Canad. Math. Bull. Vol. **45** (3), 2002 pp. 355–363

Obstruction à la linéarisation des champs de vecteurs polynomiaux

Jacky Cresson

Résumé. On explicite une classe de champ de vecteurs polynomiaux non analytiquement linéarisables à l'aide de la correction introduite par Écalle-Vallet. Notamment, on étend des résultats de Schuman sur la trivialité des hamiltoniens homogènes isochrones.

Abstract. We characterize a class of polynomial vector fields which are not analytically linearizable using the correction introduced by Écalle-Vallet. Then, we extend Schuman's result about non existence of isochronous homogenous Hamiltonian systems.

1 Introduction

On considère les champs de vecteurs polynomiaux dans $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$X = \xi\left(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + P(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \overline{P(z,\bar{z})}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{1}$$

où $\xi^2 = -1$, $z \in \mathbb{C}$ avec $P(z,\bar{z}) = \sum_{d \geq i+j \geq 2} a_{i,j} z^i \bar{z}^j$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, $d \geq 2$.

Dans cette note, on décrit, à l'aide de la *correction* introduite par Écalle et Vallet [4], une classe de champ de vecteurs non analytiquement linéarisables. Précisément, on appelle champ de "Darboux" un champ de la forme (1) tel que

$$\forall n \geq 2, \quad a_{i,n-i} = \frac{i}{n-i+1}\bar{a}_{n-i+1,i-1}, \quad \text{pour } i = 1,\dots,n.$$

On a:

Théorème 1 *Soit $X = \xi(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + P(z,\bar{z})\partial_z + \overline{P(z,\bar{z})}\partial_{\bar{z}}$, une perturbation de valuation $n \geq 2$ d'un centre.*

i) *si il existe $N \geq n$ tel que $a_{l,l-1} = 0$, pour tout $l < N$ et $\mathrm{Im}(a_{N,N-1}) > 0$, alors il n'existe pas de centre de "Darboux" linéarisables.*
ii) *si $a_{l,l-1} = 0$, pour tout $l \geq n$, alors les centres de "Darboux" linéarisables sont triviaux.*

Ce théorème étend les résultats de Schuman ([6], [7]), de façon constructive.

Théorème 2 *Soit $X = \xi(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + P(z,\bar{z})\partial_z + \overline{P(z,\bar{z})}\partial_{\bar{z}}$, une perturbation de valuation $n \geq 2$ d'un centre.*

Reçu par la rédaction le January 15, 2001.
Classification (AMS) par sujet: 34D10, 34D30.
Mots clés: linéarisation-problème du centre-hamiltonien-darboux-champs polynomiaux.

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-038-8 Published online by Cambridge University Press

i) *si il existe* $N \geq n$ *tel que* $a_{l,l-1} = 0$, *pour tout* $l < N$ *et* $\mathrm{Im}(a_{N,N-1}) > 0$, *alors il n'existe pas de centre de Hamiltonien linéarisables.*
ii) *si* $a_{l,l-1} = 0$, *pour tout* $l \geq n$, *alors les centres de Hamiltonien linéarisables sont triviaux.*

La correction d'Écalle-Vallet donne une approche unifiée et effective pour étudier la linéarisation des champs de vecteurs résonnants. De plus, les champs Hamiltoniens ou de Darboux font partie des champs de vecteurs *à dépendance linéaire*, introduits dans cette note (voir Section 4). Les théorèmes 1 et 2 découlent alors d'une propriété générale d'obstruction des champs de vecteurs à dépendance linéaire (Proprosition 1, Section 4).

Comme corollaire du théorème 2, on retrouve le résultat principal de [6]:

Corollaire 1 *Si P est un polynôme homogène de degré n, il ne peut exister de centre isochrone hamiltonien autre que dans le cas linéaire.*

La démonstration est donnée au Section 4.

Pour des perturbations homogènes de degré 2 ou 3, ce résultat suggère d'étudier la stratification isochrone des centres reversibles explicités dans [1].

2 La correction

2.1 Définition et propriétés

2.1.1 Notations

Soit X un champ de vecteurs de $\mathbb{C}^k$ de la forme

$$X = X_{\text{lin}} + \sum_m B_m,$$

où $X_{\text{lin}} = \lambda x \partial_x$, $x \in \mathbb{C}^k$, $\lambda \in \mathbb{C}^k$ et les B_m sont des opérateurs différentiels homogènes de degré $m \in \mathbb{Z}^k$, *i.e.* $B_m \cdot x^\nu = \beta_{m\nu} x^{m+\nu}$ où $\nu \in \mathbb{N}^k$, $\beta_{m\nu} \in \mathbb{C}$.

Exemple Soit $X(z, \bar{z})$ un champ de vecteurs de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$X(z, \bar{z}) = \lambda z \partial_z + \beta \bar{z} \partial_{\bar{z}} + (a_{20} z^2 + a_{11} z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2)\partial_z + (b_{20} z^2 + b_{11} z\bar{z} + b_{02}\bar{z}^2)\partial_{\bar{z}}.$$

On pose $B_{1,0} = a_{20} z^2 \partial_z + b_{11} z\bar{z} \partial_{\bar{z}}$, $B_{0,1} = a_{11} \bar{z} z \partial_z + b_{02} \bar{z}^2 \partial_{\bar{z}}$, $B_{-1,2} = a_{02} \bar{z} \partial_z$, $B_{2,-1} = b_{20} z^2 \partial_{\bar{z}}$. Alors, on a $X = \lambda z \partial_z + \beta \bar{z} \partial_{\bar{z}} + B_{1,0} + B_{0,1} + B_{-1,2} + B_{2,-1}$.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de ces degrés. Pour tout $M \in \mathcal{M}$ on associe un poids $\omega = M \cdot \lambda$. Un élément $M = (M_1, \dots, M_r)$ s'appelle une *suite*. On note $S_{\mathcal{M}}$ l'ensemble de ces suites. Pour tout $M \in S_{\mathcal{M}}$, $M = (M_1, \dots, M_r)$ on associe un vecteur poids $\omega(M) = (\omega_1, \dots, \omega_r)$. Pour tout $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ on note $\|\omega\| = \omega_1 + \cdots + \omega_r$ sa norme et $l(\omega) = r$ sa longueur.

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-038-8 Published online by Cambridge University Press

2.1.2 La correction

Soient A et B deux champs de vecteurs. On note $A \sim B$ si A est formellement conjugué à B.

La *correction*, notée X^{carr}, est le champ de vecteur solution du problème suivant (voir [4]): *Trouver un champ de vecteur Z tel que $X - Z \sim X_{\text{lin}}$ et $[X_{\text{lin}}, Z] = 0$.*

Une carte étant fixée, et le couple (X, X_{lin}) étant donné, la correction est unique.

La correction possède un développement *moulien* (voir [4], [3])

$$X^{\text{carr}} = \sum \operatorname{Carr}^{\omega} B_M,$$

où $M = (M_1, \dots, M_r)$, $M_i \in \mathcal{M}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, $\omega_i = M_i \cdot \lambda$, $r \geq 2$ et $\operatorname{Carr}^{\omega}$ est un coefficient complexe, appelé *moule*, tel que $\operatorname{Carr}^{\omega} = 0$ si $\|\omega\| \neq 0$, et

$$\sum_{M^* = (M_1, \dots, M_r)} \operatorname{Carr}^{\omega} B_M = \frac{1}{r} \sum \operatorname{Carr}^{\omega} B_{[M]},$$

où $B_{[M]} = [B_{M_r}[\cdots[B_{M_2}, B_{M_1}]\cdots]$, avec $[\cdot\,,\cdot]$ le crochet de Lie et M^* représente l'ensemble des permutations possibles de $M = (M_1, \dots, M_r)$.

La composition de deux moules $D^\bullet = M^\bullet \circ N^\bullet$ est définie par $D^\omega = \sum_{\omega^1 \cdots \omega^s = \omega, s \geq 0, \omega^i \neq \varnothing} M^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} N^{\omega^1} \cdots N^{\omega^s}$. On note $(D^\bullet)^{\circ n} = D^\bullet \circ \cdots \circ D^\bullet$, n fois. On a

$$(*) \qquad I^\bullet - \operatorname{Carr}^\bullet = \lim_{n \to \infty} (I^\bullet - M^\bullet)^{\circ n},$$

où $M^\bullet$ est un moule d'une forme *prénormale* donnée (voir [4], lemme 3.2, p. 267) et $I^{\varnothing} = 0$, $I^{\omega_1} = 1\ \forall \omega_1$, $I^{\omega_1, \dots, \omega_r} = 0\ \forall r \geq 2, \forall \omega$.

Remarque Dans la suite, nous allons travailler avec le moule $\operatorname{Tram}^\bullet$ de la forme prénormale *élaguée* (qui n'est autre que la forme normale de *Poincaré-Dulac* (voir [3], Section 11.3.2)). Diverses propriétés de $\operatorname{Tram}^\bullet$ sont données dans [1]. Il est défini par récurrence sur la longueur des suites $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, par $\operatorname{Tram}^{\omega} = (\operatorname{Sam}^\bullet)^{\circ l(\omega)}$, où $\operatorname{Sam}^0 = 1$, $\operatorname{Sam}^{\omega_1} = 0$ si $\omega_1 = 0$ et si $l(\omega) \geq 2$, $\omega_1 \neq 0, \dots, \omega_r \neq 0$, $\operatorname{Sam}^{\omega} = \frac{r-1}{r\omega_1 \cdots \omega_r} \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{i-1} \frac{\omega_i}{(i-1)!\,(r-i)!}$. Si un seul ω_i s'annule, $\operatorname{Sam}^{\omega} = \operatorname{Sam}^{\omega^1 0 \omega^2} = \frac{(-1)^{r_1}}{r_1!\, r_2!\, [\omega^1][\omega^2]}$, où $[\omega] = \omega_1 \cdots \omega_r$. Enfin, si plus d'un ω_i s'annule, alors $\operatorname{Sam}^{\omega} = 0$.

Pour la définition, par récurrence sur la longueur des suites, du moule Carr, nous renvoyons à [4]. Dans la suite, nous utilisons les formules suivantes:

$$\operatorname{Carr}^{\omega_1} = 1, \quad \operatorname{Carr}^{\omega_1, \omega_2} = \frac{-1}{\omega_1}.$$

Par définition de la correction, nous avons le critère de linéarisation suivant:

Lemme 1 *Le champ (1) est formellement linéarisable si et seulement si $X^{\text{carr}} = 0$.*

On renvoie à ([4], lemme 4.6, p. 406) pour d'autres critères.

2.2 Correction des champs de vecteurs polynomiaux

On note $\mathbb{Q}[a]$ (resp. $\mathbb{Z}[a]$) l'anneau des polynômes en les variables $a = (a_{i,j})$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Z}$). Soit $M = (M_1, \dots, M_r)$, $M_i \in \mathcal{M}$ une suite telle que $\|\omega(M)\| = 0$. Par définition des crochets de Lie, on a

$$B_{[M]} = (z\bar{z})^{d(\omega(M))}(B^1_{[M]} z\partial_z + B^2_{[M]} \bar{z}\partial_{\bar{z}}),$$

où $d\big(\omega(M)\big) \in \mathbb{N}$, avec $B^i_{[M]} \in \mathbb{Z}[a]$, $i = 1, 2$ de degré $l(M)$.

Soit $\mathcal{M}^m$ l'ensemble des suites de $\mathcal{M}$ telles que $d\big(\omega(M)\big) = m$. On note

$$\mathrm{Car}^i_m = \sum_{M \in \mathcal{M}^m} \Big(\sum_{M^*} \mathrm{Carr}^{\omega(M^*)} \, B^i_{[M^*]} \Big), \quad i = 1, 2.$$

On a $\mathrm{Car}^2_m = \overline{\mathrm{Car}^1_m}$ car le champ est réel.

Lemme 2 *La correction du champ (1) est de la forme*

$$X^{\mathrm{carr}} = \sum_{k \geq 1} (z\bar{z})^k (\mathrm{Car}_k \, z\partial_z + \overline{\mathrm{Car}_k} \bar{z}\partial_{\bar{z}}),$$

avec $\mathrm{Car}_k = U_k + \xi V_k$, U_k, $V_k \in \mathbb{Q}[a]$ *définis par*

$$(2) \qquad \begin{aligned} U_k &= \sum_{M \in \mathcal{M}^k, l(M) \text{ impair}} \sum_{M^*} \mathrm{Carr}^{\omega(M^*)} \, B^1_{[M^*]}, \\ V_k &= -\xi \sum_{M \in \mathcal{M}^k, l(M) \text{ pair}} \sum_{M^*} \mathrm{Carr}^{\omega(M^*)} \, B^1_{[M^*]} \end{aligned}$$

La démonstration repose sur le:

Lemme 3 *Le moule* $\mathrm{Carr}^\omega \in \xi\mathbb{Q}$ *si* $l(\omega)$ *est pair,* $\mathrm{Carr}^\omega \in \mathbb{Q}$ *sinon.*

Démonstration On utilise $(*)$ avec le moule $\mathrm{Tram}^\bullet$. On a donc

$$\mathrm{Carr}^\bullet = I^\bullet + \lim_{n \to \infty} (I^\bullet - \mathrm{Tram}^\bullet)^{\circ n}.$$

On sait ([1], lemme 2.1) que $\mathrm{Tram}^\omega \in \xi\mathbb{Q}$ si $l(\omega)$ est pair et $\mathrm{Tram}^\omega \in \mathbb{Q}$ sinon. On en déduit

$$(**) \qquad I^\omega - \mathrm{Tram}^\omega \in \xi\mathbb{Q} \quad (\text{resp. } \mathbb{Q}) \text{ si } l(\omega) \text{ pair (resp. impair)}.$$

On montre que $(**)$ est stable sous la loi de composition des moules.

Supposons $l(\omega) = 2m$. Si $s = 2n$ dans $(*)$, alors $(I - \mathrm{Tram})^{\|\omega^1\|, \dots, \|\omega^s\|} \in \xi\mathbb{Q}$. Comme

$$(***) \qquad l(\omega^1) + \cdots + l(\omega^s) = 2m$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-038-8 Published online by Cambridge University Press

on doit avoir un nombre pair de suites de longueur impair et donc un nombre pair de suites de longueur pair. On en déduit $(I - \mathrm{Tram})^{\omega^1} \cdots (I - \mathrm{Tram})^{\omega^s} \in \mathbb{Q}$. Si $s = 2n+1$, alors $(I-\mathrm{Tram})^{\|\omega^1\|,\dots,\|\omega^s\|} \in \mathbb{Q}$. D'après $(***)$, on doit avoir un nombre pair de suites de longueur impair, donc un nombre impair de suites de longueur pair, d'où $(I - \mathrm{Tram})^{\omega^1} \cdots (I - \mathrm{Tram})^{\omega^s} \in \xi\mathbb{Q}$. On a donc $(I - \mathrm{Tram})^{\omega} \in \xi\mathbb{Q}$.

Si $l(\omega) = 2m + 1$, un raisonnement analogue donne $(I - \mathrm{Tram})^{\omega} \in \mathbb{Q}$. Comme $I^{\omega} = 0$ si $l(\omega) \geq 2$, on a $(I - \mathrm{Carr})^{\omega} = -\mathrm{Carr}^{\omega}$ si $l(\omega) \geq 2$. On en éduit le lemme. ■

Nous avons donc $\mathrm{Car}^1_m = U_m + \xi V_m$ avec $U_m, V_m \in \mathbb{Q}[a]$ définis comme dans (2).

Une version explicite du critère de linéarisation est donc:

Lemme 4 *Le champ (1) est formellement linéarisable si et seulement si* $\mathrm{Car}_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Remarque Ce critère est *algorithmique* et peut être implémenté sur un logiciel de calcul formel comme Maple. Des critères analogues peuvent être obtenus en utilisant des formes prénormales mais les conditions sont plus complexes. Ceci est dû à l'annulation du moule Carr pour tout suite ω telle que $l(\omega) \geq 2$ avec au moins une composante nulle. Par exemple, pour une perturbation de la forme

$$P(z, \bar{z}) = a_{30}z^3 + a_{21}z^2\bar{z} + a_{12}z\bar{z}^2 + a_{03}\bar{z}^3,$$

les 3 premières conditions de linéarisation sont, dans le cas où on utilise la forme prénormale *royale* (voir [4]):

$$\mathrm{Ray}_1 = a_{21} = 0,$$

$$\mathrm{Ray}_2 = \frac{1}{4}\xi(3|a_{03}|^2 + 4|a_{12}|^2 - 4a_{12}a_{30}) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ray}_3 = -\frac{1}{16}\big(&-24\overline{a_{03}}a_{12}^2 + 8\overline{a_{03}}a_{12}\overline{a_{30}} - 11|a_{03}|^2 a_{21}\\ &+ 9|a_{03}^2 a_{21}|\overline{a_{21}} + 16\xi a_{21}\,\mathrm{Re}(a_{12})\,\mathrm{Im}(a_{30})16\xi\,\mathrm{Im}(a_{12})\,\mathrm{Re}(a_{30})\\ &- 20a_{21}|a_{12}|^2 + 4|a_{30}|^2 a_{21}\\ &+ 16\overline{a_{21}}|a_{21}a_{12}^2| + 6a_{03}a_{30}^2 - 24a_{03}a_{30}\overline{a_{12}}\\ &+ 18a_{03}\overline{a_{12}}^2\big)\\ = 0.&\end{aligned}$$

Avec la correction, nous obtenons les conditions suivantes:

$$\mathrm{Car}_1 = a_{21} = 0,$$

$$\mathrm{Car}_2 = \frac{1}{2}\xi(3|a_{03}|^2 + 4|a_{12}|^2 - 4a_{12}a_{30}) = 0,$$

$$\mathrm{Car}_3 = -\frac{1}{8}(-12\overline{a_{03}}a_{12}^2 + 4\overline{a_{03}}a_{12}\overline{a_{30}} - 12a_{03}a_{30}\overline{a_{12}} + 3a_{03}a_{30}^2 + 9a_{03}\overline{a_{12}}^2) = 0.$$

2.3 Variété des centres isochrones

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des coefficients $a_{i,j}$ et $p = \mathrm{card}(\mathcal{A})$. Pour tout $a_{i,j} \in \mathcal{A}$, il existe un unique $M \in \mathcal{M}$ tel que B_M dépend de $a_{i,j}$. On note $M_{a_{i,j}}$ cet élément. On associe à chaque coefficients $a_{i,j}$ un poids $\omega = M_{a_{ij}} \cdot \lambda$. On note $\Omega = (\omega^1, \dots, \omega^p)$ l'ensemble des poids associés aux éléments de $\mathcal{A}$.

On note T l'action de $\mathbb{C}^* \times \Omega$ sur $\mathbb{C}^p$ définie par

$$T\colon \mathbb{C}^* \times \Omega \to \mathbb{C}^p,$$
$$\big(t, (\omega^1, \dots, \omega^p)\big) \mapsto (t^{\omega^1}, \dots, t^{\omega^p}).$$

On note $\mathbb{Q}[\mathcal{A}]^T$ l'ensemble des polynômes à variables dans $\mathcal{A}$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, invariants sous l'action de T.

Lemme 5 *Pour tout $k \geq 1$, $U_k, V_k \in \mathbb{Q}[\mathcal{A}]^T$.*

Démonstration Soit $M = (M_1, \dots, M_r)$ telle que $\|\omega(M)\| = 0$. On a $T(B^i_{[M]}) = t^{\|\omega(M)\|}B^i_{[M]}$ pour $i = 1, 2$, d'où $T(B^i_{[M]}) = B^i_{[M]}$. ∎

On déduit des lemmes 4 et 5 que la variété des centres isochrones est une variété algébrique invariantes sous l'action de T. En suivant l'approche de [2], on peut obtenir des conditions non triviales de linéarisation.

3 Champs de vecteurs à dépendance linéaire

Définition 1 Le champ (1) est dit à dépendance linéaire si pour tout $n \geq 2$, il existe des constantes $q_i^n \in \mathbb{R}$ telles que $a_{i,n-i} = q_i^n \bar{a}_{n-i+1,i-1}$, pour $i = 1, \dots, n$.

Par exemple, les champs hamiltoniens sont à dépendance linéaire avec $q_i^n = -\frac{n-i+1}{i}$. Par abus de langage, nous appellerons champs de "Darboux" des champs à dépendance linéaire avec $q_i^n = \frac{i}{n-i+1}$. Pour une perturbation de degré $n = 2$ ou 3 homogène, on retrouve une partie des conditions dites de Darboux [5].

Lemme 6 *Soit $X = \xi(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + P(z,\bar{z})\partial_z + \overline{P(z,\bar{z})}\partial_{\bar{z}}$, un champ à dépendance linéaire, où P est un polynôme de valuation $n \geq 2$, alors*

$$\mathrm{Car}_{n-1} = a_{n,n-1} + \xi\Big(\sum_{i=[\frac{n+1}{2}]}^{n} \alpha_i^n |a_{i,n-i}|^2 + \frac{2n}{n+1}|a_{0,n}|^2\Big),$$

où $\alpha_i^n = \frac{1}{2i-n-1}(q_i^n - 1)(iq_i^n + n - 1 - i)$, $i = [n + 1/2] + 1, \dots, n$, *et si* $n = 2k$ *alors* $\mathrm{Car}_l = 0$ *pour* $l < n - 1$ *et si* $n = 2k + 1$, $\mathrm{Car}_k = a_{k+1,k}$, $\mathrm{Car}_l = 0$ *pour* $l < n - 1$, $l \neq k$.

Démonstration Les composantes homogènes d'ordre n d'un champ à dépendance linéaire sont $B_{(i-1,n-i)} = a_{i,n-i} z^{i-1} \bar{z}^{n-i} [z\partial_z + q_i^n \bar{z}\partial_{\bar{z}}]$, avec $q_i^n \in \mathbb{R}$, pour $i = [\frac{n+1}{2}] + 1$ à n. Le poids de $B_{(i-1,n-i)}$ est $\omega_i = \xi(2i - n - 1)$. L'opérateur de poids opposé est $B_{(n-i,i-1)} = \bar{a}_{i,n-i} \bar{z}^{i-1} z^{n-i} [\bar{z}\partial_{\bar{z}} + q_i^n z\partial_z]$, pour $i = [\frac{n+1}{2}] + 1$ à n. Les suites $M \in S_{\mathcal{M}}$, telles que $l(M) \geq 3$ donnent des contributions à Car_k avec $k \geq n$. Pour $l(M) = 1$, seul les opérateurs résonnants interviennent. Ils sont donnés par $B_{(k,k)} = (z\bar{z})^k a_{k+1,k}(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$, où $a_{k+1,k} \in \mathbb{R}$. Autrement dit, seul l'opérateur $B_{(n-1,n-1)}$ intervient dans la composante d'ordre $n - 1$ de la correction. Pour $l(M) = 2$, les seules suites résonantes sont de la forme $M = \big((i-1, n-i), (n-i, i-1)\big)$. Un simple calcul donne $[B_{(i-1,n-i)}, B_{(n-i,i-1)}] = |a_{i,n-i}|^2 (q_i^n - 1)(iq_i^n + n - 1 - i)(z\bar{z})^{n-1}(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$. On en déduit le lemme. ∎

4 Sur la linéarisation des champs à dépendance linéaire

Les théorèmes 1 et 2 découlent de la proposition suivante sur les champs à dépendance linéaire.

Proposition 1 *Soit X un champ de la forme (1), à dépendance linéaire, où P est de valuation $n \geq 2$. On note $q_i^l \in \mathbb{R}$, le coefficient tel que $a_{i,l-1} = q_i^l \bar{a}_{l-i+1,i-1}$ pour tout $i = 0, \dots, l$, $l \geq n$.*

On suppose que les coefficients $\alpha_i^l = \frac{1}{2i-l-1}(q_i^l + l - 1 - i)$, sont tels que $\alpha_i^l > 0$ pour tout $l \geq n$.

i) *si il existe $N \geq n$ tel que $a_{l,l-1} = 0$, pour tout $l < N$ et $\mathrm{Re}(a_{N,N-1}) = 0$, $\mathrm{Im}(a_{N,N-1}) > 0$, alors le champ n'est pas linéarisable.*
ii) *si $a_{l,l-1} = 0$ pour tout $l \geq n$, alors X est trivial.*

Démonstration Elle se fait par récurrence sur les composantes homogènes. On commence par noter les résultats suivants:

En $l = n$, on a $\mathrm{Re}(\mathrm{Car}_{n-1}) = 0$ et

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Car}_{n-1}) = \mathrm{Im}(a_{n,n-1}) + \sum_i \alpha_i^n |a_{i,n-i}|^2 + \frac{2n}{n+1} |a_{0,n}|^2, \tag{3}$$

en utilisant le lemme 6.

(a) Si $\mathrm{Im}(a_{n,n-1}) = 0$, alors le champ X est linéarisable si et seulement si $a_{i,n-i} = 0$ pour $i = 0, \dots, n$.

En effet, X est linéarisable si et seulement si $\mathrm{Car}_{n-1} = 0$, d'où (a) en remarquant dans (3) que tous les α_i^n sont positifs.

(b) Si $\mathrm{Im}(a_{n,n-1}) > 0$ alors le champ X n'est pas linéarisable.

Il suffit de voir que cette condition entraine $\mathrm{Im}(\mathrm{Car}_{n-1}) > 0$ via (3).

Pour démontrer i), on applique le point (a) pour $l = n, \ldots, N-1$. On annule ainsi successivement les composantes homogènes de degré $l = n, \ldots, N-1$. On termine en utilisant (b) sur la composante homogène de degré N.

Le point ii) découle uniquement du point (a) par récurrence. Si on suppose le champ linéarisable, alors la perturbation du champ se réduit à la perturbation nulle, d'où la trivialité de X. ■

4.1 Démonstration des théorèmes 1 et 2

Pour démontrer les théorèmes 1 et 2, il suffit de montrer que $\alpha_i^l > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, l$, et $l \geq 2$, et $\mathrm{Re}(a_{l,l-1}) = 0$ pour tout $l \geq 2$, lorsque X est un champ hamiltonien ou de Darboux.

Le terme $a_{l,l-1}$ proviens de la composante homogène de degré $2l-1$, dont les coefficients vérifient $a_{i,2l-1-i} = q_i^{2l-1} \bar{a}_{2l-i,i-1}$. En $i = l$, on a $a_{l,l-1} = q_l^{2l-1} \bar{a}_{l,l-1}$. Dans le cas hamiltonien ou de Darboux, on vérifie que $q_l^{2l-1} = 1$, d'où $\mathrm{Re}(a_{l,l-1}) = 0$ pour tout $l \geq 2$.

Par ailleurs, un simple calcul montre que

$$\alpha_i^l = \frac{2(l+1)}{i(2i-l-1)}, \quad i = \left[\frac{l+1}{2}\right] + 1, \ldots, l,$$

dans le cas hamiltonien, et

$$\alpha_i^l = \frac{i^2 + (l-i)^2 - 1}{l-i+1}, \quad i = \left[\frac{l+1}{2}\right] + 1, \ldots, l,$$

dans le cas Darboux. On a donc bien $\alpha_i^l > 0$ pour tout $i = 0, \ldots, l$ et $l \geq 2$.

Les théorèmes 1 et 2 découlent donc de la proprosition 1.

4.2 Démonstration du corollaire 1

Soit X un champ de vecteur hamiltonien isochrone. Montrons qu'il est trivial. Par le lemme 6, il est nécessaire de distinguer le cas $n = 2k$ du cas $n = 2k+1$.

Si $n = 2k$, alors $\mathrm{Car}_l = 0$ pour $l < 2k-1$ et $\mathrm{Car}_{2k-1} = 0$ entraine $P_{2k}(z, \bar{z}) = 0$ par le point ii) du théorème 2.

Si $n = 2k+1$, on a $\mathrm{Car}_l = 0$ pour $l < 2k$, $l \neq k$ et $\mathrm{Car}_k = a_{k+1,k}$. Comme le champ est supposé linéarisable, on a $a_{k,k+1} = 0$. L'annulation des autres coefficients de $P_{2k+1}(z, \bar{z})$ se déduit de l'équation $\mathrm{Car}_{2k} = 0$ via le point ii) du théorème 2.

Références

[1] J. Cresson et B. Schuman, *Formes normales et problème du centre*. Bull. Sci. Math. (3) **125**(2001), 235–252.

[2] ———, *Formes normales et problème du centre symétrique*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **327**(1998), 581–584.

[3] J. Cresson, *Calcul moulien (avec un avant propos de Jean Écalle)*. à paraître dans les Actes du colloque, Polylogarithmes et conjectures de Deligne-Ihara, (Luminy), C.I.R.M., avril 2000.

[4] J. Écalle et B. Vallet, *Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms*. Math. Z., **229**(1998), 249–318.
[5] J.-P. Françoise et R. Pons, *Computer algebra methods and the stability of differential systems*. Random and Computational Dynamics (4) **3**(1995), 265–288.
[6] B. Schuman, *Sur la forme normale de Birkhoff et les centres isochrones*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **322**(1996), 21–24.
[7] ———, *Une classe d'hamiltoniens isochrones*. prépublication 168, Mai 1998, Institut de Mathématiques de Jussieu, à paraître à Canad. J. Math.

Équipe de Mathématique de Besançon
CNRS-UMR 6623
Université de Franche-Comté
16 route de Gray
25030 Besançon cedex
France
couriel: cresson@math.univ-fcomte.fr