Canad. Math. Bull. Vol. **25** (4), 1982

APPROXIMATION DE FONCTIONS CONVEXES SUR UN ESPACE DE MESURES ET APPLICATIONS

BY
R. TEMAM

ABSTRACT. In the first part of this article we recall the definition and a few basic properties of convex functionals defined on a space of bounded measures. In the second part we show several results of approximation of the following type: Although a measure μ cannot be approximated in the sense of the norm by smooth functions, we can find an appropriate sequence of smooth functions which converge weakly to the measure μ, the corresponding value of the functional converging to the value of the functional at μ.

This article is part of a series on the existence theory of solution of variational problems of mechanics (perfect plasticity), which is based on a systematic utilization of the methods of convex analysis and the calculus of variations.

Introduction. L'origine de ce travail se situe dans une étude en cours portant sur la théorie mathématique des équations de la plasticité, et en particulier l'étude des problèmes variationnels relatifs aux champs de déplacement (théorie de la déformation, théorie de l'analyse limite) (cf. [14], [15], [17]). Les solutions de ces problèmes variationnels étant de nature à présenter des surfaces de discontinuité, il est exclu d'obtenir des résultats d'existence dans des espaces de Sobolev ou des espaces de fonctions continues. Comme dans le cas des surfaces minima, il faut se tourner vers des espaces de fonctions moins régulières analogues aux espaces $BV(\Omega)$: c'est la motivation de l'introduction et de l'étude de l'espace fonctionnel $BD(\Omega)$, [8], [13], [14]. Lorsque Ω est un ouvert borné de R^n, $BD(\Omega)$ est formé des fonctions vectorielles de $L^1(\Omega)^n$ dont les composantes du tenseur des déformations associé

$$\varepsilon_{ij}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

sont des mesures bornées. L'étude de l'existence dans $BD(\Omega)$ de solutions pour les problèmes variationnels de la plasticité, qui est établie dans un article est paru par ailleurs, conduit à l'étude de fonctions convexes définies sur un espace de mesure. L'étude de telles fonctions nous a semblé pouvoir être utile ailleurs et nous en faisons donc ici une présentation séparée de l'étude de la plasticité.

Reçu par la rédaction le 31 mars 1980, et sous la forme revisée le 3 février 1981.
1980 A.M.S. Subject classification 49A99, 28A99

Dans la première section, nous rappelons la définition et quelques propriétés de fonctions convexes d'une mesure. Les fonctions convexes d'une mesure ont été déjà définies par différents auteurs, Goffman–Serrin [6], Rockafellar [12], Brezis [3]; nous en donnons ici une présentation un peu plus générale qui utilise systématiquement le point de vue de l'analyse convexe. La deuxième section est consacrée à l'obtention de différents résultats de densité d'espaces de fonctions régulières dans l'espace des mesures bornées sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$: il est bien connu que l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ est dense dans l'espace $M_1(\Omega)$ des mesures bornées muni de la topologie de la convergence vague mais qu'il n'est pas dense pour la topologie de la norme: nous établissons ici des résultats de densité de fonctions régulières pour des topologies intermédiaires qui font en particulier intervenir des écarts du type

$$|F_i(\mu)-F_i(\nu)|$$

où F_i est une fonction convexe, et i parcourt un ensemble I fini ou non. Cela revient à montrer que si $\mu \in M_1(\Omega)$, alors sous certaines conditions il existe une suite u_m de fonctions régulières qui converge vaguement vers μ et telle que $F_i(\mu_m) \to F_i(\mu)$ pour tout $i \in I$: cf. pour cela les Théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 de la Section 2. Ces théorèmes sont essentiels pour montrer que le minimum de certaines fonctionnelles dans des espaces de mesures (ou des espaces liés aux mesures comme $BV(\Omega)$, $BD(\Omega)$) y admettent le même infimum que sur un espace de fonctions plus régulières.

Enfin, dans une brève Section 3, nous explicitons l'application de ces résultats à certaines fonctionnelles apparaissant en mécanique.

1. **Fonction convexe d'une mesure**

1.1. *Rappel.* Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ. Nous notons $\mathscr{C}_0(\Omega)$ (resp. $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions réelles continues (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur Ω, à support compact dans Ω. Pour $1 \le p \le \infty$, nous notons $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions réelles sur Ω qui sont L^p pour la mesure de Lebesgue dx.

Si V est un espace de Banach de dual V' et F une fonction convexe s.c.i. sur V, on appelle domaine de F l'ensemble:

$$\operatorname{dom} F = \{u \in V, F(u) < +\infty\}.$$

La fonction F est dite propre si elle ne prend pas la valeur $-\infty$ et n'est pas identique à $+\infty$. On appelle conjuguée de F et on note F^* la fonction de V' dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F^*(u^*) = \operatorname*{Sup}_{u \in V}\{\langle u^*, u\rangle - F(u)\}.$$

Si F est convexe s.c.i. et propre, alors il en est de même de F^*, et la conjuguée F^{**} de F^* coïncide avec F. Nous renvoyons à [9], [16], [4], pour tout ce qui concerne les fonctions convexes.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Soit f une fonction convexe s.c.i. propre de $\mathbb{R}^l$ dans $\bar{R}$ (l entier ≥ 1). Pour tout $u \in L^1(\Omega)^l$ nous posons

$$(1.1) \qquad F(u) = \begin{cases} \int_\Omega f(u(x))\,dx & \text{si } f \circ u \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction F de $L^1(\Omega)^l$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ est convexe s.c.i. et propre. Soit f^* la fonction conjuguée de f et K son domaine

$$(1.2) \qquad f^*(\eta) = \sup_{\xi \in R^l} \{\xi \cdot \eta - f(\xi)\} \quad \forall n \in \mathbb{R}^l$$

$$(1.3) \qquad K = \{\eta \in \mathbb{R}^l, f^*(\eta) < +\infty\};$$

K est convexe non vide dans $\mathbb{R}^l$. Avec des résultats plus généraux de [4] nous voyons que la fonction F^* conjuguée de la fonction (1.1) est définie sur $L^\infty(\Omega)^l$ par

$$(1.4) \qquad F^*(u) = \begin{cases} \int_\Omega f^*(u(x))\,dx & \text{si} \quad f^* \circ u \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par dualité, puisque F^{**} coïncide avec F sur $L^1(\Omega)^l$, nous avons

$$(1.5) \qquad F(u) = \operatorname*{Sup}_v \left\{ \int_\Omega (uv - f^*(v))\,dx \right\},$$

où le supremum est pris pour $v \in L^\infty(\Omega)^l$ ou, ce qui revient au même pour $v \in \mathcal{A}_1$,

$$(1.6) \qquad \mathcal{A}_1 = \{v \in L^\infty(\Omega)^l, f^* \circ v \in L^1(\Omega)\}.$$

Il résulte de [12], [3] que, pour tout $u \in L^1(\Omega)^l$, F est aussi de la forme (1.5), le supremum étant pris sur l'ensemble $\mathcal{A}_2$ ci-après:

$$(1.7) \qquad \mathcal{A}_2 = \{v \in \mathscr{C}_0(\Omega)^l, f^* \circ v \in L^1(\Omega)\}.$$

En outre, une extension facile des résultats de [12], [3] permet de remplacer (1.7) par l'ensemble plus petit:

$$(1.8) \qquad \mathcal{A}_3 = \{v \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^l, f^* \circ v \in L^1(\Omega)\}$$

(cf. aussi la démonstration de la Proposition 1.1).

D'après un théorème de Krasnoselskii [7], une condition nécessaire et suffisante pour que $F(u)$ en (1.1) soit fini pour tout $u \in L^1(\Omega)^l$, est qu'il existe $k_1 \geq 0$ tel que

$$(1.9) \qquad f(\xi) \leq k_1(1 + |\xi|), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^l.$$

Dans ce cas (cf. [7]) la fonction F est aussi continue et bornée de $L^1(\Omega)^l$ dans

$\mathbb{R}$. Parfois, il nous arrivera de préciser les hypothèses avec certaines des conditions ci-après:

$$k_0(|\xi|-1)\le f(\xi), \qquad \forall \xi\in\mathbb{R}^l \quad (k_0>0) \tag{1.10}$$

$$f\ge 0, \qquad f(0)=0 \tag{1.11}$$

$$K=\operatorname{dom} f^* \text{ est fermé et } f^* \text{ est continue sur } K. \tag{1.12}$$

Notons que sous les conditions (1.9) et (1.10), K est borné et contient un voisinage de 0, [15]. Par ailleurs, puisque toute fonction convexe propre possède une minorante affine continue (au moins) on peut toujours se ramener au cas $f\ge 0$ par soustraction d'une fonction affine. Si f vérifie (1.11), alors il en est de même de f^*. Enfin pour (1.12), rappelons que f^* est nécessairement continue sur l'intérieur de K.

A la fonction f nous associerons sa "partie principale" que nous notons f_p:

$$f_p(\xi)=\operatorname*{Sup}_{\eta\in K} \xi\cdot\eta, \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}^l. \tag{1.13}$$

Comme f, la fonction f_p est convexe s.c.i. et propre sur $\mathbb{R}^l$; sa conjuguée f_p^* est la fonction indicatrice de K. Si $g(\xi)=f(\xi-\xi_0)+a\xi+b$, a, $\xi_0\in\mathbb{R}^l$, $b\in\mathbb{R}$, alors

$$g_p(\xi)=f_p(\xi)+a\xi. \tag{1.14}$$

Sous les conditions (1.11) et (1.12),

$$f(\xi)\le f_p(\xi)\le f(\xi)+\operatorname*{Sup}_K f^*, \tag{1.15}$$

et si $K=-K$, alors f_p est positivement homogène.

On peut bien sûr définir une fonctionnelle F_p sur $L^1(\Omega)^l$ en remplaçant f par f_p dans (1.1). La fonction F_p^* est alors la fonction indicatrice (dans $L^\infty(\Omega)^l$) de l'ensemble

$$\{v\in L^\infty(\Omega)^l,\ v(x)\in K \text{ p.p.}\}. \tag{1.16}$$

1.2. *Définitions—Propriétés.* Soit $M_1(\Omega)$ l'espace des mesures bornées sur Ω. Pour tout $\mu\in M_1(\Omega)^l$, nous posons

$$F(\mu)=\operatorname*{Sup}_{v\in\mathcal{A}_2}\left\{\int_\Omega \mu v-\int_\Omega f^*(v)\,dx\right\}^{(1)} \tag{1.17}$$

En raison de (1.5), (1.7), cela est compatible avec la définition précédente lorsque $\mu=u\in L^1(\Omega)^l$. La fonction F est propre. Elle est convexe s.c.i. sur $M_1(\Omega)^l$ comme enveloppe supérieure de fonctions linéaires continues. Pour la même raison, elle est semi-continue inférieurement pour la topologie vague des mesures.

---

(1) Nous noterons $F(\mu;\Omega)$ au lieu de $F(\mu)$, s'il faut expliciter la dépendance en Ω.

Notons ceci:

LEMME 1.1. *Sous l'hypothèse* (1.11), *on ne change pas* $F(\mu)$ *en remplaçant dans* (1.17) *le supremum sur* $\mathcal{A}_2$ *par le supremum pour* $v \in \mathcal{A}_3$ *ou pour* $v \in \mathcal{A}_\mu$

$$\mathcal{A}_\mu = \{v \in L^1(\Omega, \mu)^l, f^* \circ v \in L^1(\Omega)\}. \tag{1.18}$$

Démonstration. Soit $v \in \mathcal{A}_\mu$. Pour tout $j > 0$ il existe $w_j \in \mathscr{C}_0(\Omega)^l$, $\beta_j \in \mathscr{C}_0(\Omega)^l$, tels que

$$|w_j - v|_{L^1(\Omega;\mu)^l} \le \frac{1}{j}, \qquad |\beta_j - f^* \circ v|_{L^1(\Omega)} \le \frac{1}{j}.$$

Dans $\mathbb{R}^{l+1}$ soit C l'épigraphe de f^*, Π_c la projection sur C et $\phi_j = \Pi_c(w_j, \beta_j) = (v_j, \alpha_j)$. Il est clair que $\phi_j \in \mathscr{C}_0(\Omega)^{l+1}$ et

$$|v_j - v|_{L^1(\Omega,\mu)^l} \le |w_j - v|_{L^1(\Omega;\mu)^l} \le \frac{1}{j}$$

$$|\alpha_j - f^* \circ v|_{L^1(\Omega)} \le |\beta_j - f^* \circ v|_{L^1(\Omega)} \le \frac{1}{j}$$

$$\alpha_j \ge f^* \circ v_j.$$

Par extraction d'une sous-suite, nous pouvons supposer que $v_j \to v$ μ − p.p. et $\alpha_j \to f^* \circ v\, dx$ − p.p. Puis, par la semi-continuité inférieure de f et ce qui précède, nous voyons que

$$\int_\Omega f^*(v)\, dx \le \varliminf_{j\to\infty} \int_\Omega f^*(v_j)\, dx \le \varlimsup_{j\to\infty} \int_\Omega f^*(v_i)\, dx \le \int_\Omega f^*(v)\, dx.$$

Dans ces conditions,

$$\int_\Omega \mu v_j - \int_\Omega f^*(v_j)\, dx \to \int_\Omega \mu v - \int_\Omega f^*(v)\, dx,$$

et le résultat suit pour $\mathcal{A}_\mu$.

De même, si $v \in \mathcal{A}_2$, alors $\phi = (v, f^* \circ v)$ est approchée par régularisation par une suite $\phi_j = (v_j, \alpha_j) \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^{l+1}$, avec ici, puisque v est continue, $v_j \to v$ uniformément. D'autre part, si les fonctions régularisantes sont bien choisies (positives de masse 1), ϕ_j prend, comme ϕ, ses valeurs dans C, si bien que $v_j \in \mathcal{A}_3$ et le résultat suit.

L'expression de F est donnée par la

PROPOSITION 1.1. *On suppose que f est une fonction convexe s.c.i. propre sur $\mathbb{R}^l$ qui vérifie* (1.11). *Soit* $\mu \in M_1(\Omega)^l$ *et soit* $\mu = u\, dx + \mu_s$, *la décomposition de Lebesgue de* μ, $\mu \in L^1(\Omega)^l$, μ_s *singulière. Alors:*

$$f(\mu) = F(u) + F_p(\mu_s) \tag{1.19}$$

Démonstration. Elle est semblable, en plus simple, à celles du Théorème 2.1 dans [16] et du Théorème 1 dans [3].

Tout d'abord, pour tout $v \in \mathcal{A}_2$,

$$\int_\Omega \mu v - \int_\Omega f^*(v)\,dx = \int_\Omega uv\,dx - \int_\Omega f^*(v)\,dx + \int_\Omega \mu_s v$$
$$\leq F(u) + F_p(\mu_s),$$

d'où en prenant le supremum pour $v \in \mathcal{A}_2$,

$$F(\mu) \leq F(u) + F_p(\mu_s). \tag{1.20}$$

Pour montrer l'inégalité inverse, nous notons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe v_1, v_2 dans $\mathcal{A}_2$ tels que

$$F_p(\mu_s) - \varepsilon \leq \int_\Omega \mu_s v_1$$

$$F(u) - \varepsilon \leq \int_\Omega (uv_2 - f^*(v_2))\,dx.$$

D'autre part, comme μ_s est singulière, pour tout $\delta > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de mesure $\leq \delta$ qui contient le support de μ_S. Soit alors $\bar{v}$ la fonction qui est égale à v_1 sur $\mathcal{O}$ et à v_2 sur $\Omega \backslash \mathcal{O}$. Il est clair par le théorème de Lusin que $\bar{v}$ est μ-mesurable et cette fonction est dans $\mathcal{A}_\mu$. Alors, par le Lemme 1.1.:

$$\int_\Omega (u\bar{v} - f^*(\bar{v}))\,dx + \int_\Omega \mu_s \bar{v} \leq F(\mu).$$

Mais le membre de gauche de cette inégalité est égal à

$$\int_\Omega (uv_2 - f^*(v_2))\,dx + \int_\Omega \mu_s v_1 + \int_\mathcal{O} g\,dx \geq \text{(par définition de } v_1, v_2)$$

$$\geq F(u) + F_p(\mu_s) - 2\varepsilon + \int_\mathcal{O} g\,dx,$$

où

$$g = u(v_1 - v_2) - f^*(v_1) + f^*(v_2).$$

Comme $g \in L^1(\Omega)$ et ne dépend que de ε, on peut choisir δ assez petit pour que $|\int_\mathcal{O} g\,dx| \leq \varepsilon$, d'où alors

$$F(u) + F_p(\mu_s) - 3\varepsilon \leq F(\mu),$$

ce qui termine la démonstration.

1.3. *Fonctions d'une mesure comme fonction additive d'ensemble.* Soit $\mathcal{O}$ un borélien de Ω et $\chi_\mathcal{O}$ sa fonction caractéristique. Alors $\chi_\mathcal{O}$ est μ-mesurable quelle que soit la mesure μ et $\chi_\mathcal{O} v \in L^1(\Omega; \mu)^l$, pour tout v dans $\mathscr{C}_0(\Omega)^l$. Nous pouvons alors poser

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)=\operatorname*{Sup}_{v\in\mathcal{A}_2}\left\{\int_\Omega \mu v\chi_{\mathcal{O}}-\int_\Omega f^*(v)\,dx\right\}^{(2)}. \tag{1.21}$$

La mesure $\chi_{\mathcal{O}}\mu$ est bien définie et il est clair que

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)=F(\chi_{\mathcal{O}}\mu). \tag{1.22}$$

La fonction $F_{\mathcal{O}}$ est convexe s.c.i. sur l'espace normé $M_1(\Omega)^l$. L'application $\mu\to\chi_{\mathcal{O}}\mu$ n'étant pas en général continue pour la topologie vague, $F_{\mathcal{O}}$ n'est pas en général s.c.i. pour cette topologie.

Lorsque $\mathcal{O}$ est ouvert, nous voyons grâce au Lemme 1.1 que

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)=\operatorname{Sup}\left\{\int_{\mathcal{O}}\mu v-\int_{\mathcal{O}} f^*(v)\,dx;\, v\in\mathscr{C}_0(\mathcal{O}),\, f^*\circ v\in L^1(\mathcal{O})\right\}$$

ce qui montre que Ω ne joue plus aucun rôle et que $F_{\mathcal{O}}$ est s.c.i. pour la topologie vague de $M_1(\Omega)^n$.

Quelques propriétés simples de $F_{\mathcal{O}}$ sont fournies par le lemme ci-après

LEMME 1.2. *Si f vérifie* (1.11) *alors*

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)\geq 0,\qquad \forall\mathcal{O},\forall\mu \tag{1.23}$$

$$F(\mu)\leq F_{\mathcal{O}'}(\mu),\qquad \forall\mu,\forall\mathcal{O},\mathcal{O}',\mathcal{O}\subset\mathcal{O}', \tag{1.24}$$

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)\ \textit{est une fonction additive de}\ \mathcal{O}. \tag{1.25}$$

Si f et g sont deux fonctions convexes s.c.i. qui vérifient (1.11) *et si $F_{\mathcal{O}}$ et $G_{\mathcal{O}}$ désignent les fonctions associées sur $M_1(\Omega)^l$, alors*

$$f\leq g\quad \textit{entraîne}\quad F_{\mathcal{O}}\leq G_{\mathcal{O}}. \tag{1.26}$$

Démonstration. Comme f, la fonction f^* vérifie (1.11) et donc $0\in K$ et la fonction nulle est dans $\mathcal{A}_2$. D'où (1.23) avec (1.21). Par ailleurs (1.24) résulte de (1.25).

Pour montrer (1.25) soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux boréliens de Ω avec $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset$. On a $\chi_{\mathcal{O}}=\chi_{\mathcal{O}_1}+\chi_{\mathcal{O}_2}$ et soit $v\in\mathcal{A}_2$ tel que

$$F_{\mathcal{O}}(\mu)-\varepsilon\leq\int_\Omega\mu v\chi_{\mathcal{O}}-\int_\Omega f^*(v)\,dx\leq F_{\mathcal{O}}(\mu).$$

Comme $f^*(\chi_{\mathcal{O}}v)\leq f^*(v)$,

$$\begin{aligned}F_{\mathcal{O}}(\mu)-\varepsilon&\leq\int_\Omega\mu v\chi_{\mathcal{O}}-\int_\Omega f^*(\chi_{\mathcal{O}}v)\,dx\\&=\int_\Omega\mu v_1\chi_{\mathcal{O}_1}+\int\mu v_2\chi_{\mathcal{O}_2}-\int_\Omega f^*(v_1)\,dx-\int_\Omega f^*(v_2)\,dx,\end{aligned}$$

[2] Nous noterons $F_{\mathcal{O}}(\mu;\Omega)$ au lieu de $F_{\mathcal{O}}(\mu)$ quand il faudra expliciter la dépendance par rapport à Ω.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

où $v_i = \chi_{\mathcal{O}_i} v$, et cela est inférieur, par le Lemme 1.2 et (1.22), à $F_{\mathcal{O}_1}(\mu) + F_{\mathcal{O}_2}(\mu)$.

De même, soient $v_1, v_2 \in \mathcal{A}_2$ tels que

$$F_{\mathcal{O}_i}(\mu) - \varepsilon \le \int_\Omega v_i \chi_{\mathcal{O}_i} - \int_\Omega f^*(v_i)\,dx, \qquad i = 1, 2,$$

et soit $v = \chi_{\mathcal{O}_1} v_1 + \chi_{\mathcal{O}_2} v_2 (= \chi_{\mathcal{O}} v)$. Alors

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{O}_1}(\mu) + F_{\mathcal{O}_2}(\mu) - 2\varepsilon &\le \int_\Omega \mu v \chi_{\mathcal{O}} - \int_\Omega (f^*(\chi_{\mathcal{O}_1} v) + f^*(\chi_{\mathcal{O}_2} v))\,dx \\ &\le \int_\Omega \mu v \chi_{\mathcal{O}} - \int_\Omega f^*(v)\,dx \le F_{\mathcal{O}}(\mu). \end{aligned}$$

Enfin (1.26) est immédiat puisque $f \leqslant g$ entraîne $f^* \ge g^*$ (cf. [4]).

Remarque 1.1. Pour toute fonction ψ continue sur Ω et valant 1 sur $\mathcal{O}$, nous avons $F_{\mathcal{O}}(\psi\mu) = F_{\mathcal{O}}(\mu)$. En particulier si $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$ et $\psi \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, $\psi = 1$ sur $\mathcal{O}$ (ou $\bar{\mathcal{O}}$), nous avons

(1.27) $$F_{\mathcal{O}}(\psi_\mu) = F_{\mathcal{O}}(\mu), \forall \mu,$$

ce qui entraîne que $F_{\mathcal{O}}$ est indépendant de Ω dans ce cas.

Remarque 1.2. Si f vérifie (1.9) alors

(1.28) $$\operatorname{dom} F_{\mathcal{O}} = \{\mu \in M_1(\Omega)^l, F_{\mathcal{O}}(\mu) < +\infty\} = M_1(\Omega)^l,$$

pour tout $\mathcal{O} \subset \Omega$. D'après (1.26), on a en effet

(1.29) $$F_{\mathcal{O}}(\mu) \le k_1 \left(\int_{\mathcal{O}} |\mu| + \int_{\mathcal{O}} dx \right).$$

Notons que (1.9) est aussi une condition nécessaire pour que $F_{\mathcal{O}}(\mu)$ soit fini pour tout $\mu \in M_1(\Omega)^l$: s'il en est ainsi, on voit qu'alors $F_{\mathcal{O}}(\mu)$ est fini pour tout $\mu \in L^1(\Omega)^l$ et par le théorème de Krasnoselskii [7] évoqué plus tôt, (1.9) est vérifié.

Quand cela a lieu, il résulte du Corollaire 2.5 Ch. I de [5] que

(1.30) $F_{\mathcal{O}}$ est finie, continue et bornée sur $M_1(\Omega)^1$ (topologie de la norme).

Remarque 1.3. La définition de F et $F_{\mathcal{O}}$ dans [6] est basée sur l'étude de $F_{\mathcal{O}}(u)$ comme fonction additive d'ensembles $\mathcal{O}$ lorsque u est une fonction étagée.

2. **Théorèmes de densité**. Il est bien connu que les fonctions régulières forment un sous-espace dense de l'espace $M_1(\Omega)$ muni de la topologie vague mais qu'elles ne forment pas un sous-espace dense de $M_1(\Omega)$ muni de la topologie de la norme.

Notre objet dans cette section est de montrer différents résultats de densité de l'ensemble des fonctions régulières dans l'ensemble $M_1(\Omega)^l$ muni de cer-

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

taines topologies intermédiaires entre la topologie vague et celle de la norme, topologies qui s'apparentent à la convergence étroite des mesures [21]. Les principaux résultats sont énoncés dans les Sections 2.1 et 2.3.

2.1. *Enoncé du théorème de densité.* Soit Ω un ouvert quelconque de R^n. Dans toute cette section f désigne une fonction convexe s.c.i. sur $\mathbb{R}^l$ qui vérifie (1.11) (et parfois des conditions supplémentaires) et F est la fonction sur $M_1(\Omega)^l$ qui lui est associée par (1.17).

Nous définissons sur $M_1(\Omega)^l$ une topologie $\mathcal{T}$ qui est celle associée à une structure uniforme définie par une famille d'écarts sur $M_1(\Omega)^l \times M_1(\Omega)^l$ (cf. Bourbaki [1]). La structure uniforme qui définit $\mathcal{T}$ est donnée par l'ensemble des écarts ci-après:

— ceux associés aux semi-normes

$$\left|\int_\Omega \mu v\right|, \qquad v \in \mathscr{C}_0(\Omega)^l, \tag{2.1}$$

qui induisent sur $M_1(\Omega)^l$ la topologie vague,

– ceux de la forme

$$e(\mu_1, \mu_2) = |F(\mu_1) - F(\mu_2)|, \tag{2.2}$$

lorsque f parcourt l'ensemble des fonctions convexes s.c.i. sur R^l qui vérifient (1.9) et (1.11) et F est la fonction correspondante sur $M_1(\Omega)^l$ définie par (1.17).

En raison de (1.9) et de la Remarque 1.2, $\mu \to F(\mu)$ est finie et continue pour tout F, ce qui entraîne que les écarts (2.2) ne prennent que des valeurs finies et que la topologie $\mathcal{T}$ est moins fine que celle de la norme (et bien sûr plus fine que la topologie vague).

Nous avons:

THÉORÈME 2.1. *$\mathscr{C}_0(\Omega)^l$ est dense dans $M_1(\Omega)^l$ muni de la topologie $\mathcal{T}$.*

La démonstration est donnée dans la Section ci-après. Il suffit de montrer que

(2.3) pour tout $\mu \in M_1(\Omega)^l$, il existe une suite $u_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^l$, telle que pour $j \to \infty$:

$u_j \to \mu$ dans $M_1(\mu)^l$, vaguement, et

$F(u_j) \to F(\mu)$, pour tout f vérifiant (1.9)–(1.11).

2.2. *Démonstration du Théorème* 2.1. Dans tout ce qui suit, ρ_ε désigne une suite de fonctions régularisantes, $\rho_\varepsilon(x) = 1/\varepsilon^n \rho(x/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, où $\rho \in \mathscr{C}_0^\infty(R^n)$, $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho\, dx = 1$, $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \frac{1}{2}$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Nous commençons par le

LEMME 2.1. *Nous supposons que* $\Omega=\mathbb{R}^n$ *et que* f *vérifie* (1.11). *Alors pour tout* $\mu \in M_1(\mathbb{R}^n)^l$ *et pour tout* $\varepsilon>0$,

$$F(\rho_\varepsilon * \mu) \leq F(\mu). \tag{2.4}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$F(\rho_\varepsilon * \mu) \to F(\mu). \tag{2.5}$$

Démonstration. Puisque $\rho_\varepsilon * \mu \to \mu$ pour la topologie vague, on a par semi-continuité inférieure,

$$F(\mu) \leq \varliminf_{\varepsilon\to 0} F(\rho_\varepsilon * \mu)$$

et donc (2.5) est une conséquence immédiate de (2.4).

Pour (2.4) nous écrivons, pour $v \in \mathcal{A}_3$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\varepsilon * \mu)v - \int_{\mathbb{R}^n} f^*(v)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu \cdot \check{\rho}_\varepsilon * v - \int_{\mathbb{R}^n} f^*(\check{\rho}_\varepsilon * v)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} (f*(\check{\rho}_\varepsilon * v) - f^*(v))\,dx \\ &\leq F(\mu) + \int_{\mathbb{R}^n} (f^*(\check{\rho}_\varepsilon * v) - f^*(v))\,dx,\end{aligned}$$

où $\check{\rho}(x)=\rho(-x)$. Par convexité, nous avons

$$f^*(\check{\rho}_\varepsilon * v) \leq \check{\rho}_\varepsilon * f^*(v), \tag{2.6}$$

d'où par intégration:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*(\check{\rho}_\varepsilon * v)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \check{\rho}_\varepsilon * f^*(v)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(v)\,dx. \tag{2.7}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_\varepsilon * \mu)v - \int_{\mathbb{R}^n} f^*(v)\,dx \leq F(\mu), \qquad \forall v \in \mathcal{A}_3$$

et (2.4) est établi. ∎

Cela prouve en particulier (2.3) et le Théorème 2.1 lorsque $\Omega=\mathbb{R}^n$. Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, nous avons

LEMMA 2.2. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $\mu \in M_1(\Omega)^l$, *il existe une suite* $u_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^l$ *qui converge vers* μ *pour la topologie vague et telle que pour tous* f, F *vérifiant* (1.11) (1.17):

$$\begin{cases} F(u_j) \leq F(\mu), & \forall j, \\ F(u_j) \to F(\mu), & j \to +\infty. \end{cases} \tag{2.8}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit Ω_j une suite croissante d'ouverts tels que $\Omega_j \subset \bar{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1} \subset \Omega$ et soit pour tout j, ψ_j une fonction dans $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \psi_j \le 1$, $\psi_j = 1$ sur Ω_j. D'après le théorème de Lebesgue, lorsque $j \to +\infty$, $\psi_j\mu$ converge en norme vers μ dans $M_1(\Omega)^l$. D'autre part, pour tout j:

$$F(\psi_j\mu) \le F(\mu). \tag{2.9}$$

En effet, pour tout $v \in \mathscr{A}_2$

$$\int_\Omega \mu\psi_j v - \int_\Omega f^*(v)\,dx \le F(\mu) + \int_\Omega [f^*(\psi_j v) - f^*(v)]\,dx.$$

Par convexité, et comme f^* vérifie aussi (1.11):

$$f^*(\psi_j v) \le \psi_j f^*(v) \le f^*(v),$$

si bien que

$$\int_\Omega \mu\psi_j v - \int_\Omega f^*(v)\,dx \le F(\mu), \qquad \forall v \in \mathscr{A}_2$$

et (2.9) est démontré.

Quand $j \to +\infty$, on a par la semi-continuité F et (2.9)

$$F(\psi_j\mu) \to F(\mu).$$

Si $\varepsilon > 0$ est assez petit pour que le support de $\rho_\varepsilon * (\psi_j\mu)$ soit inclus dans Ω, alors on voit comme pour (2.2), (2.3) que

$$F(\rho_\varepsilon * (\psi_j\mu)) \le F(\psi_j\mu) \le F(\mu)$$

et lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$F(\rho_\varepsilon * (\psi_j\mu)) \to F(\psi_j\mu).$$

Le lemme est donc établi avec $u_j = \rho_{\varepsilon_j} * (\psi_j\mu)$ où ε_j est une suite décroissante qui tends vers 0 et, pour chaque j, ε_j assez petit pour que (support $\psi_j) + B(0, \varepsilon_j) \subset \Omega$, $B(0, \varepsilon_j)$ boule ouverte de $\mathbb{R}^l$ de centre 0 et de rayon ε_j. ■

Le Théorème 2.1 est établi. Notons pour terminer le résultat ci-après qui s'apparente aux lemmes précédents.

LEMME 2.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}$ un ouvert de Ω tel que $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$, et soit $\mu \in M_1(\Omega)^l$ qui vérifie*

$$\int_{\partial\mathcal{O}} |\mu| = 0. \tag{2.10}$$

Alors il existe une suite $u_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^l$ qui converge vers μ pour la topologie vague et telle que

$$F_{\mathcal{O}}(u_j) \to F_{\mathcal{O}}(\mu), \qquad j \to \infty, \tag{2.11}$$

pour tout f vérifiant (1.9), (1.11) (*et F donné par* (1.17)).

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Soit $\psi \in \mathscr{C}_0(\Omega)$, dont le support contient $\bar{\mathcal{O}}$. D'après (1.27), $F_{\mathcal{O}}(\psi\mu) = F_{\mathcal{O}}(\mu)$. Soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\operatorname{supp}\psi + B(0, \varepsilon) \subset \Omega$. Nous avons pour tout f et pour tout $v \in \mathscr{A}_2$:

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon * (\psi\mu)\chi_{\mathcal{O}} v - \int_\Omega f^*(v)\,dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$I_1 = \int_\Omega (\psi\mu)\chi_{\mathcal{O}}(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)) - \int_\Omega f^*(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v))\,dx$$

$$I_2 = \int_\Omega \{f^*(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)) - f^*(v)\}\,dx$$

$$I_3 = \int (\psi\mu)[\rho_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)](1 - \chi_{\mathcal{O}}).$$

D'après (1.21), (1.22) et Lemme 1.1, I_1 est inférieur à $F_{\mathcal{O}}(\psi\mu)$. D'après (2.6), (2.7) et comme f^* vérifie aussi (1.11):

$$\int_\Omega f^*(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f^*(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v))\,dx$$
$$\le \int_{\mathbb{R}^n} \check{\rho}_\varepsilon * f^*(\chi_{\mathcal{O}} v)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^*(\chi_{\mathcal{O}} v)\,dx = \int_\Omega f^*(v)\,dx$$

en sorte que $I_2 \le 0$.

Nous voulons maintenant montrer que I_3 est majoré par une expression indépendante de f et v. Soit $\mathcal{O}_\varepsilon$ la réunion des boules ouvertes de rayon ε centrées dans $\mathcal{O}$. Comme $\rho(x) = 0$ pour $|x| > \frac{1}{2}$, la fonction $\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)$ s'annule en dehors de $\mathcal{O}_\varepsilon$ et son produit avec $(1 - \mathcal{O})$ s'annule en dehors de $\mathcal{O}_\varepsilon \backslash \mathcal{O}$. D'autre part, $\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v)$ est majorée par le maximum de v qui est inférieur à k_1: en effet, $v(x) \in K$ pour tout x puisque $v \in \mathscr{A}_2$ et K est, d'après (1.9), inclus dans le boule de centre 0 et de rayon k_1 (cf. [15]). Ainsi $(\check{\rho}_\varepsilon * (\chi_{\mathcal{O}} v))(1 - \chi_{\mathcal{O}})$ est inférieur en module à k_1 sur $\mathcal{O}_\varepsilon \backslash \mathcal{O}$ et est nul ailleurs. D'ou

$$I_3 \le \int_{\mathcal{O}_\varepsilon \backslash \mathcal{O}} |\mu| = (\text{d'après (2.10)}) = \int_{\mathcal{O}_\varepsilon \backslash \bar{\mathcal{O}}} |\mu|.$$

Si nous appelons δ_ε cette dernière quantité, nous voyons que $\delta_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et ainsi pour tout $v \in \mathscr{A}_2$:

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon * (\chi\mu)\chi_{\mathcal{O}} v - \int_\Omega f^*(v)\,dx = I_1 + I_2 + I_3 \le F_{\mathcal{O}}(\psi\mu) + \delta_\varepsilon. \tag{2.12}$$

D'où

$$F_{\mathcal{O}}(\rho_\varepsilon * (\psi\mu)) \to F_{\mathcal{O}}(\psi\mu) = F_{\mathcal{O}}(\mu), \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.13}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Le résultat suit en posant $u_j = \rho_{\varepsilon_j} * (\psi\mu)$, ε_j suite décroissant vers 0, avec supp $\psi + B(0, \varepsilon_j) \subset \Omega$.

REMARQUE 2.1. La démonstration du Lemme 2.3 donne la convergence (2.13) pour $f, \mathcal{O}, \mu, \chi$ arbitraires, (1.9), (1.11), (2.10) étant vérifiés.

2.3. *Autres résultats de densité* (*I*). Soit à nouveau Ω un ouvert, m et l deux entiers et soit S un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre un, opérant (par exemple) de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^m$ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^l$. Nous appelons X l'espace

$$\{u \in L^1(\Omega)^m, \ Su \in M_1(\Omega)^l\}, \tag{2.14}$$

qui est de Banach pour la norme naturelle

$$|u|_{L^1(\Omega)^m} + |Su|_{M^1(\Omega)^l}. \tag{2.15}$$

Nous appelons $\mathscr{T}_1$ la topologie de la norme sur X, $\mathscr{T}_0$ la topologie faible de X définie par la famille de normes et semi-normes

$$|u|_{L^1(\Omega)^m} \tag{2.16}$$

et

$$\left|\int_\Omega (Su)v\right| \text{ où } v \text{ parcourt } \mathscr{C}_0(\Omega)^l. \tag{2.17}$$

Ainsi $u_j \to u$ pour $\mathscr{T}_0$ si $u_j \to u$ dans $L^1(\Omega)^m$ et $Su_j \to Su$ dans $M_1(\Omega)^l$ vague. Nous appelons enfin X_f l'espace X muni de la topologie et de la structure uniforme définies par l'ensemble des écarts ci-après:

- ceux associés aux norme et semi-normes (2.16), (2.17),
- l'écart

$$e(u_1, u_2) = |F(Su_1) - F(Su_2)| \tag{2.18}$$

où f est une fonction convexe s.c.i. sur $\mathbb{R}^l$ qui vérifie (1.9), (1.11) et F est défini par (1.17).

Soit enfin $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ (resp. $\mathscr{C}^k(\bar{\Omega})$) l'espace des fonctions réelles $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω (resp. de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\bar{\Omega}$).

Notre résultat ici est le suivant:

THÉORÈME 2.2. *Si f vérifie* (1.9) *et* (1.11) *$\mathscr{C}^\infty(\Omega)^m$ est dense dans X_f. Si Ω est un ouvert de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ alors $\mathscr{C}^{k+1}(\bar{\Omega})^m$ est dense dans X_f.*

Démonstration. (i) Soit $u \in X$ fixé. Pour la densité de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)^m$, il suffit de trouver pour tout $\delta > 0$ donné, $u_\delta \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)^m$ tel que

$$|u_\delta - u|_{L^1(\Omega)^m} \le \delta \tag{2.19}$$

$$\left|\int_\Omega |Su_\delta| - \int_\Omega |Su|\right| \le 4\delta \tag{2.20}$$

$$|F(Su_\delta) - F(Su)| \le c_0\delta, \tag{2.21}$$

c_0 constante >0, où F est défini par (1.17), f vérifiant (1.9), (1.11), (1.12).

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

(ii) *Construction de* u_δ

Nous commençons par le cas où $f(\xi)=|\xi|$, si bien que $F(u)=\int_\Omega |\mu|$ et (2.21) est identique à (2.20). Comme $|Su|$ est une mesure de Radon, il existe $r>0$ tel que

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Su| \le \delta, \tag{2.22}$$

où

$$\Omega_0=\left\{x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>\frac{1}{r}\right\}.$$

Nous posons $\Omega_{-1}=\varnothing$ et

$$\Omega_j=\left\{x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>\frac{1}{j+r}\right\},\qquad j=0,1,\ldots,$$

si bien que les ouverts Ω_j vérifient

$$\Omega_j\subset\bar{\Omega}_j\subset\Omega_{j+1},\qquad j=-1,0,1,\ldots$$

$$\bigcup_{j=0}^{\infty}\Omega_j=\Omega.$$

Nous définissons les ensembles A_j en posant $A_1=\Omega_2$ et

$$A_j=\Omega_{j+1}-\overline{\Omega_{j-1}},\qquad j=2,3,\ldots,$$

et nous considérons une partition de l'unité $\{\phi_j\}$ subordonnée au recouvrement A_j de Ω:

$$\phi_j\in\mathscr{C}_0^\infty(A_j),\qquad 0\le\phi_j\le 1,\quad \text{et}\quad \sum_{j=1}^{\infty}\phi_j=1. \tag{2.23}$$

Nous considérons à présent une famille de fonctions régularisantes ρ_{ε_j}, où la suite des ε_j est astreinte à certaines conditions précisées ci-dessous et nous posons comme en [5]:

$$u_\delta=\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{\varepsilon_j}*(\phi_j u). \tag{2.24}$$

Les ε_j sont astreints à former une suite décroissante vers 0

$$\varepsilon_{j+1}\le\varepsilon_j,\qquad \varepsilon_j\to 0\quad\text{pour}\quad j\to\infty,$$

et à être assez petits pour que les conditions ci-après soient réalisées:

$$\left|\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1}*(\phi_1 Su)|\,dx-\int_\Omega |\phi_1 Su|\right|\le\delta \tag{2.25}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

$$\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (u\phi_j) - (u\phi_j)|\, dx \le \delta 2^{-j} \tag{2.26}$$

$$\int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (u\bar{S}\phi_j) - (u\bar{S}\phi_j)|\, dx \le \delta 2^{-j}\,{}^{(3)} \tag{2.27}$$

$$(\Omega_2 - \bar{\Omega}_1) + B(0, \varepsilon_1) \subset \Omega_3 \backslash \bar{\Omega}_0 \tag{2.28}$$

$$A_j + B(0, \varepsilon_j) \subset A_{j-1} \cup A_j \cup A_{j+1}, \qquad j \ge 2, \tag{2.29}$$

où $B(0, \varepsilon_j)$ est la boule de centre 0, de rayon ε_j, qui contient le support de ρ_{ε_j}. D'après (2.28) et comme $\phi_1 = 1$ sur Ω_1, $\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su) = Su$ sur un voisinage de $\bar{\Omega}_0$, et alors avec (2.22) et (2.25):

$$\left| \int_\Omega |Su| - \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su)| \right| \le 2\delta. \tag{2.30}$$

Avec (2.23) nous avons

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j u,$$

et avec (2.26) nous obtenons immédiatement (2.19):

$$\int_\Omega |u_\delta - u|\, dx \le \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - \phi_j u|\, dx \le \delta. \tag{2.31}$$

Pour (2.20) nous écrivons:

$$Su_\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j Su) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j} * (u\bar{S}\phi_j),$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |Su_\delta| - \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su)| \right| &\le \left(\text{puisque } \sum_{j=1}^{\infty} \bar{S}\phi_j = 0\right) \\
&\le \sum_{j=2}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j Su)| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_\Omega |\rho_{\varepsilon_j} * (u\bar{S}\phi_j) - (u\bar{S}\phi_j)|\, dx \\
&\le (\text{par } (2.27)) \\
&\le \sum_{j=2}^{\infty} \int_\Omega \rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j\, |Su|) + \delta.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

(3) $\bar{S}$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^{m\times l}$ défini par

$$\psi \cdot \bar{S}\phi = S(\phi\psi) - \phi(S\psi), \qquad \forall \phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega), \qquad \forall \psi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^m.$$

Pour toute fonction ϕ à support compact on montre par régularisation que

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon * (\phi\,|Su|) = \int_\Omega \phi\,|Su|,$$

et donc

$$\sum_{j=2}^{\infty} \int_\Omega \rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j\,|Su|) = \int_\Omega |Su|\,(1-\phi_1)$$

et ceci est majoré par δ d'après (2.22) ($\phi_1 = 1$ sur Ω_0). Ces inégalités et (2.30) donnent (2.20).

(iii) Dans le cas d'une fonction f quelconque nous construisons u_δ de la même manière que ci-dessus, mais nous choisissons Ω_0 (c'est-à-dire $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$) de manière à avoir outre (2.22):

$$\int_{\partial\Omega_0} |Su| = 0, \tag{2.33}$$

$$\operatorname{mes}(\Omega \backslash \Omega_0) \leq \delta. \tag{2.34}$$

Avec (2.23) et le Lemme 2.3, on peut choisir ε_1 assez petit pour avoir aussi

$$|F_{\Omega_0}(\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su)) - F_{\Omega_0}(\phi_1 Su)| \leq \delta. \tag{2.35}$$

Comme $\phi_1 Su = Su$ dans un voisinage de $\bar{\Omega}_0$, la Remarque 1.1 donne $F_{\Omega_0}(\phi_1 Su) = F_{\Omega_0}(Su) = F_{\bar{\Omega}_0}(Su)$. De même (2.28) montre que $\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su) = Su_\delta$ dans un voisinage de $\bar{\Omega}_0$ et ainsi $F_{\Omega_0}(\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su)) = F_{\Omega_0}(Su_\delta) = F_{\bar{\Omega}_0}(Su_\delta)$ en sorte que (2.35) donne

$$|F_{\bar{\Omega}_0}(Su_\delta) - F_{\bar{\Omega}_0}(Su)| \leq \delta. \tag{2.36}$$

D'après (1.9), (1.25), (1.26) nous avons:

$$\begin{aligned} |F(Su_\delta) - F(Su)| &\leq |F_{\bar{\Omega}_0}(Su_\delta) - F_{\bar{\Omega}_0}(Su)| + |F_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0}(Su_\delta)| + |F_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0}(Su)| \\ &\leq \delta + |F_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0}(Su_\delta)| + |F_{\Omega / \bar{\Omega}_0}(Su)| \end{aligned} \tag{2.37}$$

et

$$\begin{aligned} |F_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0}(Su)| &\leq k_1 \int_{\overline{\Omega \backslash \Omega_0}} (1 + |Su|) \\ &\leq (\text{par (2.22), (2.34)}) \leq 2k_1\delta. \end{aligned}$$

D'après (1.9), (1.26) et (1.32)

$$\begin{aligned} |F_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0}(Su_\delta)| &\leq k_1 \int_{\Omega \backslash \bar{\Omega}_0} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j Su) + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{\varepsilon_j} * (u \bar{S} \phi_j) \right\} \\ &\leq (\text{par (2.27), (2.28), (2.29), (2.34)}) \\ &\leq 2k_1\delta. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Finalement (2.20) en résulte.

(iv) Pour la densité de $\mathscr{C}^{k+1}(\bar{\Omega})^m$, on note que la fonction u_δ précédente est dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)^m \cap X_1$, $X_1 = \{u \in L^1(\Omega)^m, Su \in L^1(\Omega)^l\}$. Il est bien connu que $\mathscr{C}^{k+1}(\bar{\Omega})^m$ est dense dans X_i, et on pourra donc trouver $u'_\delta \in \mathscr{C}^{k+1}(\bar{\Omega})^m$ tel que $|u_\delta - u'_\delta|_{X_1}$ soit arbitrairement petit,

$$|u_\delta - u'_\delta|_{X_1} \le \delta. \tag{2.38}$$

Comme $F \circ S$ est continu sur X_1 pour la topologie de la norme (cf. Remarque 1.2), on pourra choisir u'_δ pour avoir aussi

$$\begin{gathered} |F(Su_\delta) - F(Su'_\delta)| \le \delta, \\ |F(Su'_\delta) - F(Su)| \le (2+4k_1)\delta. \end{gathered} \tag{2.39}$$

La densité de $\mathscr{C}^{k+1}(\bar{\Omega})^m$ en résulte. ■

REMARQUE 2.2. Il est possible de trouver ε_1 vérifiant (2.25) et (2.35) pour un nombre fini de fonctions F. Il en résulte que u_δ peut être choisi de manière que (2.21) ait lieu pour un nombre fini arbitraire de fonctions.

Nous ne savons pas si u_δ peut être choisi d'une manière indépendante de F (i.e. avoir (2.19), (2.20) et (2.21) avec une constante c_1 indépendant de F).

REMARQUE 2.3. Supposons que $S_1, \ldots, S_R$, soient d'autres opérateurs différentiels à coefficients constants, que $u \in X \cap L^p(\Omega)^m$ et en outre $S_i u \in \mathbf{L}^{p_i}(\Omega) = L^{p_i}(\Omega)^{l_i}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, \ldots, R$, $p = \max_i p_i$. Alors on vérifie aisément que u_δ peut être choisi de manière que l'on ait aussi:

$$|S_i u_\delta - S_i u|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le \delta, \qquad i = 1, \ldots, R. \tag{2.40}$$

En effect par l'analogue de (2.32) pour S_i:

$$\begin{aligned} |S_i u_\delta - (\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 S_i u))|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} &\le \sum_{j=2}^\infty |\rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j S_i u)|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} + \sum_{j=1}^\infty |\rho_{\varepsilon_j} * (u\bar{S}_i \phi_j) - u\bar{S}_i\phi_j|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \\ &\le \delta + \sum_{j=2}^\infty |\phi_j S_i u|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \\ &\le \delta + 3\,|S_i u|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega \setminus \Omega_0)} \le 4\delta \end{aligned}$$

compte tenu des hypothèses sur les supports des ϕ_j et pourvu que (comparer à (2.22) et (2.27)):

$$|S_i u|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega \setminus \Omega_0)} \le \delta, \tag{2.41}$$

$$|\rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 S_i u) - (\phi_1 S_i u)|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le \delta, \tag{2.42}$$

$$|\rho_{\varepsilon_j} * (u\phi_j) - (u\phi_j)|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le \delta 2^{-j}, \tag{2.43}$$

$$|\rho_{\varepsilon_j} * (u\bar{S}_i\phi_j) - (u\bar{S}_i\phi_j)|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le \delta 2^{-j}. \tag{2.44}$$

D'autre part d'après (2.41), (2.42) et les hypothèses sur ϕ_1:

$$|S_i u - \rho_{\varepsilon_1} * (\phi_1 Su)|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le 2\delta$$

d'où

(2.45) $$|S_i u - S_i u_\delta|_{\mathbf{L}^{p_i}(\Omega)} \le 6\delta.$$

Avec (2.43), nous obtenons

(2.46) $$|u - u_\delta|_{L^p(\Omega)^m} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\rho_{\varepsilon_j} * (\phi_j u) - (\phi_j u)|_{L^p(\Omega)^m} \le \delta. \qquad \blacksquare$$

2.4. *Autres résultats de densité* (*II*). Notre dernier résultat précise le résultat du Théorème 2.2 dans le cas où l'on peut définir la trace sur Γ des fonctions de X: Nous voulons montrer que si u est à trace nulle, alors on peut choisir les u_δ dans (2.19)–(2.21) de manière que ces fonctions aient aussi une trace nulle sur Γ.

Les hypothèses sont les suivantes:

(2.47) Il existe un opêrateur γ linéaire continu de $(X, \mathcal{T})$ dans $L^1(\Gamma)^m$ et pour tout $u \in X \cap \mathscr{C}(\bar{\Omega})^m$, $\gamma u = u_{|\Gamma}$.

Il existe deux constantes c_1, c_2 ne dépendant que de Ω telles que:

(2.48) $$\frac{1}{\eta}\int_{\Omega_2\setminus\Omega_\eta} |u|\,dx \le c_1\left\{\int_{\Gamma_2} |u|\,dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_{c_2\eta}} |Su|\right\},$$

où

(2.49) $$\Omega_\eta = \{x \in \Omega, d(x, \Gamma) > \eta\}.$$

Nous posons

(2.50) $$X_0 = \{u \in X, \gamma u = 0\},$$

et nous appelons X_{0f} l'espace X_0 muni de la topologie induite par X_f (cf. (2.18)). Nous avons alors

THÉORÈME 2.3. *Nous supposons que Ω est un ouvert de classe $\mathscr{C}^1$, que f vérifie* (1.9), (1.11), *et que les conditions* (2.47), (2.48) *sont satisfaites.*

Alors $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^m$ est dense dans $X \circ f$.

Démonstration. Soit $u \in X_0$ et $\delta > 0$ fixé. Nous reprenons la démonstration du Théorème 2.2 avec à présent pour ensembles Ω_j $(j \ge 1)$, les ensembles

$$\Omega_j = \left\{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) > \frac{c_2 2^{-j}}{r}\right\},$$

où $r > 0$ est assez grand pour que (2.22) ait lieu.

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

Nous définissons à présent (comparer à (2.24)):

$$u_{\delta N}=\sum_{j=0}^{N-1}\rho_{\varepsilon_j}*(\phi_j u) \tag{2.51}$$

et le choix des ε_j est le même que précédemment, tandis que le choix de N va être précisé ci-après.

Nous comparons u et $u_{\delta N}$. Nous avons (cf. (2.31)):

$$\begin{aligned}|u-u_{\delta N}|_{L^1(\Omega)^m}&\le|u-u_\delta|_{L^1(\Omega)^m}+\sum_{j=N}^{\infty}|\rho_{\varepsilon_j}*(\phi_j u)|_{L^1(\Omega)^m}\\ &\le\delta+\sum_{j=N}^{\infty}|\phi_j u|_{L^1(\Omega)^m}\\ &\le\delta+|u|_{L^1(\Omega\setminus\Omega_{N-1})^m}\\ &\le 3\delta.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Nous comparons ensuite Su et $Su_{\delta N}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega|Su|-\int_\Omega|Su_{\delta N}|\right|&\le(\text{cf. }(2.20))\\ &\le 4\delta+\left|\int_\Omega|Su_\delta|-\int_\Omega|Su_{\delta N}|\right|\\ &\le 4\delta+\sum_{j=N}^{\infty}\int_\Omega|\rho_{\varepsilon_j}*(S(\phi_j u))|.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Mais $S(\phi_j u)=(\bar S\phi_j)u+\phi_j Su$ et

$$\sum_{j=N}^{\infty}\int_\Omega|\rho_{\varepsilon_j}*(\phi_j(Su))|\le\sum_{j=N}^{\infty}\int_\Omega|\phi_j(Su)|\le\int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}}|Su|\le\delta,$$

et par ailleurs on peut choisir ϕ_j de manière que

$$|\bar S\phi_j|\le c_3 2^j, \tag{2.54}$$

où c_3 ne dépend que de Ω_0 et Ω, donc de u et Ω. Alors (2.53) donne:

$$\left|\int_\Omega|Su|-\int_\Omega|Su_{\delta N}|\right|\le 5\delta+c_3 2^N\int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}}|u|\,dx. \tag{2.55}$$

Avec (2.48) et puisque la trace de u sur Γ est nulle, il vient

$$2^N\int_{\Omega\setminus\Omega_{N-1}}|u|\,dx\le\frac{c_1 r}{2}\int_{\Omega\setminus\Omega_{\rho N}}|Su|$$

où $\rho_N=c_2 2^{-N-1}/r$. Si donc nous prenons N assez grand pour que $c_2 2^{-N-1}<1$,

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press

nous aurons

$$2^N \int_{\Omega \setminus \Omega_{N-1}} |u|\, dx \leq \frac{c_1 r}{2} \delta$$

et il vient au lieu de (2.20)

$$\left| \int_\Omega |Su| - \int_\Omega |Su_{\delta N}| \right| \leq c' \delta, \tag{2.56}$$

$c' = 5 + c_1 c_3 r/2$.

De même, procédant comme pour (2.21), on parvient à

$$|F(Su_{\delta N}) - F(Su)| \leq c'' \delta, \tag{2.57}$$

et le théorème est prouvé. ■

REMARQUE 2.4. (i) Nous pouvons formuler des observations analogues aux Remarques 2.2 et 2.3.

(ii) Si $u, \theta \in X$, $\gamma u = \gamma \theta$, alors en appliquant le Théorème 2.3 à $v = u - \theta$, nous voyons qu'il existe une suite $u_\delta = v_\delta + \theta$, $v_\delta \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)^m$, qui converge vers v au sens de X_f (c'est-à-dire donnant lieu à (2.19)–(2.21). La régularité de la suite u_δ sera alors la même que la régularité de θ.

3. **Application à la mecanique (plasticité).** Dans le cas des équations de la plasticité, on est amené (cf. [14]) à considérer l'espace $BD(\Omega)$ (Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ, $n = 2$ ou 3), qui est constitué des fonctions $u \in L^1(\Omega)^n$, telles que

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \in M_1(\Omega), \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.1}$$

D'autre part on définit une fonction Φ comme suit: soit K un ensemble donné dans l'espace E des tenseurs symétriques d'ordre 2, tel que

$$K \subset E \text{ est convexe fermé,} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} K_D = K \cap E_D \text{ est borné et contient 0 comme un point intérieur, } E_D \\ \text{est le } \textit{sous-espace} \text{ de } E \text{ formé des tenseurs symétriques à trace nulle.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Pour tout $\xi \in E$, on pose

$$\Phi(\xi) = \Phi(\xi^D) = \operatorname*{Sup}_{\eta^D \in K^D} \left(\xi \cdot \eta^D - \frac{1}{4a} \eta^D \cdot \eta^D \right), \tag{3.4}$$

où $a > 0$ est une constante, η^D est le déviateur de η ($\eta^D = \eta - \alpha I$, $\alpha =$ trace η/n, trace $\eta^D = 0$), et d'autre part le produit scalaire dans E est

$$\xi \cdot \eta = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} \eta_{ij}. \tag{3.5}$$

On peut montrer (cf. [15]) qu'il existe k_0 et $k_1, 0<k_0\le k_1<+\infty$, tels que

$$k_0(|\xi^D|-1)\le\Phi(\xi)\le k_1(|\xi^D|+1), \qquad \forall\xi\in E \tag{3.6}$$

si bien que la fonctionnelle:

$$J(u)=\int_\Omega \Phi(\varepsilon^D(u))\,dx, \tag{3.7}$$

est parfaitement définie de manière élémentaire lorsque les $\varepsilon_{ij}(u)$ sont des fonctions sommables.

Pour $u\in BD(\Omega)$, on peut définir $J(u)$ à l'aide de (1.17) où μ est remplacé par $\varepsilon^D(u)$ et f^* par Φ^*:

$$J(u)=\mathrm{Sup}\left\{\int_\Omega \varepsilon^D(u)\cdot v-\frac{1}{4a}\int_\Omega v^D\cdot v^D\,dx\right\},$$

où le supremum est pour l'espace des tenseurs $v=(v_{ij})$ à composantes $v_{ij}\in \mathscr{C}_0(\Omega)$, avec $v_{ij}^D(x)\in K^D, \forall x\in\Omega$. Cela fait de J une fonction convexe s.c.i. et finie sur $BD(\Omega)$. D'autre part d'après le Théorme 2.2, si $u\in BD(\Omega)$, il existe une suite u_j dans $\mathscr{C}^k(\bar\Omega)^n$ $(k\ge 1)$, telle que pour $j\to\infty$:

$$u_j\to u \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega)^n \tag{3.9}$$

$$J(u_j)\to J(u) \tag{3.10}$$

pourvu que l'ouvert Ω soit de classe $\mathscr{C}^k$.

On est aussi amené, pour la plasticité à utiliser le Théorème 2.3 (cf. [18]), la vérification des hypothèses (2.47)–(2.48) étant respectivement faites dans [14] et [19].

Bibliographie

1. N. Bourbaki, *Topologie Genérale, Livre III*, Hermann, Paris (1964).
2. N. Bourbaki, *Intégration, Livre VI*, Hermann, Paris (1965).
3. Brézis, H., *Intégrales Convexes dans les Espaces de Sobolev*, Israel J. Math., **13** (1972), p. 9–23.
4. I. Ekeland et R. Temam, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris (1974); North-Holland, Amsterdam (1976) (en anglais).
5. E. Giusti, *Minimal Surfaces and functions of Bounded Variation*, Notes de cours rédigées par G. H. Williams, Department of Mathematics, Australian National University, Canberra, 10 (1977).
6. C. Goffman and J. Serrin, *Sublinear Functions of Measures and Variational Integrals*, Duke Math. J., **31** (1964), p. 159–178.
7. M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, London (1964).
8. H. Matthies, G. Strang, and E. Christiansen, *The saddle point of a differential program, in "Energy methods in finite element analysis,"* R. Glowinski, E. Rodin, O. C. Zienkiewicz, éditeurs, John Wiley, New York, 1979.
9. J. J. Moreau, *Fonctionnelles Convexes*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France (1966).
10. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton (1970).

11. R. T. Rockafellar, *Integral Functionals, normal integrands and measurable selections, dans Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, Lecture Notes in Math., vol. 543, Springer-Verlag, Heidelberg (1976).

12. R. T. Rockafellar, *Integral which are convex functionals I and II*, Pacific J. Math., **24** (1966), p. 525–539 et **39** (1971), p. 439–469.

13. P. Suquet, *Existence et régularité des solutions des équations de la plasticité parfaite*, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris VI (1978) et C.R.Ac.Sc. Paris, 286, Série D, (1978), p. 1201–1204.

14. G. Strang et R. Temam, *Functions of bounded deformation*, Arch. Rat. Mech. Anal., 75 (1980) p. 7–21.

15. G. Strang et R. Temam, *Duality and Relaxation in plasticity*. Journal de Mécanique, 19 (1980) p. 493–527.

16. R. Temam, *Applications de l'Analyse Convexe au Calcul des Variations, dans Nonlinear Operator and the Calculus of Variations*, Lecture Notes in Math., vol. 543, Springer-Verlag, Heidelberg (1976).

17. R. Temam, *Mathematical Problems in Plasticity, dans "Complementarity Problems and variational Inequalities"* F. Gianessi, Cottle, J. L. Lions, editors, John Wiley, New York, 1979.

18. R. Temam, *Existence theorems for the variational problems of plasticity*, dans *Nonlinear problems of Analysis in Geometry and Mechanics*, Atteia Bancel et Gumowski, ed., Pitman, London, 1981.

19. R. Temam, *On the continuity of the trace of vector functions with bounded deformation*, Applicable Analysis, 11 (1981), p. 291–302.

Analyse Numérique et Fonctionelle
CNRS et Université Paris-Sud
Bâtiment 425, 91405-Orsay
France

https://doi.org/10.4153/CMB-1982-058-7 Published online by Cambridge University Press