $\mathbb{C}\{U_1, \dots, U_s, Y\}$  tels que  $G = \varepsilon H$ . Clairement, les germes définis au point  $(z_\tau, 0)$  par  $F$  et par  $H^x$  coïncident. Donc, on peut supposer que  $F$  est un polynôme réduit de degré  $r$  tel que  $F(z_\tau, Y) = Y^r$ .

Soit  $L$  le corps de fractions de l'anneau intègre  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ . Les facteurs  $F_i$  de la factorisation de  $F$  en polynômes irréductibles dans  $L[Y]$  sont dans  $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$  parce que, d'après le lemme 1, l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$  est intégralement clos et le coefficient de  $Y^r$  est une unité (voir [11, théorème 5, section 3, chap. V]). De plus, le discriminant de  $F_i$  divise le discriminant de  $F$  donc  $\Delta_Y F_i$  est de la forme  $X^\mu \varepsilon$  où  $\varepsilon \in \mathbb{C}\{S_\tau\}$  est une unité. On peut donc supposer que  $F$  est irréductible, engendrant un idéal premier  $(F)$  dans  $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ . Considérons le germe de variété analytique irréductible  $(\mathcal{X}, x) \subset (Z_\tau \times \mathbb{C}, x)$  au point  $x$  correspondant à l'algèbre intègre  $R = \mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]/(F)$ .

Soit  $(\mathcal{X}, x) \rightarrow (Z_\tau, z_\tau)$  la projection des germes, et choisissons un représentant fini  $\pi: \mathcal{X} \rightarrow Z_\tau$  tel que  $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$ . L'hypothèse sur le discriminant implique qu'il existe un voisinage  $W$  du point  $z_\tau$  dans  $Z_\tau$  tel que  $\pi$  est non ramifié sur  $W^* := W \cap T$ . Par continuité, comme  $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$ , on peut supposer que  $\pi^{-1}(W)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $\mathbb{C}^{s+1}$ .

Comme  $\pi$  est un morphisme fini, l'intersection de l'image inverse du lieu discriminant de  $\pi$  avec  $\mathcal{X}$  est une sous-variété analytique fermée propre de  $\mathcal{X}$ . Son complémentaire est un ouvert  $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$ , connexe parce que  $\mathcal{X}$  est analytiquement irréductible. Ceci montre que  $\pi: \mathcal{X}^* \rightarrow W^*$  est un revêtement connexe à  $r$  feuillets.

On peut supposer que l'ouvert  $W^*$  du tore  $T$  est  $W^* = (\mathbb{D}^*)^d$  où  $\mathbb{D}^* = D(0, 1) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^*$ . Soit  $J$  le sous-groupe du groupe fondamental  $\pi_1(W^*, w) \cong \mathbb{Z}^d$  associé au revêtement  $\pi: \mathcal{X}^* \rightarrow W^*$ . Puisque  $J$  est d'indice fini, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k\mathbb{Z}^d \subset J$ . Le revêtement  $f_k: W^* \rightarrow W^*$ , défini par  $x \mapsto (x_1^k, \dots, x_d^k)$ , est associé au sous-groupe  $k\mathbb{Z}^d$  du  $\mathbb{Z}^d$ . Donc, il existe un revêtement  $p: W^* \rightarrow \mathcal{X}^*$  tel que  $\pi \circ p = f_k$ , (voir [5, chap. 13]).

Clairement,  $p$  est holomorphe, et borné dans le complémentaire dans  $W$  d'un ensemble analytique fermé, c'est-à-dire que  $p$  est une fonction faiblement holomorphe dans  $W$ . Comme  $W \subset Z_\tau$  est une variété normale, toute fonction faiblement holomorphe est holomorphe, (voir [7, Section 71]). Donc,  $p$  s'étend en un morphisme  $W \rightarrow \mathcal{X}$ . La fonction holomorphe  $\pi \circ p$  coïncide sur  $W^*$  avec le morphisme torique  $f_k: Z'_\tau \rightarrow Z_\tau$  (où on considère  $W^* \subset Z'_\tau$  et aussi  $W^* \subset Z_\tau$ ). Donc, elle est égale à la restriction du morphisme  $f_k$  à  $W$ . Nous remarquons que  $p(z'_\tau) = x$  parce que  $f_k(z'_\tau) = z_\tau$  et  $\pi^{-1}(z_\tau) = \{x\}$ .

En utilisant le lemme 1, on voit que l'homomorphisme d'algèbres entières associé au morphisme  $f_k$  aux points distingués est  $\mathbb{C}\{S_\tau\} \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ . Considérons le monomorphisme d'algèbres  $R \rightarrow \mathbb{C}\{S'_\tau\}$  correspondant au morphisme de germes  $p: (W, z'_\tau) \rightarrow (\mathcal{X}, x)$ . L'algèbre  $R$  est une sous- $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ -algèbre de  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$  parce que  $\pi \circ p = f_k$ . Nous avons donc un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & \mathbb{C}\{S'_\tau\} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathbb{C}\{S_\tau\} & & \end{array}$$

Soit  $L$  (resp.  $K, L'$ ) le corps des fractions de  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ , (resp. de  $R, \mathbb{C}\{S'_\tau\}$ ). Par construction,

$L \subset K \subset L'$  et  $K = L(\zeta)$  où  $\zeta$  est l'image de  $Y \in R$  dans  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ . D'après le lemme 2, l'extension de corps  $L \hookrightarrow L'$  est galoisienne, et la série  $\zeta$  a ses  $r$  conjugués dans l'anneau  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$ . Ces conjugués sont les racines de  $F$  dans  $\mathbb{C}\{S'_\tau\}$  qui paramétrisent  $(X, x)$ . ■

**Remarque 1** Si  $F$  est irréductible, on peut prendre  $k = r$  dans le théorème 1.

En effet, puisque le polynôme  $F$  est irréductible, l'indice du sous-groupe  $J$  (dans la preuve du théorème 1), est égal à  $r$ . L'ordre du sous-groupe engendré par l'image d'un vecteur de la base canonique de  $\mathbb{Z}^d$  dans  $\mathbb{Z}^d/J$  est un diviseur de  $r$ . Donc, on a  $r\mathbb{Z}^d \subset J$ .

### 3 Racines à la Newton Puiseux

#### 3.1 Valuation induite par un vecteur irrationnel

Soit  $R$  un anneau commutatif et  $\Gamma$  un groupe totalement ordonné. Une valuation  $\omega$  de  $R$  dans  $\Gamma$  est une application  $\omega: R \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma$  tel que

- (i)  $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$  pour  $0 \neq a, b \in R$ ,
- (ii)  $\omega(a - b) \geq \inf(\omega(a), \omega(b))$  pour  $0 \neq a, b \in R$  et  $a \neq b$ , avec égalité si  $\omega(a) \neq \omega(b)$ .

On associe à chaque  $\lambda \in \Gamma$  l'ensemble  $\mathcal{J}_\lambda = \{a \in R / \omega(a) > \lambda\}$ . L'ensemble  $\mathcal{J}_\lambda$  est un idéal de  $R$  et on a  $\lambda > \beta \Rightarrow \mathcal{J}_\lambda \subset \mathcal{J}_\beta$ . La topologie  $\omega$ -adique sur  $R$ , est la topologie qui fait de  $R$  un groupe topologique dans laquelle l'ensemble des idéaux  $\{\mathcal{J}_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$  est un système fondamental de voisinages de  $0 \in R$ .

La valuation  $\omega$  est *archimédienne* si  $\Gamma$  est isomorphe comme groupe totalement ordonné à un sous-groupe de  $\mathbb{R}$ . Soit  $(R, \mathfrak{M})$  est un anneau local de corps de fractions  $L$ . La valuation  $\omega$  de  $L$  est *centrée sur  $R$*  si  $\omega(a) \geq 0$  pour  $a \in R$  et  $\omega(a) > 0$  pour  $a \in \mathfrak{M}$ .

**Lemme 3** Soient  $(R, \mathfrak{M})$  un anneau local noethérien de corps de fractions  $L$ , et  $\omega$  une valuation archimédienne de  $L$  centrée sur  $R$ . Alors, la topologie  $\mathfrak{M}$ -adique coïncide avec la topologie  $\omega$ -adique de  $R$ .

**Preuve** Puisque  $R$  est noethérien, le semi-groupe  $\omega(R \setminus \{0\})$  est bien ordonné, et il existe un plus petit élément  $\lambda$  de l'ensemble  $\omega(\mathfrak{M} \setminus \{0\})$ . Si  $\beta \in \omega(\mathfrak{M} \setminus \{0\})$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n\lambda > \beta$  donc  $\mathfrak{M}^n \subset \mathcal{J}_\beta \subset \mathfrak{M}$ . ■

On appelle un vecteur  $w \in \mathbb{R}^d$  *irrationnel* si ses coordonnées sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{Q}$ . Associé à un vecteur irrationnel  $w \in \mathbb{R}^d$  nous définissons un ordre total sur  $\mathbb{Q}^d$  par:

$$u <_w u' \Leftrightarrow \langle u, w \rangle < \langle u', w \rangle.$$

**Remarque 2** Soit  $\tau$  un cône rationnel strictement convexe de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Un vecteur irrationnel  $w \in \tau^\vee$  définit une valuation archimédienne de l'anneau local complet  $\mathbb{C}[[S_\tau]]$  par  $w(\sum_{u \in S_\tau} c_u X^u) = \min_{c_u \neq 0} (\langle u, w \rangle)$ . Cette valuation vérifie les hypothèses du lemme 3.

Si  $(\phi_j) \subset \mathbb{C}[[S_\tau]]$  vérifie que la suite  $(w(\phi_j)) \subset \mathbb{R}$  est strictement croissante alors  $\phi_j$  tend vers  $0 \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$ .

On appelle *l'exposant initial* d'une série  $\phi \in \mathbb{C}[[S_\tau]]$  par rapport à  $w$ , l'exposant  $u$  de  $\phi$  tel que  $w(X^u) = w(\phi)$ . L'exposant initial est le plus petit, pour l'ordre  $<_w$ , parmi les exposants de  $\phi$ .

### 3.2 Chemins monotones dans le polyèdre de Newton

Un polyèdre  $\mathcal{N}$  dans  $\mathbb{R}^d$  est l'intersection d'une famille de demi-espaces d'équation  $\langle \omega, u \rangle \geq \lambda_\omega$ , pour  $\omega \in \Xi \subset (\mathbb{R}^d)^*$ . On dira que le polyèdre  $\mathcal{N}$  est *rationnel* si ses sommets sont dans le réseau  $\mathbb{Z}^d$  et si ses faces ont des équations à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . Le cône  $\tau$  associé au sommet  $u$  d'un polyèdre rationnel  $\mathcal{N}$  dans  $\mathbb{R}^d$  est l'ensemble des fonctions linéaires qui atteignent leur valeur minimale sur  $\mathcal{N}$  au sommet  $u$ . Le cône  $\tau$  est rationnel de dimension  $d$ , et  $\tau$  est strictement convexe si et seulement si le polyèdre  $\mathcal{N}$  est de dimension  $d$ . Dans ce cas, l'ensemble des cônes associés au polyèdre  $\mathcal{N}$  forme un éventail  $\Sigma$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$  avec un nombre éventuellement infini de cônes; le support  $|\Sigma| = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$  de l'éventail associé à  $\mathcal{N}$  n'est pas nécessairement fermé. Si  $\tau \subset |\Sigma|$  est un cône rationnel strictement convexe de dimension  $d$ , l'ensemble des cônes  $\tau \cap \sigma$ , pour  $\sigma \in \Sigma$  est une subdivision de  $\tau$ . En particulier, c'est l'éventail associé à la somme de Minkowski  $\tau^\vee + \mathcal{N}$ . Cette subdivision est finie parce que si  $S^{d-1}$  est la sphère unité  $\{\tau \cap \sigma \cap S^{d-1}\}$  est un complexe polyédral de support l'ensemble compact  $\tau \cap \sigma \cap S^{d-1}$ .

Considérons  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  avec des coordonnées fixées  $(u, v)$ . On dira qu'une arête bornée  $e$  d'un polyèdre  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  est *admissible* si elle n'est pas parallèle à l'hyperplan  $v = 0$ . Une arête admissible est de la forme  $[p_{v_1}, p_{v_2}]$  où  $p_{v_i} = (u_{v_i}, v_i) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  avec  $v_1 < v_2$ . Nous appellerons le vecteur  $q_e := \frac{u_{v_1} - u_{v_2}}{v_2 - v_1}$  l'*inclinaison*, et le nombre  $l_e = v_2 - v_1 \in \mathbb{N}$  la *longueur* de l'arête. Considérons la projection  $\pi_e: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$  parallèlement à l'arête  $e$ , définie par  $\pi_e(u, v) = u + vq_e$ . Le cône  $\sigma(e) \subset (\mathbb{R}^d)^*$ , associé au sommet  $\pi_e(e)$  du polyèdre  $\pi_e(\mathcal{N})$  et de dimension  $d$  et on a:

**Lemme 4** Pour  $w \in (\mathbb{R}^d)^*$ , les propriétés suivantes sont équivalentes:

1.  $w \in \sigma(e)$ .
2. La fonction linéaire  $w$  atteint sa valeur minimale sur chaque section  $v = \lambda$  de  $\mathcal{N}$  au point  $(u(\lambda), \lambda)$  de l'arête  $e$ . ■

On dit qu'un chemin  $\gamma$  dans les arêtes de  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  est *monotone* si on peut le paramétriser par  $\gamma(\lambda) = (u(\lambda), \lambda)$ . Supposons que le chemin  $\gamma$  a pour sommets  $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_t}, p_n\}$  avec  $p_j = (u_j, j)$  pour  $j \in \{i_0, i_1, \dots, i_t, i_{t+1}\}$  avec  $0 = i_0 < \dots < i_{t+1} = n$ . Nous notons  $q_r$  l'inclinaison du segment  $e_r = [p_{i_r}, p_{i_{r+1}}]$ , pour  $r = 0, \dots, t$ . Le chemin monotone  $\gamma$  est *cohérent* si il existe  $w \in (\mathbb{R}^d)^*$  tel que  $\gamma(\lambda)$  est l'unique point de la section  $v = \lambda$  du polyèdre  $\mathcal{N}$  en lequel  $w$  atteint sa valeur minimale sur cette section, pour  $\lambda \in [0, n]$ .

**Lemme 5** Avec les notations précédentes, si  $w \in (\mathbb{R}^d)^*$  est un vecteur irrationnel définissant le chemin monotone cohérent  $\gamma$  dans les arêtes du polyèdre rationnel  $\mathcal{N}$ , alors les inclinaisons des arêtes de  $\gamma$  vérifient:

$$q_t <_w q_{t-1} <_w \dots <_w q_0.$$

**Preuve** Notons  $\pi_s$  la projection parallèlement au segment  $e_s$ . Le vecteur  $\pi_{s-1}(e_{s-1}) - \pi_s(e_s)$  a le même sens que le vecteur  $\pi_s(p_{i_{s-1}}) - \pi_s(e_s)$ . Par le lemme précédent  $w$  appartient à  $\sigma(e_s)$ , donc on a  $\langle w, \pi_{s-1}(e_{s-1}) - \pi_s(e_s) \rangle = i_s \langle w, q_{s-1} - q_s \rangle \geq 0$ , pour  $s = 1, \dots, t$ . ■

Soit  $\rho \subset (\mathbb{R}^d)^*$  un cône strictement convexe de dimension  $d$ . Nous notons  $\mathbb{C}((S_\rho))$  (resp.  $\mathbb{C}\{\{S_\rho\}\}$ ) l'anneau de fractions de l'anneau  $\mathbb{C}[[S_\rho]]$  (resp.  $\mathbb{C}\{S_\rho\}$ ) pour l'ensemble multiplicativement fermé correspondant aux monômes  $X^u$  pour  $u \in S_\rho$ .

**Définition 1** Le  $\rho$ -polyèdre de Newton d'une série  $\phi \in \mathbb{C}((S_\rho))$  non nulle est la somme de Minkowski de l'enveloppe convexe de ses exposants et du cône  $\rho^\vee$ . Le  $\rho$ -polyèdre de Newton d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ , est la somme de Minkowski de l'enveloppe convexe de ses exposants et du cône  $\rho^\vee \times \{0\}$ .

Le  $\rho$ -polyèdre de Newton de  $\phi$ , que nous notons  $\mathcal{N}_\rho(\phi)$ , est un polyèdre de dimension  $d$  ayant un nombre fini de sommets. L'éventail associé est la subdivision du cône  $\rho$  induite par l'éventail associé à l'enveloppe convexe des exposants de  $\phi$ .

Nous notons  $\mathcal{N}_\rho(F)$  le polyèdre de Newton d'un polynôme  $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$ . Remarquons que le  $\rho$ -polyèdre de Newton de  $F$  ne dépend que des exposants de  $F$ , il dépend aussi de l'anneau dans lequel on considère que se trouvent les coefficients de  $F$ . Pour tout cône  $\tau \subset (\mathbb{R}^d)^*$  rationnel strictement convexe de dimension  $d$ , l'inclusion d'algèbres  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d] \rightarrow \mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$ , permet de considérer un polynôme  $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$  comme élément de  $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}[Y]$ . L'enveloppe convexe des exposants de  $F$  est un polyèdre compact,  $\mathcal{P}(F)$ , mais le polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(F)$  n'est pas compact.

On définit la relation suivante parmi les vecteur irrationnels du cône  $\rho$ :  $w \sim w'$ , si et seulement si, ils définissent le même chemin polygonal dans les arêtes du polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(F)$ . Par le lemme 4, cette relation définit un éventail qui subdivise le cône  $\rho$ . Cet éventail est défini par un polyèdre que nous allons décrire maintenant.

### 3.3 Le polyèdre-fibre de la projection du polyèdre de Newton

Soient  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^N$  un polytope et  $\pi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  une application affine surjective, l'image de  $\mathcal{P}$  est un polytope  $\Omega$ . L'intégrale de Minkowski de l'application  $\pi: \mathcal{P} \rightarrow \Omega$  est l'ensemble des intégrales  $\int_\Omega \gamma \in \mathbb{R}^N$  lorsque  $\gamma$  parcourt l'ensemble des sections Borel-mesurables  $\gamma: \Omega \rightarrow \mathcal{P}$  de  $\pi$ . D'après [3], l'intégrale de Minkowski est un polytope convexe de dimension égale à  $\dim \mathcal{P} - \dim \Omega$ .

Si  $F$  est un polynôme dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$ , son polytope de Newton  $\mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^{d+1}$  est l'enveloppe convexe de ses exposants. Considérons un polynôme de la forme  $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$ , où les  $a_k$  sont des polynômes dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$  avec  $a_0 a_n \neq 0$ . Soit  $\mathcal{P}(F)$  le polytope de Newton de  $F$ ; nous allons décrire l'intégrale de Minkowski de la projection  $\pi: \mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow [0, n] \subset \mathbb{R}$ . Ceci est un cas particulier du théorème 7.3 de [3]. Une section de  $\pi$  est une application monotone de la forme  $t \mapsto (\gamma(t), t) \in \mathcal{P}(F)$ , pour  $t \in [0, n]$ , et il lui est associé le point  $\int_{[0, n]} \gamma$  dans l'intégrale de Minkowski de  $\pi$ . Il est montré en [3] que les sommets de l'intégrale de Minkowski correspondent à des intégrales des chemins monotones cohérents dans les arêtes de  $\mathcal{P}(F)$ .

Ces chemins sont décrits par une collection  $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p_n\}$  de sommets de  $\mathcal{P}(F)$ , avec  $p_j = (u_j, j)$ , où  $u_j$  est un sommet de  $\mathcal{P}(a_j)$  pour  $j \in \{0, i_1, \dots, i_s, n\}$ , avec  $0 < i_1 <$



$\dots < i_s < n$ . Si  $v < v'$  on peut paramétriser le segment  $[(u, v), (u', v')] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , par  $\gamma(\lambda) = u + \frac{\lambda-v}{v'-v}(u' - u)$ , avec  $\lambda \in [v, v']$ , donc  $\int_{[v, v']} \gamma = \frac{v'-v}{2}(u + u')$ .

L'intégrale du chemin  $\gamma$  correspondant à la collection de sommets  $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_s}, p_n\}$  est:

$$\begin{aligned}
 \int_{[0, n]} \gamma &= \int_{[0, i_1]} \gamma + \dots + \int_{[i_s, n]} \gamma \\
 (1) \quad &= \frac{1}{2} \left( i_1(u_0 + u_{i_1}) + \sum_{k=2}^s (i_k - i_{k-1})(u_{i_k} + u_{i_{k-1}}) + (n - i_s)(u_{i_s} + u_n) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( i_1 u_0 + i_2 u_{i_1} + \sum_{k=2}^{s-1} (i_{k+1} - i_{k-1}) u_{i_k} + (n - i_{s-1}) u_{i_s} + (n - i_s) u_n \right).
 \end{aligned}$$

Ces considérations motivent la définition suivante:

**Définition 2** Soient un cône strictement convexe  $\rho \subset \mathbb{R}^d$  de dimension  $d$  et  $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$  un polynôme de degré  $n$  de terme constant non nul. Soit  $\mathcal{Q}$  l'enveloppe convexe des intégrales  $\int \gamma_w$  des chemins monotones  $\gamma$  dans le polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(F)$  définis par des vecteurs irrationnels  $w \in \rho$ . Le  $\rho$ -polyèdre-fibre de  $F$  est la somme de Minkowski  $\mathcal{Q}_\rho(F) := 2(\mathcal{Q} + \rho^\vee)$ .

Le  $\rho$ -polyèdre-fibre  $\mathcal{Q}_\rho(F)$  est un polyèdre rationnel. Il dépend du  $\rho$ -polyèdre de Newton de  $F$ . L'éventail  $\Sigma$  associé au polyèdre-fibre  $\mathcal{Q}_\rho(F)$  est une subdivision rationnelle finie du cône  $\rho$ . Si  $w, w'$  sont des vecteurs dans l'intérieur d'un cône de dimension  $d$  de  $\Sigma$ , ils définissent le même chemin polygonal dans les arêtes du polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(F)$ .

Dans le cas où  $F$  est un polynôme dans l'anneau  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$  on appelle *polytope-fibre* de  $F$  le polytope  $\mathcal{Q}(F) := 2\mathcal{Q}$  où  $\mathcal{Q}$  est l'intégrale de Minkowski de la la projection du polytope de Newton  $\pi: \mathcal{P}(F) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow [0, n] \subset \mathbb{R}$ .

### 3.4 Théorème de Newton-Puiseux

On va généraliser un résultat de [9].

**Théorème 2** Soient  $\rho$  un cône rationnel strictement convexe de dimension  $d$  et  $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$  un polynôme non constant. Pour tout vecteur irrationnel  $w \in \rho$  il existe un cône rationnel strictement convexe  $\sigma_w$  de dimension  $d$ , et  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $w \in \sigma_w \subset \rho$  et que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_{\sigma_w}))[Y]$ .

**Preuve** Elle est essentiellement la même que celle de [9]. Un vecteur irrationnel  $w \in \rho \subset (\mathbb{R}^d)^*$  définit un chemin monotone cohérent  $\gamma$  dans les arêtes du polyèdre rationnel  $\mathcal{N}_\rho(F)$ . Fixons une arête  $e = [(u, v), (u', v')] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  du chemin  $\gamma$ , avec  $v < v'$ . L'inclinaison de  $e$  est un vecteur  $q \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}^d$  où  $l$  est la longueur  $v' - v$ . La restriction de  $F$  à l'arête  $e$  est le polynôme  $F|_e = \sum_{I \in e} \alpha_I X_1^{i_1} \dots X_d^{i_d} Y^{i_{d+1}}$ . On associe à l'arête  $e$  le polynôme  $f_e \in \mathbb{C}[t]$  par  $F|_e(1, \dots, 1, t) = t^v f_e$  où  $f_e(0) \neq 0$ . Le polynôme  $f_e$  est de degré  $l$  et toutes ses racines sont non nulles.

Soit  $c$  une racine de  $f_e$ , définissons le polynôme  $F_2 = F(Y + cX^q) \in \mathbb{C}((\frac{1}{l}S_\rho))[Y]$ . Clairement,  $F_2$  est un polynôme de degré  $r$  et on a :

$$F_2 = \sum_I \alpha_I \sum_{j=0}^{i_{d+1}} \binom{i_{d+1}}{j} c^j X_1^{i_1+jq_1} \dots X_d^{i_d+jq_d} Y^{i_{d+1}-j}.$$

On en déduit que :

1. Les exposants de  $F_2$  sont de la forme  $I + j(q, -1)$  où  $I = (i_1, \dots, i_{d+1})$  est un exposant de  $F$  et  $j \in \{0, \dots, i_{d+1}\}$ , donc  $\pi_e(\mathcal{N}_\rho(F_2))$  est contenu dans  $\pi_e(\mathcal{N}_\rho(F))$ .
2. Le coefficient du terme constant de  $F_2$  d'exposant dans la droite  $E$  défini par l'arête  $e$  est,  $\sum_{I \in e} \alpha_I c^{i_{d+1}} = f_e(c)$ , nul par construction.
3. Le coefficient du terme de  $F_2$  d'exposant  $p_{v'}$  coïncide avec celui de  $F$ .
4. Si  $Y$  ne divise pas  $F_2$ , le polyèdre de  $F_2$  a toujours des points dans l'hyperplan  $v = 0$ .
5. L'exposant de  $F_2$  dans la droite  $E$  correspondant au terme de plus petit degré en  $Y$  est un sommet du  $\rho$ -polyèdre de Newton de  $F_2$ . Cet exposant est de la forme  $(u, m)$  où  $m$  est la multiplicité de  $c$  comme racine de  $f_e$ . En effet, la plus petite ordonnée des exposants de  $F_2$  dans la droite  $E$  est le nombre  $m$  de fois qu'il faut dériver pour que  $\frac{\partial^m}{\partial Y^m}(F_2|_E)$  ait un terme constant non nul. Comme  $F_2|_E = F|_e(Y + cX^q)$  le coefficient du terme constant de  $Y$  de  $\frac{\partial^k}{\partial Y^k}(F_2|_E)$  est égal à  $\sum_{I \in e} \alpha_I i_{d+1} \dots (i_{d+1} - k + 1) c^{i_{d+1}-k} = \frac{d^k f_e}{dt^k}(c)$ .

Le sommet  $(u, m)$  du polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(F_2)$  défini par 5. est un sommet du chemin monotone défini par  $w$  dans les arêtes de  $\mathcal{N}_\rho(F_2)$ . Si  $Y$  ne divise pas  $F_2$  on va considérer la partie finale du chemin entre le sommet  $(u, m)$  et l'hyperplan  $v = 0$ .

Parmi les segments de cette partie finale du chemin polygonal on choisit une arête  $e_2$  d'inclinaison  $q_2$  et de longueur  $l_2$ . On choisit une racine  $c_2$  du polynôme associé  $f_{e_2}$  de multiplicité  $m_2$  et on définit  $F_3 := F_2(Y + c_2 X^{q_2})$ . On continue par récurrence. Le polynôme  $F_n$  est un élément de l'anneau  $\mathbb{C}((\frac{1}{l_1 \dots l_{n-1}} S_\rho))[Y]$ .

On obtient une suite décroissante de nombres entiers positifs :  $l \geq m \geq l_2 \geq m_2 > \dots > 0$ , qui est donc stationnaire; il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $l_n = m_n = m_{n_0} = m$ . Ceci implique que  $f_{e_n} = \theta(t - c_n)^m$ , et aussi que la partie finale du chemin défini par  $w$  dans les arêtes de  $\mathcal{N}_\rho(F_n)$  est le segment  $e_n$ . De plus les sommets de  $e_n$  et  $e_{n+1}$  qui ne sont pas dans l'hyperplan  $v = 0$  coïncident, pour  $n > n_0$ .

Pour  $n > n_0$ , on a le segment  $e_n = [(u_n, 0), (u_0, m)]$  d'inclinaison  $q_n = \frac{1}{m}(u_n - u_0)$ . L'intersection de la droite définie par  $e_n$  avec l'hyperplan  $v = 0$  est le point  $p_n := u_0 + m q_n$ . Par définition du  $\rho$ -polyèdre de Newton, le cône  $\sigma(e_{n_0})$  associé au sommet  $p_{n_0}$  du polyèdre  $\pi_{e_{n_0}}(\mathcal{N}_\rho(F_{n_0}))$  est contenu dans  $\rho$ . Le lemme 4 implique que  $w \in \sigma(e_{n_0})$ .

On vérifie qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que les inclinaisons construites sont dans un réseau  $\frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$ . On sait que  $u_0 = \frac{\beta_0}{k}$ ,  $u_{n_0} = \frac{\beta_{n_0}}{k}$  où  $\beta_0, \beta_{n_0} \in \mathbb{Z}^d$  et  $k = l_1 l_2 \dots l_{n_0-1}$  est un entier. L'inclinaison de  $e_{n_0}$  est  $q_{n_0} = \frac{\beta_{n_0} - \beta_0}{km} = \frac{\beta}{k\lambda}$  où  $\beta \in \mathbb{Z}^d$  et  $\lambda \in \mathbb{N}$  est premier avec une coordonnée de  $\beta$ . Si  $(\frac{\beta'}{k}, h)$  est un exposant de  $F|_e^{n_0}$  on a  $q_{n_0} = \frac{\beta_{n_0} - \beta'}{kh} = \frac{\beta}{k\lambda}$ . Comme  $\lambda(\beta_{n_0} - \beta') = h\beta$ , on déduit que  $\lambda$  divise  $h$  donc  $f_{e_{n_0}}$  est un polynôme en  $t^\lambda$ . Par ailleurs  $f_{e_n} = \theta(t - c_n)^m$  et comme la caractéristique de  $\mathbb{C}$  est zéro, on a  $\lambda = 1$ . Par récurrence on obtient que  $q_n \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$ , pour  $n \geq n_0$  et donc pour  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrons que les inclinaisons  $q_j$  sont dans un cône affine strictement convexe.

Le  $\rho$ -polyèdre de Newton de  $F_{n_0}$  est contenu dans le cône affine:

$$W(e_{n_0}) := \{\lambda(u - u')/u \in \mathcal{N}_\rho(F_{n_0}), u' \in e_{n_0}, \lambda \geq 0\},$$

associé à l'arête  $e_{n_0}$ . Comme  $u_{n_0+1} \in W(e_{n_0})$ , par construction on a l'inclusion  $\mathcal{N}_\rho(F_{n_0+1}) \subset W(e_{n_0})$ . Par récurrence, en utilisant que le sommet  $(u_0, m)$  de  $e_n$  est sur la droite qui contient le segment  $e_{n_0}$ , on montre que  $u_n \in W(e_{n_0})$  et que  $\mathcal{N}_\rho(F_n) \subset W(e_{n_0})$ , pour  $n > n_0$ . Ceci implique pour tout  $w' \in \sigma(e_{n_0})$  que  $\langle w', q_n - q_{n_0} \rangle = \frac{1}{m} \langle w', p_n - p_{n_0} \rangle$  est  $\geq 0$ . Donc les exposants construits sont dans le cône rationnel affine  $q_{n_0} + \sigma(e_{n_0})^\vee$  pour  $n \geq n_0$ .

Notons  $\sigma$  pour  $\sigma(e_{n_0})$ . Il existe  $u_0 \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d$  tel que les inclinaisons  $q_n$  appartiennent à  $u_0 + \frac{1}{k}S_\sigma$ . Définissons les sommes partielles,  $\phi_n = \sum_{j=1}^n c_j X^{q_j}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . On a  $\phi_n \in \mathbb{C}(\frac{1}{k}S_\sigma)$  et  $X^{-u_0} \phi_n \in \mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\sigma]]$ . Par construction, et par le lemme 5, on sait que  $q_j <_w q_{j+1}$  pour  $j \in \mathbb{N}$ . Par la remarque 2, ceci implique que la série formelle  $\phi := \sum c_j X^{q_j}$  est égale à  $X^{u_0} \lim_{n \rightarrow \infty} X^{-u_0} \phi_n$  où la limite est dans l'anneau complet  $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\sigma]]$ .

Comme  $w \in \sigma \subset \rho$ , on peut considérer  $F$  comme élément de  $\mathbb{C}(\frac{1}{k}S_\sigma)[Y]$ . La série formelle  $\phi$  est une racine de  $F$ . En effet, si  $n \geq n_0$  la série  $F(\phi_{n-1}) = F_n(0)$  a tous ses exposants dans le cône rationnel affine  $p_{n_0} + \sigma(e_{n_0})^\vee$ . L'égalité suivante  $F(\phi) = X^{p_{n_0}} \lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_{n-1}) X^{-p_{n_0}}$  est clair. Si  $n \geq n_0$  l'exposant initial de  $F(\phi_{n-1}) X^{-p_{n_0}}$  par rapport à  $w$  est  $p_{n+1} - p_n = m(q_{n+1} - q_{n_0})$  et on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) X^{-p_{n_0}} = 0$ .

On vérifie que la multiplicité de  $\phi$  comme racine de  $F$  est  $\geq m$ . La multiplicité de  $c_n$  comme racine de  $f_{e_n}$  est  $\geq m$ , donc  $c_n$  est une racine de  $\frac{d^s f_{e_n}}{dt^s}$  pour  $1 \leq s \leq m-1$ . Le polynôme  $\frac{d^s f_{e_n}}{dt^s}$  est le polynôme de l'arête  $e_n^s$  du polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(\frac{\partial^s F}{\partial Y^s})$  qui est sur le segment  $-(0, \dots, 0, s) + e_n$ . L'arête  $e_n^s$  est déterminée par le vecteur irrationnel  $w$ . Comme  $\frac{\partial^s F_n}{\partial Y^s} = \frac{\partial^s F}{\partial Y^s}(Y + \phi_{n-1})$  on obtient que  $\phi$  est une racine de  $\frac{\partial^s F}{\partial Y^s}$  pour  $1 \leq s \leq m-1$ .

On a montré que, associés à chaque arête  $e$  du chemin monotone  $\gamma$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  et un cône rationnel  $\sigma_e$  strictement convexe de dimension  $d$  tel que  $w \in \sigma_e \subset \rho$ , tels que  $F$  ait au moins  $l_e$  racines à la Newton-Puiseux dans  $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_{\sigma_e}]]$ . On peut choisir  $k \in \mathbb{N}$  valable pour toutes les arêtes de  $\gamma$ . Comme le vecteur  $w$  est irrationnel, le cône rationnel  $\tau = \bigcap_{e \in \gamma} \sigma_e$  est de dimension  $d$ . L'existence d'un homomorphisme d'algèbres  $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_{\sigma_e}]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\tau]]$ , pour chaque arête  $e$  de  $\gamma$ , garantit que  $F$  se décompose dans  $\mathbb{C}[[\frac{1}{k}S_\tau]]$ , parce que les exposants initiaux par rapport à  $<_w$  des séries correspondantes à segments différents de  $\gamma$  sont différents. ■

**Remarque 3** Soient  $F \in \mathbb{C}[[S_\rho]]$  un polynôme de degré  $\geq 1$  et  $w \in \rho$  un vecteur irrationnel, définissant un chemin polygonal  $\gamma$  dans les arêtes de  $\mathcal{N}_\rho(F)$ . La démonstration du théorème 2 montre que, associées à chaque arête  $e$  de  $\gamma$ , il existe  $l_e$  racines de  $F$  telles que leur exposant initial par rapport à  $w$  est l'inclinaison  $q_e$ .

### 3.5 Rapport avec les paramétrisations des singularités quasi-ordinaires

**Théorème 3** Soit  $F = \sum_{j=0}^n a_j Y^j$  un polynôme réduit de degré  $n \geq 1$  avec  $a_j \in \mathbb{C}\{\{S_\rho\}\}$ .

1. Pour tout cône  $\tau$  de dimension  $d$  de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F)$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ .

2. Si  $a_0 \neq 0$ , pour tout cône  $\tau$  de dimension  $d$  de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F) + \mathcal{Q}_\rho(F)$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ , et de plus les racines de  $F$  sont des unités.

**Preuve** Soit  $\tau$  un cône de dimension  $d$  de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F)$ . Par définition de  $\rho$ -polyèdre de Newton, le cône  $\tau$  est contenu dans  $\rho$ , et on a l'homomorphisme d'algèbres  $\mathbb{C}\{S_\rho\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{S_\tau\}$  qui permet de considérer  $F$  comme élément de  $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}[Y]$ .

Tout vecteur irrationnel  $w \in \tau$  atteint sa valeur minimale sur les exposants de  $a_n$  au même point  $u_n$ . On montre par récurrence sur  $n$  qu'il existe  $q_0 \in \mathbb{Z}^d$  tel que le polyèdre  $\mathcal{N}_\tau(F)$  est contenu dans le cône affine:

$$W := \{(u_n, n) + \lambda(q_0, -1) + (u', 0)/\lambda \in [0, n], u' \in \tau^\vee\}.$$

Si  $n = 1$ , il suffit de prendre  $q \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\mathcal{N}_\tau(a_0)$  soit contenu dans le cône affine  $u_n + q + \tau^\vee$ . Si  $n > 1$ , par récurrence on a construit  $q$  pour le polynôme  $(F - a_0)Y^{-1}$ . Il suffit de prendre  $q_0 \in \mathbb{Z}^d$  tel que le polyèdre  $u_n + nq + \tau^\vee + \mathcal{N}_\tau(a_0)$  soit contenu dans le cône affine  $u_n + nq_0 + \tau^\vee$ .

Nous notons  $p_0$  le point  $u_n + nq_0$ ,  $e_0$  le segment  $[(u_n, n), (p_0, 0)]$  et  $\pi_{e_0}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$  la projection parallèlement à l'arête  $e_0$ . On a  $\pi_{e_0}(u, v) = u + vq_0$ .

On définit le changement:

$$G = X^{-p_0} F(X^{q_0} Y).$$

On en déduit:

1. Si  $F = \sum_{j=0}^n a_j Y^j$  avec  $a_i \in \mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$  on obtient que  $G = \sum_{j=0}^n a_j X^{jq_0 - p_0} Y^j$ , et donc l'exposant de  $G$  qui correspond à l'exposant  $(u, j)$  de  $F$  est  $(\pi_{e_0}(u) - p_0, j)$ . Par construction, comme  $\mathcal{N}_\tau(F) \subset W$ , le vecteur  $\pi_{e_0}(u) - p_0$  appartient au cône  $\tau^\vee$ . Ceci implique que  $G$  est un polynôme dans l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ . De plus, l'exposant de  $G$  qui correspond à l'exposant  $(u_n, n)$  de  $F$  est  $(0, n)$ , donc  $G(z_\tau, Y) \in \mathbb{C}[Y]$  est un polynôme de degré  $n$ .
2. La quasi-homogénéité et l'homogénéité du discriminant générique impliquent que le discriminant de  $G$  par rapport à  $Y$  est de la forme  $\Delta_Y G = X^{u_0} \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une unité dans l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\tau\}$ .

En appliquant le théorème 1, on voit qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ . Les racines correspondantes de  $F$  sont dans  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ .

Soit  $\tau$  est un cône de dimension  $d$  de la subdivision finie de  $\rho$  induite par le polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(a_n \Delta_Y F) + \mathcal{Q}_\rho(F)$ ; vérifions que les racines construites sont des unités dans  $\mathbb{C}\{\{S_\tau\}\}$ .

Soit  $w \in \tau$  un vecteur irrationnel. D'après le théorème 2, il existe un cône rationnel strictement convexe  $\sigma$  qui contient  $w$ , et  $k \in \mathbb{N}$  tels que le polynôme  $F$  se décompose sur l'anneau  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\sigma))$ .

Puisque le vecteur  $w \in \tau \cap \sigma$  est irrationnel, le cône rationnel  $\tau \cap \sigma$  est nécessairement un cône de dimension  $d$ , et son cône dual  $\tau^\vee + \sigma^\vee$  est strictement convexe. L'anneau intègre  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_{\tau \cap \sigma}))$  contient  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\sigma))$  et  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\tau))$  comme sous-anneaux.

D'abord, les racines de  $F$  obtenues par le théorème 1 sont dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ , et donc elles doivent coïncider avec les racines obtenues à la Newton-Puiseux. Nous affirmons que ces racines sont des éléments inversibles dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ . Par hypothèse, chaque élément irrationnel  $w \in \tau$  définit le même chemin  $\gamma$  dans les arêtes de

$\mathcal{N}_\tau(F)$ . Donc l'exposant initial  $u$  par rapport à  $w$  d'une racine  $\phi$  ne dépend pas de  $w \in \tau$  (par la remarque 3). On obtient que  $\phi = X^u \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est une unité de  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ , c'est-à-dire que  $\phi$  est une unité dans  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ . ■

On obtient aussi la version polynomiale du théorème précédent:

**Corollaire 1** Soit un polynôme  $F = \sum a_j Y^j \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$  réduit de degré  $n \geq 1$ .

1. Si le polytope  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$  est de dimension  $d$ , pour tout cône  $\tau$  de dimension  $d$  de l'éventail associé à  $\mathcal{P}$  il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ .
2. Si  $a_0 \neq 0$  et si  $\tau$  est un cône associé à un sommet du polytope  $\mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{Q}(F)$ , toutes les racines de  $F$  sont des unités dans  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\tau\}$ .

**Preuve** Si le polytope  $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$  est de dimension  $d$ , le cône  $\tau$  associé à un sommet de  $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$  est de dimension  $d$ . On applique le théorème 3 à  $F$  vu comme élément de  $\mathbb{C}\{S_\tau\}[Y]$ .

Si le polytope  $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{Q}(F)$  est de dimension  $< d$ , le cône  $\tau$  associé à un sommet de  $\mathcal{P}$  est rationnel de dimension  $d$  mais il n'est pas strictement convexe. Le cône  $\tau^\vee$  est strictement convexe et  $\tau$  définit l'algèbre  $\mathbb{C}[[S_\tau]]$ . Si  $\sigma \subset \tau$  est un cône strictement convexe de dimension  $d$ , on considère  $F$  comme élément de  $\mathbb{C}\{S_\sigma\}[Y]$  et on obtient que il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\frac{1}{k}S_\sigma\}$ .

On peut recouvrir le cône  $\tau$  par un nombre fini de cônes rationnels strictement convexes de dimension  $d$ ,  $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq s}$ , tels que  $\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$  soit d'intérieur non vide, pour  $i = 1, \dots, s-1$ . Ceci implique que les racines de  $F$  obtenues par le théorème 1 correspondant à  $\sigma_i$  et à  $\sigma_{i+1}$  vont coïncider, et le terme initial d'une racine par rapport à la valuation induite par un vecteur irrationnel  $w$  ne dépend pas de  $w \in \sigma_i \cup \sigma_{i+1}$ . Donc toutes les racines de  $F$  sont des séries à exposants dans un translaté du cône  $\bigcap_{i=1}^s \sigma_i^\vee = \tau^\vee$ . ■

**Remarque 4** Soit  $F \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d][Y]$  un polynôme de degré  $n$  tel que 0 soit une racine simple de  $F(0, Y)$ , le théorème des fonctions implicites garantit qu'il existe une unique série  $\phi \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$  telle que  $F(\phi) = 0$ . Si on a  $a_n \Delta_Y F = X^u \varepsilon$  où  $\varepsilon(0) \neq 0$  le théorème 3 montre que les exposants de  $\phi$  sont dans un translaté entier du cône dual associé au sommet  $u$  de  $\mathcal{P}(a_n \Delta_Y F)$  lorsque ce polytope est de dimension  $d$ . (Voir l'exemple 1).

## 4 Application aux polyèdres de Newton du discriminant et du résultant

### 4.1 Les conditions discriminantales pour le polyèdre de Newton

Suivant [9], on dit que un polynôme  $F \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$  vérifie la *condition discriminantale* si pour toute arête admissible  $e$  de son  $\rho$ -polyèdre de Newton, le polynôme  $f_e$  n'a que des racines simples.

**Théorème 4** Soit  $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{C}((S_\rho))$  tels que  $a_0 a_n \neq 0$ . On a l'inclusion de polyèdres

$$\mathcal{N}_\rho(a_0) + \mathcal{N}_\rho(a_n) + \mathcal{N}_\rho(\Delta_Y F) \subseteq \mathcal{Q}_\rho(F)$$

où  $\Delta_Y F$  est le discriminant de  $F$  par rapport à  $Y$ . On a l'égalité si  $F$  vérifie la condition discriminantale.

**Preuve** On va trouver les conditions génériques que doivent vérifier les coefficients des termes qui apparaissent dans  $F$ , pour garantir l'égalité dans le théorème.

Soit  $w \in \rho$  un vecteur irrationnel, et soit  $\gamma$  le chemin monotone défini par  $w$  dans les arêtes du  $\rho$ -polyèdre de Newton. Le chemin  $\gamma$  a des sommets  $\{p_0, p_{i_1}, \dots, p_{i_t}, p_n\}$  dans  $\mathcal{N}_\rho(F)$ , avec  $p_j = (u_j, j)$  pour  $j \in \{0 = i_0, i_1, \dots, i_t, i_{t+1} = n\}$  avec  $i_0 < \dots < i_{t+1}$ . Nous notons  $q_r := \frac{-u_r + u_{i_{r-1}}}{i_r - i_{r-1}} \in \mathbb{Q}^d$  et  $l_r := i_r - i_{r-1}$  l'inclinaison et la longueur du segment  $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$  du chemin  $\gamma$ , pour  $r = 1, \dots, t+1$ .

D'après le théorème 2, il existe un cône rationnel strictement convexe  $\sigma_w$ , et  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}\mathcal{S}_{\sigma_w}))[[Y]]$ . À chaque segment  $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$  du chemin  $\gamma$  sont associées  $i_r - i_{r-1}$  racines de  $F$  de la forme:

$$\phi_j = c_j X^{q_r} + \dots,$$

où  $q_r$  est l'inclinaison du segment  $e_r$ , et  $c_j$  parcourt les racines de  $f_{e_r}$  comptées avec leur multiplicité. De plus  $q_r$  est l'exposant initial par rapport à  $w$  des termes qui apparaissent dans  $\phi_j$ . On indexe les racines  $\phi_j$  correspondant à  $e_r$ , par  $j \in \mathcal{A}_r := \{i_{r-1} + 1, \dots, i_r\}$ .

En appliquant le lemme 5, on voit que parmi les termes qui peuvent apparaître dans  $\phi_k - \phi_j$ , celui d'exposant de le plus petit par rapport à  $\langle w$  est égal à:

$$\begin{cases} (c_k - c_j)X^{q_r} & \text{si } k, j \in \mathcal{A}_r \\ c_j X^{q_m} & \text{si } k \in \mathcal{A}_r, j \in \mathcal{A}_m \text{ et } r < m. \end{cases}$$

Comme,

$$\Delta_Y F = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_n^{2(n-1)} \prod_{k < j} (\phi_k - \phi_j)^2,$$

le terme d'exposant le plus petit par rapport à  $\langle w$  qui peut apparaître dans  $a_0 a_n \Delta_Y F$  est égal à  $ABC$  où:

$$A = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \alpha_{p_0} \alpha_{p_n}^{2n-1} X^{u_0 + (2n-1)u_n}$$

$$B = \prod_{r=1}^{t+1} \prod_{i_{r-1} < k_r < j_r \leq i_r} (c_{k_r} - c_{j_r})^2 X^{2q_r}$$

$$C = \prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \prod_{m=r+1}^{t+1} \prod_{j_m \in \mathcal{A}_m} c_{j_m}^2 X^{2q_m}.$$

L'exposant correspondant à  $B$  est:

$$\begin{aligned} & 2 \left( \binom{i_1}{2} q_1 + \binom{i_2 - i_1}{2} q_2 + \dots + \binom{i_{t+1} - i_t}{2} q_{t+1} \right) \\ & = (i_1 - 1)(u_0 - u_{i_1}) + (i_2 - i_1 - 1)(u_{i_1} - u_{i_2}) + \dots + (i_{t+1} - i_t - 1)(u_{i_t} - u_{i_{t+1}}) \end{aligned}$$

$$= (i_1 - 1)u_0 + (i_2 - 2i_1)u_{i_1} + (i_3 - 2i_2 + i_1)u_{i_2} \\ + \cdots + (n - 2i_t + i_{t-1})u_{i_t} + (-n + i_{t-1})u_n.$$

L'exposant correspondant à  $C$  est:

$$2 \left( \sum_{r=1}^t (i_r - i_{r-1}) \sum_{m=r+1}^{t+1} q_m (i_m - i_{m-1}) \right) \\ = 2 \left( \sum_{r=1}^t (i_r - i_{r-1}) (-u_n + u_{i_r}) \right) \\ = 2 (i_1 u_{i_1} + (i_2 - i_1) u_{i_2} + \cdots + (i_t - i_{t-1}) u_{i_t} - i_t u_n).$$

L'exposant  $u$  correspondant à  $ABC$  coïncide avec  $2 \int \gamma$ , (voir la formule (1), Section 3.3). Clairement, le coefficient correspondant à  $ABC$  est non nul si et seulement si les segments du chemin  $\gamma$  vérifient la condition discriminantale. Ceci termine la preuve, parce que le vecteur irrationnel  $w$  est arbitraire. ■

**Corollaire 2** Avec les notations précédentes, le coefficient du terme de la série  $a_0 a_n \Delta_Y F$  d'exposant égal à  $2 \int \gamma$  est:

$$c(\gamma) := (-1)^k \alpha_{p_0} \alpha_{p_1}^2 \cdots \alpha_{p_t}^2 \alpha_{p_{t+1}} \Delta f_{e_1} \cdots \Delta f_{e_{t+1}},$$

où  $f_{e_r} = \alpha_{p_{r-1}} + \cdots + \alpha_{p_r} t^{l_r}$  est le polynôme de l'arête  $e_r = [p_{i_{r-1}}, p_{i_r}]$  du chemin  $\gamma$ , son discriminant est  $\Delta f_{e_r}$  et  $k = \frac{1}{2} (n(n-1) + \sum_{r=1}^{t+1} l_r(l_r-1))$ .

**Preuve** En utilisant que  $\Delta f_{e_r} = (-1)^{\frac{1}{2} l_r(l_r-1)} \alpha_{p_{i_r}}^{2(l_r-1)} \prod_{i_{r-1} < k_r < j_r \leq i_r} (c_{k_r} - c_{j_r})^2$  on obtient que le coefficient de  $B$  est

$$\prod_{r=1}^{t+1} (-1)^{\frac{1}{2} l_r(l_r-1)} \alpha_{p_{i_r}}^{-2(l_r-1)} \Delta f_{e_r}.$$

Comme le produit des racines de  $f_{e_m}$  est égal à  $(-1)^{l_m} \frac{\alpha_{p_{i_{m-1}}}}{\alpha_{p_{i_m}}}$ , on déduit que le coefficient de  $C$  est

$$\prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \prod_{m=r+1}^{t+1} \left( \frac{\alpha_{p_{i_{m-1}}}}{\alpha_{p_{i_m}}} \right)^2 = \prod_{r=1}^t \prod_{k_r \in \mathcal{A}_r} \left( \frac{\alpha_{p_{i_r}}}{\alpha_{p_{i_{r+1}}}} \right)^2 = \prod_{r=1}^t \left( \frac{\alpha_{p_{i_r}}}{\alpha_{p_{i_{r+1}}}} \right)^{2l_r}.$$

Donc le coefficient de  $ABC$  est:

$$(-1)^k \Delta f_{e_1} \cdots \Delta f_{e_{t+1}} \alpha_{p_0} \alpha_{p_{t+1}}^{2n-1-2(n-l_{t+1})-2(l_{t+1}-1)} \prod_{r=1}^t \alpha_{p_{i_r}}^{2l_r-2(l_r-1)} = c(\gamma). \quad \blacksquare$$

On déduit des théorèmes 3 et 4:

**Corollaire 3** Soit le polynôme  $F = \sum_{k=0}^n a_k Y^k$ , où  $a_k$  sont des séries dans  $\mathbb{C}((S_\rho))$  telles que  $a_0 a_n \neq 0$ . Si  $F$  vérifie la condition discriminantale, pour tout cône  $\tau$  de dimension  $d$  de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{Q}_\rho(F)$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}((\frac{1}{k}S_\tau))$ , et de plus les racines de  $F$  sont des unités. ■

**Remarque 5** Le corollaire 4.1 de [9] énonce une “version polynomiale” incorrecte du corollaire précédent. Il est dit que des racines de  $F$  correspondants aux cônes associés aux sommets différents du polytope-fibre sont différents. Supposons que le polytope  $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \mathcal{P}(a_n)$  soit de dimension  $d$ , et que l'éventail  $\Sigma$  associé au polytope-fibre soit une sous-division stricte de l'éventail  $\Sigma'$  associé à  $\mathcal{P}$ . Par le corollaire 1, les racines de  $F$  correspondants aux cônes de  $\Sigma$  qui subdivisent un cône  $\tau \in \Sigma'$  de dimension  $d$  vont coïncider dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\tau\}\}$ . Elles ne seront pas toutes des unités dans cet anneau. (Voir l'exemple 1).

**Corollaire 4** Soit le polynôme  $F = \sum_{i=1}^n a_i Y^i$  où  $a_i$  sont des polynômes dans  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$  tels que  $a_0 a_n \neq 0$ . On a l'inclusion de polytopes

$$\mathcal{P}(a_0) + \mathcal{P}(a_n) + \mathcal{P}(\Delta_Y F) \subseteq \mathcal{Q}(F)$$

et on a l'égalité si et seulement si le polynôme  $F$  vérifie la condition discriminantale.

**Preuve** Soit  $\rho$  un cône de dimension  $d$  strictement convexe. On va considérer le polynôme  $F$  comme un élément de l'anneau  $\mathbb{C}[[S_\rho]][Y]$ . En appliquant le théorème 4 pour chaque  $w \in \rho$ , on voit que  $\mathcal{Q}(F) + \rho^\vee \supseteq \mathcal{P}(a_0) + \mathcal{P}(a_n) + \mathcal{P}(\Delta_Y F) + \rho^\vee$ , et que l'on a l'égalité si et seulement si toutes les arêtes admissibles du polyèdre  $\mathcal{P}(F) + \rho^\vee \times \{0\}$  vérifient la condition discriminantale. Ceci termine la preuve parce que  $\rho$  est arbitraire. ■

**Remarque 6** En utilisant le corollaire 4 et le théorème 7.3 de [3], on peut déduire de ce qui précède les théorèmes 2.2 et 2.3, Chap. 12, de [6]. Ces résultats donnent le polytope de Newton du discriminant générique (c'est-à-dire le discriminant du polynôme  $F = X_n Y^n + \dots + X_1 Y + X_0 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n][Y]$  par rapport à  $Y$ ) et les coefficients des termes correspondant aux sommets du polytope.

En effet, le polytope  $\mathcal{P}(F)$  est un simplexe de dimension  $n$ , de sommets  $(u_j, j) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ , où  $\{u_j\}_{j=0}^n$  sont les vecteurs de la base canonique dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Comme le polynôme  $F$  vérifie la condition discriminantale on a  $\mathcal{Q}(F) = \mathcal{P}(X_0 X_n \Delta_Y F)$ . Chaque sous-ensemble  $\{i_1, \dots, i_s\}$  de  $\{1, \dots, n-1\}$  correspond de manière unique à un chemin monotone  $\gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$  dans les arêtes de  $\mathcal{P}(F)$ . Comme  $\mathcal{P}(F)$  est un simplexe, il existe un vecteur irrationnel  $w \in (\mathbb{R}^{n+1})^*$  définissant le chemin  $\gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$ . Le sommet de l'intégrale de Minowski  $\int \gamma_{\{i_1, \dots, i_s\}}$  est décrit par la formule (1). En appliquant le corollaire 2, on obtient aussi le coefficient correspondants aux sommets du polytope de Newton du discriminant générique.



## 4.2 Application au polyèdre de Newton du résultant

On dira que deux polynômes  $F, G \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$  vérifient la *condition résultante* si pour toute paire d'arêtes  $e$  de  $\mathcal{N}_\rho(F)$  et  $e'$  de  $\mathcal{N}_\rho(G)$  ayant la même inclinaison, les polynômes des arêtes respectives  $f_e, g_{e'} \in \mathbb{C}[t]$  n'ont pas de racines en commun.

Soit  $w$  un vecteur irrationnel dans un cône  $\tau$  de dimension  $d$  de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{Q}_\rho(F) + \mathcal{Q}_\rho(G)$ . Le vecteur  $w$  détermine des chemins monotones uniques  $\gamma_F$  et  $\gamma_G$  dans les arêtes des  $\rho$ -polyèdres de Newton de  $F$  et de  $G$ . Le chemin  $\gamma_F$  a des arêtes  $e_i$  d'inclinaisons  $q_i$ , pour  $i = 1, \dots, m$  et par le lemme 5 on a  $q_m <_w \dots <_w q_1$ . Le chemin  $\gamma_G$  a des arêtes  $e'_j$  d'inclinaisons  $q'_j$ , pour  $j = 1, \dots, m'$  tels que  $q'_{m'} <_w \dots <_w q'_1$ .

Par contre, l'ordre défini par  $w$  dans  $q_1, \dots, q_m, q'_1, \dots, q'_{m'}$  peut varier lorsque  $w$  parcourt  $\tau$ . Nous considérons la subdivision finie rationnelle la moins fine de  $\tau$  possédant la propriété suivante: des vecteurs irrationnels qui sont dans le même cône de la subdivision définissent le même ordre sur l'ensemble des inclinaisons  $q_1, \dots, q_m, q'_1, \dots, q'_{m'}$ . On définit de cette manière une subdivision  $\Sigma$  de l'éventail associé à  $\mathcal{Q}_\rho(F) + \mathcal{Q}_\rho(G)$ .

**Proposition 1** *L'éventail associé à l'intégrale de Minkowski  $\mathcal{Q}_\rho(FG)$  est égal à  $\Sigma$ .*

**Preuve** Soit  $\gamma_{FG}$  le chemin monotone dans le polyèdre  $\mathcal{N}_\rho(FG) = \mathcal{N}_\rho(F) + \mathcal{N}_\rho(G)$  défini par un vecteur irrationnel  $w \in \tau \in \Sigma$ . Chaque point  $\gamma(t)$  est la somme de deux points situés dans les chemins  $\gamma_F$  et  $\gamma_G$  définis par  $w$  dans les polyèdres respectifs. Clairement on a  $\gamma_{FG}(n + n') = \gamma_F(n) + \gamma_G(n')$ . Si  $q_m \geq_w q'_{m'}$ , le segment  $l_{m+m'} := \gamma_G(n') + e_m$  est contenu dans  $\gamma_{FG}$ . Ce segment n'est pas une arête de  $\gamma_{FG}$  si et seulement si, on a  $q_m = q'_{m'}$ . Par récurrence, on subdivise  $\gamma_{FG}$  en  $m+m'$  segments,  $l_1, \dots, l_{m+m'}$ , tels qu'il existe une bijection  $\{l_1, \dots, l_{m+m'}\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_{m'}\}$  qui préserve l'inclinaison et la longueur. De plus,  $\gamma_{FG}$  est complètement déterminé par  $\gamma_F, \gamma_G$  et l'ordre des inclinaisons. Ceci implique que  $\Sigma$  est un éventail plus fin que l'éventail associé à  $\mathcal{Q}_\rho(FG)$ .

Réciproquement, si  $w, w'$  sont des vecteurs irrationnels dans un cône de l'éventail associé au polyèdre  $\mathcal{Q}_\rho(FG)$ , ils définissent un unique chemin monotone  $\gamma$  et par le lemme 5 les inclinaisons de ses arêtes ont le même ordre par rapport à  $<_w$  et  $<_{w'}$ , donc  $w, w'$  sont dans le même cône de  $\Sigma$ . ■

**Proposition 2** *Soient  $F, G \in \mathbb{C}((S_\rho))[Y]$  des polynômes de degrés  $n, n' \geq 1$  ayant des termes constants non nuls. Si  $F, G$  vérifient la condition résultante, alors:*

1. *L'éventail  $\Sigma$  associé au polyèdre-fibre  $\mathcal{Q}_\rho(FG)$  est une subdivision de l'éventail du  $\rho$ -polyèdre de Newton du résultant de  $F$  et  $G$ .*
2. *Soit  $\tau \in \Sigma$  un cône de dimension  $d$ , définissant les chemins monotones  $\gamma_F, \gamma_G$  et  $\gamma_{FG}$  dans les polyèdres de Newton  $\mathcal{N}_\rho(F), \mathcal{N}_\rho(G)$  et  $\mathcal{N}_\rho(FG)$ . Le sommet du  $\rho$ -polyèdre de Newton du résultant de  $F$  et  $G$  associé à  $\tau$  est  $\int \gamma_{FG} - \int \gamma_F - \int \gamma_G$ .*

**Preuve** Soit  $w \in \tau \in \Sigma$  un vecteur irrationnel, on montre d'abord que l'exposant le plus petit par rapport à  $<_w$  qui peut apparaître dans  $\text{Res}(F, G)$  est le même pour tout  $w \in \tau$ .

Le chemin  $\gamma_F$  a des arêtes  $e_r = [p_{r-1}, p_r]$  de pente  $q_r$  est de longueur  $l_r$  pour  $r = 1, \dots, m$ . Le polynôme associé à l'arête  $e_r$  est  $f_r = \alpha_{p_{r-1}} + \dots + \alpha_{p_r} t^{l_r}$ . Nous notons  $\{c_r^1, \dots, c_r^{l_r}\}$  ses racines comptées avec multiplicité.

Le chemin  $\gamma_G$  a des arêtes  $e'_s = [p'_{s-1}, p'_s]$  de pente  $q'_s$  est de longueur  $l'_s$  pour  $s = 1, \dots, m'$ . Le polynôme associé à l'arête  $e'_s$  est  $g_s = \beta_{p'_{s-1}} + \dots + \beta_{p'_s} t^{l'_s}$ . Nous notons  $\{d'_s, \dots, d'_{l'_s}\}$  ses racines comptées avec multiplicité.

Par le théorème 2, le terme initial par rapport à  $<_w$ , d'une racine  $\phi_r^i$  de  $F$  correspondant au segment  $e_r$  est  $c_r^i X^{q_r}$ , et celui d'un racine  $\psi_s^j$  de  $G$  correspondant au segment  $e'_s$  est  $d'_s X^{q'_s}$ .

Si  $a_n$  et  $b_{n'}$  sont les coefficients des termes de degré  $n$  et  $n'$  de  $F$  et  $G$  respectivement, on a  $\text{Res}(F, G) = a_n^{n'} b_{n'}^n \prod (\phi_r^i - \psi_s^j)$ . Le coefficient du terme d'exposant le plus petit par rapport à  $<_w$  qui peut apparaître dans  $\text{Res}(F, G)$  est le produit  $ABCD$  où le facteur  $A$  correspond à  $a_n^{n'} b_{n'}^n$ :

$$\begin{aligned}
 A &= \alpha_{p_m}^{n'} \beta_{p'_m}^n, \\
 B &= \prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \prod_{i=1, \dots, l_r} \prod_{j=1, \dots, l'_s} (c_r^i - d'_s^j), \\
 C &= \prod_{q_r > w q'_s}^{r,s} \prod_{j=1, \dots, l'_s} \prod_{i=1, \dots, l_r} c_r^i, \\
 D &= \prod_{q_r < w q'_s}^{r,s} \prod_{j=1, \dots, l'_s} \prod_{i=1, \dots, l_r} -d'_s^j.
 \end{aligned}$$

Comme  $F$  et  $G$  vérifient la condition résultante, on a  $ABCD \neq 0$ , et le terme obtenu ne varie pas lorsque  $w$  parcourt  $\tau$ .

Nous notons  $u_{\Delta(F)}$ ,  $u_{D(G)}$  et  $u_{\Delta(FG)}$  l'exposant le plus petit par rapport à  $<_w$  qui peut apparaître parmi les exposants du discriminant de  $F$ ,  $G$  et  $FG$  respectivement. Par le théorème 4 on a:

$$\begin{aligned}
 2 \int \gamma_F &= \gamma_F(0) + \gamma_F(n) + u_{\Delta(F)} \\
 2 \int \gamma_G &= \gamma_G(0) + \gamma_G(n') + u_{\Delta(G)} \\
 2 \int \gamma_{FG} &= \gamma_{FG}(0) + \gamma_{FG}(n + n') + u_{\Delta(FG)}.
 \end{aligned}$$

On considère l'expression  $(\text{Res}(F, G))^2 \Delta_Y(F) \Delta_Y(G) = \Delta_Y(FG)$  en fonction des racines de  $F$  et de  $G$  et on déduit que si  $u_0$  est l'exposant initial par rapport à  $<_w$  de  $\text{Res}(F, G)$ :

$$2u_0 = u_{\Delta(FG)} - u_{\Delta(F)} - u_{\Delta(G)} = 2 \int \gamma_{FG} - 2 \int \gamma_F - 2 \int \gamma_G,$$

parce que l'on a  $\gamma_{FG}(0) = \gamma_F(0) + \gamma_G(0)$  et  $\gamma_{FG}(n + n') = \gamma_F(n) + \gamma_G(n')$ . ■

**Corollaire 5** Dans les hypothèses de la proposition 2, chaque cône  $\tau \in \Sigma$  de dimension  $d$  définit un sommet du  $\rho$ -polyèdre de Newton du résultant de  $F$  et  $G$  de coefficient:

$$\alpha_{p_m}^{n'} \beta_{p'_m}^n \left( \prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \alpha_{p_r}^{-l'_s} \beta_{p'_s}^{-l_r} \text{Res}(f_r, g_s) \right) \left( \prod_{q_r > w q'_s}^{r,s} (-1)^{l_r l'_s} \left( \frac{\alpha_{p_{r-1}}}{\alpha_{p_r}} \right)^{l'_s} \right) \left( \prod_{q_r < w q'_s}^{r,s} \left( \frac{\beta_{p'_{s-1}}}{\beta_{p'_s}} \right)^{l_r} \right).$$

**Preuve** Comme  $\text{Res}(f_r, g_s) = \alpha_{p_r}^{l'_s} \beta_{p'_s}^{l_r} \prod_{i,j} (c_r^i - d_s^j)$  on a :

$$B = \prod_{q_r=q'_s}^{r,s} \alpha_{p_r}^{-l'_s} \beta_{p'_s}^{-l_r} \text{Res}(f_r, g_s).$$

En utilisant que  $\prod_{i=1,\dots,l_r} c_r^i = (-1)^{l_r} \frac{\alpha_{p_r-1}}{\alpha_{p_r}}$ , et que  $\prod_{j=1,\dots,l'_s} -d_s^j = \frac{\beta_{p'_s-1}}{\beta_{p'_s}}$  on déduit :

$$C = \prod_{q_r >_w q'_s}^{r,s} (-1)^{l'_s} \left( \frac{\alpha_{p_r-1}}{\alpha_{p_r}} \right)^{l'_s}, \quad D = \prod_{q_r <_w q'_s}^{r,s} \left( \frac{\beta_{p'_s-1}}{\beta_{p'_s}} \right)^{l_r}. \quad \blacksquare$$

**Exemple 1** Considérons le polynôme  $F = U^4V^2Y^5 + U^3V^2Y^2 - Y + U^2V + V^2$ . Le discriminant du polynôme  $F$  par rapport à  $Y$  est

$$\begin{aligned} \Delta_Y F &= 108U^{25}V^{15} + 3125U^{24}V^{12} + 108U^{23}V^{16} + 12500U^{22}V^{13} \\ &\quad - 2250U^{22}V^{12} + 18750U^{20}V^{14} - 4500U^{20}V^{13} - 27U^{20}V^{12} \\ &\quad + 12500U^{18}V^{15} - 2250U^{18}V^{14} + 1600U^{17}V^9 + 3125U^{16}V^{16} \\ &\quad + 1600U^{15}V^{10} - 256U^{12}V^6 \\ &= U^{12}V^6 \varepsilon \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  est une unité de l'anneau  $\mathbb{C}\{S_\Delta\}$ , où  $\Delta = \text{pos}\{(-2, 5), (2, -1)\}$ . Nous allons montrer de deux manières qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $F$  se décompose dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$ .

**1.** D'abord, on définit  $G := U^6V^8F(U^{-2}V^{-2}) = Y^5 + U^5V^6Y^2 - U^4V^6Y + U^8V^9 + U^6V^{10}$  et on vérifie que  $G \in \mathbb{C}\{S_\Delta\}[Y]$  et que  $G(z_\Delta, Y) = Y^5$ . Comme le discriminant de  $F$  est une unité dans  $\mathbb{C}\{S_\Delta\}$  par le théorème 1, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $G$  se décompose dans  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$  et donc  $F$  se décompose dans  $\mathbb{C}\{\{\frac{1}{k}S_\Delta\}\}$ .

**2.** Le polynôme  $F$  vérifie la condition discriminantale donc on a  $\mathcal{N}_\Delta(U^4V^2(U^2V + V^2)\Delta_Y F) = \mathcal{Q}_\Delta(F)$ . Le  $\Delta$ -polyèdre-fibre  $\mathcal{Q}_\Delta(F)$  a deux sommets correspondant aux chemins monotones cohérents  $(\gamma_i)_{i=1,2}$ . Le premier,  $\gamma_1$ , correspondant aux termes  $U^4V^2Y^5, Y, V^2$  et définissant le sommet  $2 \int \gamma_1 = (8, 10)$  du polyèdre  $\mathcal{Q}_\Delta(F)$ . Le deuxième  $\gamma_2$ , correspondant à  $U^4V^2Y^5, Y, U^2V$  et définissant le sommet  $2 \int \gamma_2 = (8, 9)$ . L'éventail associé est la subdivision de  $\Delta$  par les cônes  $\sigma_1 = \text{pos}\{(2, -1), (1, 2)\}$ , et  $\sigma_2 = \text{pos}\{(-2, 5), (1, 2)\}$ . Fixons un vecteur irrationnel  $w \in \Delta$ . Si  $w \in \sigma_1$ , (resp.  $w \in \sigma_2$ ), il détermine le chemin  $\gamma_1$ , (resp.  $\gamma_2$ ).

Les 4 racines de  $F$  correspondant au segment  $e = [(4, 2, 5), (0, 0, 1)]$  de  $\gamma_1$  (resp. de  $\gamma_2$ ) par le théorème 2 ont un terme d'exposant  $(-1, -\frac{1}{2})$ . On définit  $F_2 = F(Y + \lambda U^{-1}V^{-1/2})$

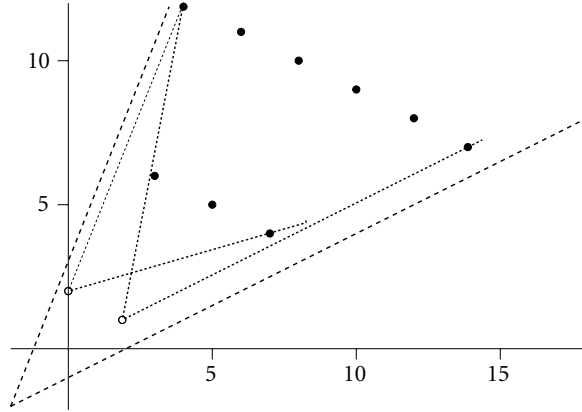


Figure 1: Les sommets noirs sont les exposants de  $F_3^{(1)}(U, V, 0)$

où  $\lambda^4 = 1$ .

$$\begin{aligned} F_2 := & Y^5 U^4 V^2 + 5\lambda Y^4 U^3 V^{3/2} + 10\lambda^2 Y^3 U^2 V + Y^2 U^3 V^2 \\ & + 10\lambda^3 Y^2 U V^{1/2} + 2\lambda Y U^2 V^{3/2} + 5Y - Y \\ & + U^2 V + \lambda^2 U V + \lambda U^{-1} V^{-1/2} - \lambda U^{-1} V^{-1/2} + V^2. \end{aligned}$$

Par la preuve du théorème 2 les exposants des racines correspondant à  $e$  sont dans le cône affine de sommet  $\pi_e(e) = (-1, \frac{-1}{2})$  qui contient les exposants de  $\pi_e(\mathcal{N}_\Delta(F_2))$  c'est-à-dire le cône  $(-1, \frac{-1}{2}) + \text{pos}\{(2, 3), (2, 1)\}$ . Comme le cône  $\text{pos}\{(2, 3), (2, 1)\}$  est contenu dans  $\Delta^\vee$ , ces racines sont des éléments de  $\mathbb{C}\{\frac{1}{2}S_\Delta\}$ .

Par ailleurs,  $F(0, Y) = -Y$ , et en appliquant le théorème des fonctions implicites, il existe un unique  $\phi \in \mathbb{C}\{U, V\}$  tel que  $F(\phi) = 0$ . Clairement,  $\phi$  doit coïncider avec la série correspondant au segment  $[(0, 0, 1), (0, 2, 0)]$  déterminé par  $w \in \sigma_1$  (resp. au segment  $[(0, 0, 1), (0, 1, 2)]$  déterminé par  $w \in \sigma_2$ ).

Pour  $w \in \sigma_1$ , on définit  $F_2^{(1)} := F(Y + V^2)$  et on remarque que le terme initial par la valuation  $w$  de  $F_2^{(1)}(0) = U^4 V^{12} + U^3 V^6 + U^2 V$  est  $U^2 V$ . On définit  $F_3^{(1)} := F_2^{(1)}(Y + U^2 V) = F(Y + V^2 + U^2 V)$ . On sait que les exposants de la série  $\phi - V^2$  sont dans le cône affine de sommet  $(2, 1)$  qui contient les exposants de

$$\begin{aligned} F_3^{(1)}(0) = & U^3 V^6 + 2U^5 V^5 + U^7 V^4 + U^4 V^{12} + 5U^6 V^{11} \\ & + 10U^8 V^{10} + 10U^{10} V^9 + 5U^{12} V^8 + U^{14} V^7. \end{aligned}$$

C'est-à-dire le cône  $(2, 1) + \text{pos}\{(1, 5), (2, 1)\}$ .

(Pour  $w \in \sigma_2$ , on définit  $F_2^{(2)} = F(Y + U^2 V)$ , on vérifie que  $F_3^{(2)} = F_2^{(2)}(Y + V^2) = F(Y + V^2 + U^2 V) = F_3^{(1)}$ , et que les exposants de la série construit  $\phi - U^2 V$  sont dans le cône affine  $(0, 2) + \text{pos}\{(2, 5), (7, 2)\}$ .)

On obtient que les exposants de  $\phi$  sont dans le cône affine  $(-2, -2) + \text{pos}\{(2, 5), (1, 2)\}$ . Comme le cône  $\Delta^\vee = \text{pos}\{(2, 5), (1, 2)\}$  la série  $\phi$  est dans l'anneau  $\mathbb{C}\{\{S_\Delta\}\}$ . (Voir la figure 1.)

Pendant la préparation de ce travail, l'auteur a bénéficié du soutien de la DGUI du gouvernement des Iles Canaries, et de l'hospitalité du DMI de l'ENS de Paris.

## Références

- [1] S. S. Abhyankar, *On the ramification of algebraic functions*. Amer. J. Math. **77**(1955), 575–592.
- [2] M. E. Alonso, I. Luengo et M. Raimondo, *An Algorithm on Quasi-Ordinary Polynomials*. LNCS (Proc. AAECC-6) **357**, Springer-Verlag, 1989, 59–73.
- [3] L. J. Billera et B. Sturmfels, *Fiber Polytopes*. Ann. Math. **135**(1992), 527–549.
- [4] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*. Ann. of Math. Stud. **131**, Princeton University Press, 1993.
- [5] ———, *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1995.
- [6] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov et A. V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multi-Dimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [7] L. Kaup et B. Kaup, *Holomorphic Functions of Several Complex Variables*. de Gruyter Stud. Math. **3**, 1983.
- [8] J. Lipman, *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. Amer. Math. Soc. (388) **74**(1988), 1–107.
- [9] J. McDonald, *Fiber Polytopes and fractional power series*. J. Pure Appl. Algebra. **104**(1995), 213–233.
- [10] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Ann. of Math. Stud. **131**, Springer-Verlag, 1988.
- [11] O. Zariski et P. Samuel, *Commutative Algebra, I*. Springer-Verlag, 1975.

Université de Paris VII-Denis Diderot  
 Institut de Mathématiques  
 2, place Jussieu  
 75251 Paris cedex 05  
 France  
 email: gonzalez@math.jussieu.fr