BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 58A05, 17B65
VOL. 38 (1988) [465–472]

UNE CARACTÉRISATION DU FIBRÉ COTANGENT

TONG VAN DUC

We prove that the Lie algebra of infinitesimal automorphisms of the cotangent structure on the total space of the cotangent bundle of a manifold is isomorphic to the semi-direct product of the Lie algebra of the vector fields on the manifold by the space of closed 1-forms, the vector fields operating on the forms by Lie derivation. The derivations of this algebra Lie are completely determined and we prove that it characterises the cotangent bundle.

DÉFINITION: On appellera *groupe cotangent*, le sous-groupe de $GL(2n,\mathrm{R})$ dont les éléments sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & {}^tA^{-1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

où $A \in GL(n,\mathrm{R})$ et ${}^tAB = {}^tBA$.

DÉFINITION: Une structure presque-cotangente sur une variété est une G-structure dont le groupe structural est le groupe cotangent. Une structure cotangente est une structure presque cotangente intégrable.

Soit N une variété différentiable munie d'une structure presque-cotangente et soit $(\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^{2n})$ une cobase adaptée à cette G-structure. Il existe sur N deux extensions de cette structure : la première est la structure presque-symplectique définie par la 2-forme $\Omega = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \cap \theta^{i+n}$ et la deuxième est déterminée par la distribution définie par $\theta^1 = \mathrm{c^{te}}, \dots, \theta^n = \mathrm{c^{te}}$ [2].

Soit M une variété différentiable connexe, paracompacte de dimension n . Tous les objets considérés sont supposés de classe C^∞ .

Soit (T^*M, p, M) le fibré cotangent de la variété M . Si (U, x^i) $(i, j, \dots = 1, \dots, n)$ est une carte locale de M , on désigne par (x^i, y_i) les coordonnées canoniques de T^*M dans l'ouvert $p^{-1}(U)$. Si $\left(U', x^{i'}\right)$ est une autre carte locale de M telle que $U \cap U' \neq \emptyset$, alors la matrice jacobienne des changements de coordonnées est de la forme (1) où

$$A = \left[\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right] \quad \text{et} \quad B = \left[\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} y_i \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k}\right]$$

Received 14 March 1988

Copyright Clearance Centre, Inc. Serial-fee code: 0004-9729/88 $A2.00+0.00.

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

Ainsi, l'espace total du fibré cotangent est muni d'une structure cotangente. Cette structure est subordonnée à la structure symplectique définie par la différentielle extérieure de la forme de Lionville $\theta = \sum_{i=1}^{n} y_i dx^i$ et à la G-structure définie par le feuilletage lagrangien dont les feuilles sont les fibres du fibré cotangent. La structure cotangente est l'intersection de ces deux structures.

Soient X un champ de vecteurs sur M , (φ_t) son groupe local à un paramètre, alors ${}^t(\varphi_{t*}^{-1})$ est un groupe local à un paramètre sur T^*M dont le champ de vecteurs associé $\widetilde{X}$ est appelé relèvement de X .

Si $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\widetilde{X}$ a pour expression locale :

$$\widetilde{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} y_j \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

Puisque le fibré vertical VT^*M de T^*M est isomorphe à $T^*M \underset{M}{\times} T^*M$, toute section ω de T^*M induit une section ω^v de VT^*M , appelée relèvement vertical de ω .

Si $\omega = a_i dx^i$, on a $\omega^v = a_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$.

Soit C le champ canonique sur T^*M ; C a pour expression locale $C = y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$.

PROPOSITION 1. *On a :*

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\widetilde{X, Y}] , \quad [\widetilde{X}, \omega^v] = (L_X \omega)^v$$
$$[\omega^v, \omega'^v] = 0 , \quad [C, \widetilde{X}] = 0 , \quad [C, \omega^v] = -\omega^v$$
$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \text{ et } \forall \omega, \omega' \in \mathcal{X}^*(M) .$$

PREUVE: Utiliser, par exemple, les expressions locales de X, X', ω et ω' . ∎

Soit L l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de la structure cotangente sur T^*M .

Soit $A = A^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + A_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ un élément de L . Le fait que A est un champ symplectique se traduit par

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} , \quad \frac{\partial A^i}{\partial y_j} = \frac{\partial A^j}{\partial y_i} , \quad \frac{\partial A_i}{\partial y_j} = -\frac{\partial A^j}{\partial x^i} .$$

D'autre part, comme A est un automorphisme infinitésimal du feuilletage défini par les fibres du fibré cotangent, on a $\dfrac{\partial A^i}{\partial y_j} = 0$. On en déduit que les éléments de L sont de la forme :

$$A = A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(-\frac{\partial A^j}{\partial x^i} y_j + \omega_i(x) \right) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

où les ω_i sont soumises à la condition

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} .$$

Autrement dit, $\omega_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ est le relèvement vertical d'une 1-forme fermée sur M .

Ainsi les éléments de L sont projetables sur M et on a un morphisme surjectif d'algèbres de Lie q de L sur $\widetilde{\mathcal{X}(M)}$ défini par $q(A) = \left(\widetilde{p_* A}\right)$ $\forall A \in L$. D'où la suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow Z^1(M)^v \longrightarrow L \xrightarrow{q} \widetilde{\mathcal{X}(M)} \longrightarrow 0$$

où $Z^1(M)^v$ désigne le relèvement vertical de l'espace $Z^1(M)$ des 1-formes fermées sur M .

THÉORÈME 1. $L = \widetilde{\mathcal{X}(M)} \oplus Z^1(M)^v$.

On déduit de la proposition 1 et du théorème 1 le :

THÉORÈME 2. *L est isomorphe au produit semi-direct de l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$ par l'espace vectoriel $Z^1(M)$ des 1-formes fermées, les champs de vecteurs opérant sur les 1-formes par dérivations de Lie.*

On rappelle que le crochet dans $\mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$ est défini de la façon suivante :

$$[(X,\omega),(X',\omega')] = ([X,X'], L_X\omega' - L_{X'}\omega)$$

$\forall X, X' \in \mathcal{X}(M)$ et $\forall \omega, \omega' \in Z^1(M)$.

On va maintenant étudier les dérivations de l'algèbre de Lie L .

Soit D une dérivation de L identifiée à $\mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$. Alors, il existe des applications $\mathbf{R}$-linéaires P, Q, R, S telles que :

$$D((X,\omega)) = (P(X) + Q(\omega), R(X) + S(\omega))$$

pour tout couple $(X,\omega) \in \mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$.

Le fait que D est une dérivation implique que P, Q, R, S sont des solutions des équations suivantes :

1) $P([X,Y]) = [P(X),Y] + [X,P(Y)]$;
2) $Q(L_X\omega) = [X, Q(\omega)]$;
3) $L_{Q(\omega)}\omega' = L_{Q(\omega')}\omega$;
4) $R([X,Y]) = L_X(R(Y)) - L_Y(R(X))$;
5) $S(L_X\omega) = L_{P(X)}\omega + L_X(S(\omega))$.

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

L'équation 1) montre que P est une dérivation de $\mathcal{X}(M)$. Il existe donc un champ de vecteurs X_0 sur M tel que $P(X) = [X_0, X]$ $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ ([8]).

Les équations 2), 4) et 5) montrent que Q, R, S sont des opérateurs locaux.

Si l'on pose $Q(dx^i) = Q^{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et si l'on choisit $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ et $\omega = dx^i$, l'équation 2) montre que Q^{ij} sont des constantes ; pour $X = x^l\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = dx^i$, l'équation 3) devient : $Q^{lj}\dfrac{\partial}{\partial x^j} = -Q^{il}\dfrac{\partial}{\partial x^l}$; d'où $Q^{lj} = 0$ si $j \neq l$ et $Q^{ll} = -Q^{ll}$ $\forall i$; par suite $Q(dx^i) = 0$.

Si l'on pose $Q(x^j dx^i + x^i dx^j) = Q^{jih}\dfrac{\partial}{\partial x^h}$, pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, $\omega = x^j dx^i + x^i dx^j$, puisque $Q(dx^i) = 0$, l'équation 2) implique que $\dfrac{\partial Q^{jih}}{\partial x^l} = 0$. Pour $\omega = x^j dx^i + x^i dx^j$ et $\omega' = x^k dx^l + x^l dx^k$ l'équation 3) devient :

$$Q^{jik} dx^l + Q^{jil} dx^k = Q^{klj} dx^i + Q^{kli} dx^j .$$

Si l'on choisit $i = j = k \neq l$, on trouve $Q^{iii} = 0$ et $Q^{iil} = 2Q^{ili}$. Pour $i = j \neq k = l$, on trouve $Q^{iik} = 0$, par suite $Q^{iki} = 0$. Si $i = k \neq l = j$, on trouve $Q^{jii} = 0$ et $Q^{ijj} = 0$. Donc $Q^{ijk} = 0$, si deux des trois indices sont égaux. Enfin, pour $i \neq j \neq k = l$, on trouve $Q^{jik} = 0$. De même, si l'on considère des 1-formes fermées de type $\omega = \mathcal{S}x^{i_1} \dots x^{i_l} dx^{i_{l+1}}$ $(l > 1)$ où $\mathcal{S}$ désigne la sommation portant sur les permutations circulaires de $i_1, \dots, i_{l+1}$, un raisonnement par récurrence montre que $Q \equiv 0$ sur $Z^1(M)$.

L'opérateur différentiel R est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathcal{X}(M)$ dans $Z^1(M)$ vérifiant l'équation :

$$R([X,Y]) = L_X(R(Y)) - L_Y(R(X)) . \tag{4}$$

Puisque R est local, on va se restreindre à des cartes locales (U, x^i) où U est contractile.

Si l'on pose $R(\dfrac{\partial}{\partial x^i}) = df_i$ où f_i sont des fonctions différentiables définies sur U , pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial y^k}$, on trouve $d\Big(\dfrac{\partial f_k}{\partial x^j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial x^k}\Big) = 0$. Soit $C_{kj} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial x^k}$; on a : $C_{kj} = -C_{jk}$. Si l'on pose $\alpha = f_i dx^i + C_{ij} x^i dx^j$, alors α est une 1-forme fermée.

Soit $H : \mathcal{X}(M) \to Z^1(M)$ définie par :

$$H(X) = R(X) - L_X \alpha .$$

Alors H vérifie la même équation que R :

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

$$H([X,Y]) = L_X(H(Y)) - L_Y(H(X)) \,. \tag{6}$$

De plus, $H\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big) = 0$.

Si l'on pose $H\Big(x^i \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big) = df^i_j$, pour $X = x^j \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, on trouve $d\Big(\dfrac{\partial f^j_k}{\partial x^l}\Big) = 0$, donc $\dfrac{\partial f^j_k}{\partial x^l}$ sont des constantes.

Pour $X = x^i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $Y = x^k \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, l'équation 6) devient :

$$\delta^k_j df^i_l - \delta^l_i df^k_j = \frac{\partial f^k_l}{\partial x_j} dx^i - \frac{\partial f^i_j}{\partial x^l} dx^k \,.$$

Pour $i = j = k \neq l$, on trouve $\dfrac{\partial f^i_l}{\partial x^m} = 0$ si $m \neq i$ et $\dfrac{\partial f^i_i}{\partial x^l} = 0$. Ainsi, $\forall l$, $\dfrac{\partial f^i_l}{\partial x^m} = 0$ si $m \neq i$. Pour $i = l$, $j \neq k$, on obtient $\dfrac{\partial f^k_j}{\partial x^l} = \dfrac{\partial f^i_j}{\partial x^i}$. Soit C^j_{jj} la valeur commune des $\frac{\partial f^i_j}{\partial x^i}$ et soit $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} C^i_{ii} dx^i$. Alors $H\Big(x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big) = L_{x^i \frac{\partial}{\partial x_j}}(\beta)$.

Soit G l'opérateur défini par $G(X) = H(X) - L_X\beta$. Alors G vérifie la même équation que H :

$$G([X,Y]) = L_X(G(Y)) - L_Y(G(X)) \,. \tag{7}$$

De plus, on a : $G\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big) = G\Big(x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j}\Big) = 0$. Un raisonnement par récurrence montre encore que $G \equiv 0$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on pose $\omega_0 = -(\alpha + \beta)$, alors $R(X) = -L_X \omega_0$.

Puisque $P(X) = [X_0, X]$, l'application S de $Z^1(M)$ dans lui-même vérifie l'équation :

$$S(L_X\omega) = L_{[X_0,X]}\omega + L_X(S(\omega)) \,. \tag{8}$$

Si l'on pose $S(dx^i) = dg^i$ et $X_0 = X^i_0 \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ et $\omega = dx^i$ on trouve $d\Big(\dfrac{\partial g^i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial X^i_0}{\partial x^j}\Big) = 0$; par suite $S(dx^i) = dX^i_0 + C^i_j dx^j$ où C^i_j sont des constantes ; pour $X = x^k \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $\omega = dx^i$, l'équation 8) devient :

$$\delta^i_j(dX^k_0 + C^k_l dx^l) = \delta^i_j dX^k_0 + C^i_j dx^k \,.$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

Ainsi $C_l^i = 0$ si $l \neq i$ et $C_i^i = C_k^k$. Soit k la valeur commune des C_i^i et soit T l'application de $Z^1(M)$ dans lui-même définie par :

$$T(\omega) = S(\omega) - L_{X_0}\omega - k\omega \, .$$

Alors T vérifie l'équation :

$$T(L_X\omega) = L_X(T(\omega)) \, . \tag{9}$$

T est un opérateur local et on a $T(dx^i) = 0$.

Si l'on pose $T(x^i dx^j + x^j dx^i) = dh^{ij}$, on a $h^{ij} = h^{ji}$. Pour $\omega = x^i dx^j + x^j dx^i$ et $X = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, on trouve $d\left(\dfrac{\partial h^{ij}}{\partial x^k}\right) = 0$. Pour $\omega = x^i dx^j + x^j dx^i$, $X = x^k \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, l'équation 9) devient :

$$T\left(x^k \delta_l^i dx^j + x^i \delta_l^j dx^k + x^k \delta_l^j dx^i + x^j \delta_l^i dx^k\right) = \frac{\partial h^{ij}}{\partial x^l} dx^k \, .$$

En faisant $i = j = l$, on trouve $4dh^k = \dfrac{\partial h^{ii}}{\partial x^i} dx^k$. Ainsi si $m \neq k$, $\dfrac{\partial h^{ki}}{\partial x^m} = 0$ et $2\dfrac{\partial h^{ki}}{\partial x^k} = \dfrac{\partial h^{ii}}{\partial x^i}$; par suite $\dfrac{\partial h^{ki}}{\partial x^k} = 0$ et $T(x^i dx^j + x^j dx^i) = 0$. En procédant de nouveau comme pour Q , on trouve $T \equiv 0$. Donc $S(\omega) = L_{X_0}\omega + k\omega$.

Comme P, Q, R, S sont des opérateurs locaux, il en est de même de D et on vient de montrer que, pour tout domaine contractile U d'une carte locale, il existe une forme ω_{0_U} et une constante k_U telles que pour tout couple $(X,\omega) \in \mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$, la restriction D_U de D à U soit donnée par :

$$D_U(X_U, \omega_U) = \left([X_0, X]_U, L_{X_U}\omega_{0_U} - L_{X_{0_U}}\omega_U - k_U\omega_U\right) \, .$$

On en déduit que sur $U \cap V \neq \emptyset$ où V est le domaine d'une autre carte locale :

$$L_{X_{U\cap V}}(\omega_{0_U} - \omega_{0_V}) - (k_U - k_V)\omega_{U\cap V} = 0$$

pour tout couple $(X,\omega) \in \mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$, ce qui montre que $\omega_{0_U} = \omega_{0_V}$ et $k_U = k_V$.

Ainsi, pour toute dérivation D de $\mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$, il existe $(X_0, \omega_0) \in \mathcal{X}(M) \times Z^1(M)$ et une constante k telle que :

$$D(X,\omega) = ([X_0, X], L_{X_0}\omega - L_X\omega_0 + k\omega) \, .$$

Il est facile de voir que le triplet ainsi déterminé est unique.

En vertu de la proposition 1 et du théorème 1, on a le :

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 3. *Pour toute dérivation D de L, il existe un élément unique A_0 de L et une constante unique k telle que, $\forall A \in L$, $D(A) = [A_0 + kC, A]$; le premier espace de cohomologie de Chevalley $H_1(L; L)$ de L a pour dimension un.*

On va désigner par D_k les dérivations de L de la forme :

$$D_k = ad\left(\widetilde{X}_0 + \omega_0^v + kC\right) .$$

Si l'on cherche les dérivations D_k telles que $D_k \circ D_k = lD_k$, alors :

1) si $l = 0$, il vient : $X_0 = 0$ et $k = 0$; d'où $D_0 = ad(\omega_0^v)$;
2) si $l \neq 0$, il vient : $X_0 = 0$ et $l = -k$; d'où $D_k = ad(\omega_0^v + kC)$.

Les dérivations $ad(\omega_0^v + kC)$ ont pour valeur propre 0 et $-k$. L'espace propre associé à la valeur propre $-k$ est $Z^1(M)^v$.

Soient L et L' les algèbres de Lie des automorphismes infinitésimaux des structures cotangentes sur les fibrés cotangents de deux variétés M et M' et soit φ un isomorphisme de L sur L'. D'après l'étude faite sur les espaces propres des dérivations de L, φ induit un isomorphisme de $Z^1(M)^v$ sur $Z^1(M')^v$ et par suite un isomorphisme de $L/Z^1(M)^v = \widetilde{\mathcal{X}(M)}$ sur $L'/Z^1(M')^v = \widetilde{\mathcal{X}(M')}$. Donc les variétés M et M' sont difféomorphes [**1**] ; d'où le :

THÉORÈME 4. *Si les algèbres de Lie des automorphismes infinitésimaux des structures cotangentes sur les fibrés cotangents de deux variétés sont isomorphes, les deux fibrés cotangents sont isomorphes.*

On peut démontrer le théorème 4 d'une autre façon. D'après la proposition 1, $Z^1(M)^v$ est un idéal abélien de L. De plus, c'est le plus grand idéal abélien de L. En effet, soit J un idéal abélien quelconque de L. L'image de J par le morphisme $q : L \to \widetilde{\mathcal{X}(M)}$ est un idéal abélien de $\widetilde{\mathcal{X}(M)}$ qui est isomorphe à $\mathcal{X}(M)$. Or $\mathcal{X}(M)$ n'a pas d'idéal abélien. Si φ est un isomorphe de L sur L', alors φ envoie $Z^1(M)^v$ sur $Z^1(M')^v$ et on conclut comme précédemment.

REFERENCES

[1] I. Amemia, 'Lie algebra of vector fields and complex structure', *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 545–549.

[2] R.S. Clard and R.S. Goel, 'Almost cotangent manifolds', *J. Differential Geom.* **9** (1974), 227–242.

[3] T.V. Duc, 'Tenseur covariant canonique sur le fibré cotangent d'ordre 2', *Bull. Sci. Math. (2)* **110** (1986), 289–301.

[4] T.V. Duc, 'Algèbre de Lie attachée à la structure presque-tangente', *Geom. Dedicata* **23** (1987), 347–352.

[5] T.V. Duc, 'Algèbre de Lie attachée à la forme canonique sur le fibré des repères transverses', *J. Math. Pures Appl.* **66** (1987), 265–271.

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press

[6] A. Lichnerowicz, 'Fibrés vectoriels, structures unimodulaires exactes et automorphismes infinitésimaux', *J. Math. Pures Appl.* **56** (1977), 183–204.

[7] T. Nagano, '1-forms with the exterior derivative of maximal rang', *J. Differential Geom.* **2** (1968), 251-264.

[8] F. Takens, 'Derivations of vector fields', *Compositio Math* **26** (1973), 95–99.

Laboratoire de Mathématiques
Université de Grenoble I
38402 Saint-Martin-d'Heres
Cedex, France

https://doi.org/10.1017/S0004972700027854 Published online by Cambridge University Press