Canad. J. Math. Vol. **61** (5), 2009 pp. 1118–1150

Petits points d'une surface

Corentin Pontreau

Résumé. Pour toute sous-variété géométriquement irréductible V du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$, on sait qu'en dehors d'un nombre fini de translatés de tores exceptionnels inclus dans V, tous les points sont de hauteur minorée par une certaine quantité $q(V)^{-1} > 0$. On connaît de plus une borne supérieure pour la somme des degrés de ces translatés de tores pour des valeurs de $q(V)$ polynomiales en le degré de V. Ceci n'est pas le cas si l'on exige une minoration quasi-optimale pour la hauteur des points de V, essentiellement linéaire en l'inverse du degré.

Nous apportons ici une réponse partielle à ce problème : nous donnons une majoration de la somme des degrés de ces translatés de sous-tores de codimension 1 d'une hypersurface V. Les résultats, obtenus dans le cas de $\mathbb{G}_m^3$, mais complètement explicites, peuvent toutefois s'étendre à $\mathbb{G}_m^n$, moyennant quelques petites complications inhérentes à la dimension n.

1 Introduction

Soit n un entier positif non nul. Dans la suite, nous considérerons le plongement naturel de $\mathbb{G}_m^n$ dans $\mathbb{P}^n$, défini par $\iota\colon (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto (1:\alpha_1:\cdots:\alpha_n)$. Dans la suite $\mathbb{G}_m^n$ désignera $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$. Étant donnée une sous-variété algébrique V de $\mathbb{G}_m^n$, nous noterons respectivement $\hat{h}(V)$ et $\deg(V)$ la hauteur normalisée (définie dans [8, 9]) et le degré de l'adhérence de Zariski de $\iota(V)$ dans $\mathbb{P}^n$. En particulier la hauteur normalisée d'un point $\boldsymbol{\alpha}$ de $\mathbb{G}_m^n$ sera la hauteur de Weil logarithmique et absolue de $\iota(\boldsymbol{\alpha})$ (avec la norme du sup aux places archimédiennes) ; nous la noterons simplement $h(\boldsymbol{\alpha})$. De plus, pour tout polynôme F non nul à coefficients algébriques, $h(F)$ désignera également la hauteur de Weil du point projectif défini par ses coefficients.

La conjecture de Lehmer nous dit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que tout point $\alpha \in \mathbb{G}_m$ qui n'est pas de torsion vérifie

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}.$$

Nous utiliserons une autre quantité, qui coïncide avec la hauteur normalisée en dimension 1 : le *minimum essentiel*. Pour tout ensemble algébrique V et tout réel $\theta > 0$, notons $V(\theta) := \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\}$. Le minimum essentiel $\hat{\mu}_{\text{ess}}(V)$ est alors défini comme la borne inférieure des $\theta > 0$ pour lesquels $V(\theta)$ est Zariski-dense dans V. On a ainsi

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) = \sup_{\substack{Y \subseteq V \\ \operatorname{codim}_V(Y)=1}} \inf\{h(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{\alpha} \in V \setminus Y\}.$$

Reçu par la rédaction le 24 février, 2006; revu le 7 juillet , 2006.
Classification (AMS) par sujet: Primary: 11G50; secondary: 11J81, 11G40.
Mots clés: Hauteur normalisée, groupe multiplicatif, problème de Lehmer, petits points.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Rappelons que minimum essentiel et hauteur normalisée sont très liés, comme nous le dit le cas particulier d'un résultat de Zhang (*cf.* [16, theorem 5.2] et [17, theorem 1.10] [1]) :

$$\frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)(\dim(V)+1)} \leq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)}. \tag{1.1}$$

Pour énoncer des conjectures analogues à celle de Lehmer en dimensions supérieures, il apparaît plus naturel d'utiliser un autre invariant que le degré : l'*indice d'obstruction* de V par rapport à un corps $k \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, noté $\omega_k(V)$. Celui-ci est défini comme le minimum des degrés d'une hypersurface définie sur k contenant V.

Conjecture 1.1 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas contenue dans aucune union de translatés de sous-tores [2] par des points de torsion, on ait*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)}.$$

Notons que si $n = 1$ et V est réduite à un point $\alpha \in \mathbb{G}_m$, nous avons $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) = h(\alpha)$ et $\omega_{\mathbb{Q}}(V) = [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$, autrement dit il s'agit bien là d'une généralisation de la conjecture de Lehmer. Dans [1,2], les auteurs montrent la conjecture 1.1 à un facteur « log » près.

Théorème 1.2 *Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une constante $c(n) > 0$ telle que, pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ définie sur $\mathbb{Q}$, qui n'est contenue dans aucune union de translatés de sous-tores par un point de torsion, on ait*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega_{\mathbb{Q}}(V)} \cdot \left(\log(3\omega_{\mathbb{Q}}(V))\right)^{-\kappa(n)},$$

où $\kappa(n) := 2n(n+1)!^n - 1$.

Remarquons que les hypothèses ici ne sont pas *a priori* minimalistes, car seules les variétés qui sont précisément union de translatés de sous-tores par des points de torsion sont de hauteur nulle. Nous ne nous étendrons pas sur ce sujet, notons néanmoins que le cas des variétés contenues dans une union de translatés de sous-tores par des points de torsion se ramène principalement au même problème en dimension inférieure.

Dans la suite, nous nous intéressons aux minorations de la hauteur de variétés de type géométrique, *i.e.*, indépendantes de leurs corps de définition. On peut conjecturer le résultat suivant.

[1] Dans [7, corollaire 3.2], on pourra également trouver une preuve plus élémentaire dans le cadre des variétés abéliennes, mais qui s'adapte bien au cas de $\mathbb{G}_m^n$.

[2] Un tore désignera un groupe algébrique connexe.

Conjecture 1.3 *Soit V une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$. Si V n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{c'(n)}{\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V)} ,$$

où $c(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n.

Comme dans le cas arithmétique, on ne peut pas donner de minoration du minimum essentiel d'une variété géométriquement irréductible quelconque, ne dépendant que de son indice d'obstruction. Remarquons tout d'abord que le cas des translatés de sous-tores se ramène essentiellement au problème de Lehmer pour les points de $\mathbb{G}_m^n$; dans le cas général, il n'est pas possible de minorer la hauteur d'une sous-variété V uniquement en fonction de son degré géométrique si l'on ne fait aucune hypothèse sur V. Pour voir cela, considérons une suite de points $(\boldsymbol{\alpha}_i)_i$ de $\mathbb{G}_m^n$ tels que $h(\boldsymbol{\alpha}_i)$ tende vers 0 quand i tend vers l'infini (par exemple $\boldsymbol{\alpha}_i = (3^{1/i}, \dots, 3^{1/i})$). Nous avons, d'après (1.1),

$$\hat{h}(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H) \leq n \deg(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H)\hat{\mu}_{\text{ess}}(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot H) \leq n \deg(H) h(\boldsymbol{\alpha}_i).$$

On peut toutefois énoncer des conjectures semblables à la conjecture 1.3 pour toute variété V qui n'est pas un translaté d'un sous-tore, en considérant un invariant plus fin, l'*indice d'obstruction relatif*, qui prend en compte le plus petit translaté d'un sous-tore contenant la variété. On pourra à ce propos consulter [8, conjecture 1.1] et [3, conjecture 1.2].

De nouveau, dans [3, théorème 1.4], les auteurs montrent la conjecture 1.3 à un « ε » près.

Théorème 1.4 *Soit W une sous-variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k. Si W n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$, alors*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(W) \geq \frac{c'(n)}{\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W)} \cdot \big(\log(3\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W))\big)^{-\lambda(k)} ,$$

où $c(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n, et $\lambda(k) := (9(3k)^{k+1})^k$.

Il est même possible ici d'affaiblir les hypothèses, quitte à perdre un peu sur le terme d'erreur. En effet considérons une variété V, *composante isolée* d'une intersection d'hypersurfaces de degré au plus[3] ω. Dans [5, théorème 1.5, lemme 2.2], les auteurs montrent que si W est une sous-variété de V, qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore de V, alors on a

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(W) \geq \frac{c'(n)}{\omega} \cdot \big(\log(3\omega)\big)^{-\lambda(n-1)} , \tag{1.2}$$

où $c'(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n. Remarquons qu'il s'agit bien là d'une généralisation du théorème 1.4 ; il suffit pour cela de prendre pour V une hypersurface de degré minimal contenant W, auquel cas on a $\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(W) = \omega$.

[3]Dans [5], ce nombre ω est appelé *indice de quasi-interpolation* de V.

Notons que dans ces deux résultats nous n'avons aucune information sur les points, ceux-ci étant trivialement des translatés de sous-tores. Néanmoins on peut montrer que, si l'on note V° la variété V privée de tous les translatés de sous-tores non triviaux contenus dans V, il n'existe au plus qu'un nombre fini de points de « petite » hauteur dans V°. Plus précisément, en 1995, E. Bombieri et U. Zannier [6] montrent que si V est l'intersection d'hypersurfaces de degré $\leq d$, alors il existe deux nombres $q > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble des points de V°, de hauteur $\leq \varepsilon$, est fini, de cardinal au plus q. Notons qu'ils utilisent une hauteur légèrement différente h_s, correspondant au plongement $s\colon \mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}_1^n$; cette hauteur permet de définir, via l'application $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto h_s(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}^{-1})$, une semi-distance sur $\mathbb{G}_m^n$. Il est facile de voir que cette hauteur est équivalente à la nôtre, en effet pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n$ nous avons $\frac{1}{n} h(\boldsymbol{\alpha}) \leq h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq n h(\boldsymbol{\alpha})$.

Ici, ε et q dépendent de n et de d et sont effectivement calculables. Peu après, W. M. Schmidt [15, theorem 4] obtient notamment une version explicite de ce résultat.

Théorème 1.5 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, intersection d'hypersurfaces de degré $\leq d$, notons $N(d) := \binom{n+d}{d}$ et $q(V) := \exp\bigl((4n)^{2dN(d)}\bigr)$. Alors les points $\boldsymbol{\alpha} \in V^\circ$ tels que $h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq q(V)^{-1}$ sont au plus $q(V)$.*

Remarquons que V° peut être vide, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ de stabilisateur discret et soit

$$V := \mathcal{C} \times \mathbb{G}_m \subseteq \mathbb{G}_m^3.$$

Comme V est une union infinie de translatés de sous-tores non triviaux, nous avons $V^\circ = \varnothing$.

Plus récemment, S. David et P. Philippon [8, théorème 1.3] améliorent le résultat de W. M. Schmidt.

Théorème 1.6 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$, et notons*

$$q(V) := \Bigl(2^{n+4\dim(V)+22} \deg(V)\bigl(\log(\deg(V)+1)\bigr)^{2/3}\Bigr)^{7^{\dim(V)}}.$$

Alors les points $\boldsymbol{\alpha} \in V^\circ$ tels que $h_s(\boldsymbol{\alpha}) \leq q(V)^{-3/4}$ sont au plus $q(V)$.

En fait, comme les auteurs le remarquent [5], un résultat plus précis est montré dans [8] (voir la proposition 5.6) : « l'ensemble des points de V de hauteur inférieure ou égale $q(V)^{-3/4}$ est contenu dans une réunion finie de translatés de sous-tores $B_1, \dots, B_m$ contenus dans V tels que $\sum_{j=1}^m \deg(B_j) \leq q(V)$ ». L'avantage de ce dernier résultat est que l'on possède des informations sur V, même si V° est vide. Ceci nous amènent à utiliser le dernier invariant géométrique $\hat{\mu}^\circ_{\dim(V)}(V)$ introduit dans [8] que nous noterons pour simplifier $\mu^\circ(V)$ comme dans [5] :

$$\hat{\mu}^\circ(V) := \sup_Y \inf\{h(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\alpha} \in V \setminus Y\},$$

où Y parcourt l'ensemble des unions *finies* de translatés de sous-tores, en particulier Y peut contenir un nombre fini de points.

Dans [5, lemme 2.2], les auteurs donnent une caractérisation simple de $\mu^\circ(V)$, plus précisément ils montrent l'égalité

$$\hat{\mu}^\circ(V) = \inf_W \hat{\mu}_{\text{ess}}(W), \tag{1.3}$$

où W parcourt l'ensemble des sous-variétés de V qui ne sont pas contenues dans un translaté d'un sous-tore de V (en particulier $\dim W > 0$). En utilisant ce résultat et l'inégalité (1.2), les auteurs parviennent dans le même article au résultat suivant.

Théorème 1.7 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$,* composante isolée *d'une intersection d'hypersurfaces de degré au plus ω. On a*

$$\hat{\mu}^\circ(V) \geq \frac{c'(n)}{\omega} \cdot \big(\log(3\omega)\big)^{-\lambda(n-1)},$$

où $c'(n) > 0$ ne dépend que de n, et $\lambda(k) := (9(3k)^{k+1})^k$.

En particulier, il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \dots, B_m$ contenus dans V en dehors desquels tout point de V a une hauteur minorée par la quantité donnée dans le théorème. On peut alors légitimement se demander s'il est possible d'obtenir, comme dans [8], des informations sur le nombre, ou plutôt sur la somme des degrés des B_j. En effet, comme nous le remarquions plus haut, les auteurs montrent en fait [8] que $\hat{\mu}^\circ(V) \geq q(V)^{-3/4}$ et que les points de V de hauteur $\leq q(V)^{-3/4}$ sont contenus dans des translatés de sous-tores dont la somme des degrés est inférieure à $q(V)$. On ne sait pas grand chose dans le cas où l'on souhaite une minoration quasi-optimale du type du théorème 1.7, toutefois, on apportera une réponse partielle à ce problème dans le cas $\mathbb{G}_m^3$. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.8 *Soit V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ géométriquement irréductible de degré ω, qui n'est pas le translaté d'un sous-tore.*

Alors il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \dots, B_t$ de V tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus B_1 \cup \dots \cup B_t$, on ait

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}},$$

où $\omega' := \max\{16, \omega\}$. De plus, si $B_1, \dots, B_m$ sont de dimension 1 et $B_{m+1}, \dots, B_t$ de dimension 0, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq 2 \cdot 10^{100} \omega^2 (\log\omega')^{32}.$$

Bien que les résultats soient donnés dans $\mathbb{G}_m^3$, les arguments se généralisent bien à $\mathbb{G}_m^n$; plus précisément, dans le théorème 1.8, on pourrait obtenir de la même façon une majoration du même type pour les translatés de sous-tores de codimension 1 dans V, c'est-à-dire de codimension 2 dans $\mathbb{G}_m^n$. Cette limitation est motivée par le caractère partiel du résultat ; de plus, toutes les constantes étant explicitées ici, cela permet un allégement appréciable des calculs.

2 Plan de l'article

Nous étudions les cas de petites codimensions. Plus précisément nous donnons des informations sur la distribution des petits points d'une (hyper)surface de $\mathbb{G}_m^3$ (et en fait également de $\mathbb{G}_m^2$).

Nous reprenons l'idée de [12], inhérente à la codimension 2, donnée dans un cadre arithmétique (variétés définies sur $\mathbb{Q}$) que nous adaptons ici au cas géométrique. Dans l'idée de l'égalité (1.3), le premier objectif est d'obtenir une minoration du minimum essentiel des sous-variétés des $\mathbb{G}_m^3$, de dimension > 0, et ce sous des conditions minimales. On montre tout d'abord à la section 5 des minorations pour la hauteur des hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$, cas qui nous intéresse ici. Dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$, on montre en fait un résultat plus précis : on majore le nombre petits points d'une courbe qui n'est pas un translaté d'un sous-tore, ce qui est à peu près une version optimale du théorème 1.7 dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$. On obtient alors à la section 6 le résultat suivant, qui est une version explicite, pour les courbes de $\mathbb{G}_m^3$, du théorème 1.4.

Théorème 2.1 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C} \subset V$ une courbe, toutes deux géométriquement irréductibles. Si V et $\mathcal{C}$ ne sont pas translaté d'un sous-tore, alors*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) > \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}},$$

où $\omega' = \max\{16, \omega\}$.

Notons que si l'on compare ce résultat avec le théorème 1.4, l'hypothèse « $\mathcal{C}$ n'appartient à aucun translaté d'un sous-tore contenu dans V » se réduit ici à V et $\mathcal{C}$ ne sont pas un translaté d'un sous-tore.

Si γ désigne la quantité $\frac{10^{-97}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}$, nous aurons à ce stade montré que toute sous-variété W de V, qui n'est pas incluse dans un translaté d'un sous-tore contenu dans V, vérifie $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W) \geq \gamma$. Grâce à (1.3), on en déduit : $\mu^\circ(V) \geq \gamma$, autrement dit, il existe un nombre fini de sous-tores en dehors desquels tout point de V est de hauteur $\geq \gamma$. Il restera alors à majorer la somme des degrés de ces sous-tores de dimension 1 (ou plutôt de codimension 2) pour obtenir le théorème 1.8, ce qui fera l'objet de la section 7.

Nous développons dans un premier temps (section 4) les outils d'une démonstration de transcendance : nous utilisons un lemme de Siegel « absolu », nous donnant un polynôme s'annulant avec multiplicité sur une variété, indépendant de son corps de définition. Nous donnons ensuite des résultats d'extrapolation pour des polynômes à coefficients algébriques quelconques, puis un lemme de zéros pour des variétés géométriquement irréductibles.

Dans notre étude de la hauteur d'une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{G}_m^3$, nous aurons besoin d'une minoration de la hauteur des hypersurfaces géométriquement irréductibles de $\mathbb{G}_m^3$ et $\mathbb{G}_m^2$, ce que nous donnons à la section 5. Ce dernier cas nous permettra de traiter le cas où $\mathcal{C}$ est incluse dans un translaté d'un sous-tore de dimension 2 et de degré contrôlé.

Nous montrons le théorème 2.1 à la section 6. La stratégie est la suivante : par l'absurde on suppose la hauteur de $\mathcal{C}$ petite, on peut alors construire un polynôme s'annulant sur V avec multiplicité, de degré et de hauteur contrôlés via le lemme de Siegel absolu de la section 4 (corollaire 4.2). On extrapole ensuite en montrant que ce polynôme s'annule sur les translatés $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{C}$, où $\boldsymbol{\xi}$ parcourt un ensemble de points de pq-torsion, pour des nombres premiers p et q appartenant à deux certains ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Dans le cas géométrique, contrairement au cas arithmétique, on ne peut pas extrapoler sur des multiples $[pq]\mathcal{C}$, car cela ferait intervenir le corps de définition de $\mathcal{C}$, ce que l'on cherche précisément à éviter pour obtenir une minoration de type géométrique. L'idée est que dans le cas de $\mathbb{Q}$ (ou pour certains corps de nombres), on utilise une congruence du type $(F(x))^p \equiv F(x^p) \mod p$ lorsque F est un polynôme à coefficients entiers.

Nous construisons (section 6.3), à l'aide d'un lemme de zéros, des suites décroissantes $Y \supseteq Y_p \supseteq Y_{p,q}$ de sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^3$ contenant des translatés $\boldsymbol{\xi}_{pq} \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$, où p et q parcourent respectivement des ensembles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de nombres premiers. Pour tous p, q, deux parmi Y, Y_p, et $Y_{p,q}$ étant de même dimension, on obtient une sous-variété obstructrice Z_p, composante $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible de $Y_{p,q}$ ou de Y_p contenant des translatés $\boldsymbol{\xi}_{pq} \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$, et dont on contrôle le degré.

Notons que dans tous les cas, en utilisant notamment l'égalité

$$\bigcup_{\boldsymbol{\xi} \in \ker[pq]} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{C} = [pq]^{-1}[pq]\mathcal{C},$$

il est possible de montrer l'inégalité $\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}([pq]\mathcal{C}) < \omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathcal{C})$ pour un certain couple (p, q). Mais ceci n'est pas suffisant pour conclure. Pour ce faire, Amoroso et David utilisent un argument de descente pour arriver à une contradiction [3, 4].

Si une des variétés obstructrices Z_{p_0} est de codimension 2, alors Z_{p_0} est simplement un translaté de $\mathcal{C}$, auquel cas on obtient un encadrement du type

$$\operatorname{Card}(\mathcal{P}_2)^a \deg(\mathcal{C}) \ll \deg(Y_{p_0}) \leq \deg(F)^2 \ll (\log \deg(V))^b \deg(\mathcal{C}).$$

Ainsi, de par nos choix de paramètres, il vient une contradiction.

Sinon, la variété $\mathcal{C}$ étant de codimension 2, il ne reste qu'une possibilité : celle où toutes les variétés obstructrices Z_p sont de codimension 1. Dans la dernière partie du section 6.3, on travaille alors de nouveau avec la hauteur normalisée ; on majore celle de Z en fonction de la hauteur de notre fonction auxiliaire F, sur laquelle on a un bon contrôle : $\min_p p \cdot \hat{h}(Z_p) \ll h(F)$. Si aucun des Z_p n'est un translaté d'un sous-tore, on arrive à une contradiction en utilisant une minoration explicite de $\hat{h}(Z_p)$ pour l'ensemble de ces hypersurfaces Z_p (proposition 5.2). Dans le cas contraire, on se ramène dans le lemme 5.4 à une étude en dimension 2, auquel cas, via la proposition 5.1, on obtient une minoration de $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C})$.

Pour terminer, on s'attache á la section 7 à montrer le théorème 1.8 à proprement parler. On reprend ici l'idée de la section 6 : on construit d'abord un ensemble de variétés obstructrices contenant les translatés des sous-tores exceptionnels. On montre ensuite, en reprenant un lemme de la section précédente (lemme 5.4), que l'un d'eux au moins est de codimension 2, auquel cas, grâce au théorème de Bézout, on majore la somme des degrés de ces sous-tores.

3 Résultats auxiliaires

Nous rappelons ici quelques propriétés relatives à la multiplication d'une variété par un entier. Soit W une sous-variété géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$, et notons G_W son stabilisateur :

$$G_W := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{G}_m^n \mid \boldsymbol{\alpha} \cdot W = W\} = \bigcap_{\mathbf{y} \in W} \mathbf{y}^{-1} \cdot W.$$

Nous allons notamment voir que si p est un nombre premier ne divisant pas $|G_W/G_W^0|$, le nombre de composantes géométriquement irréductibles du stabilisateur G_W de W, alors le degré et la hauteur normalisée de $[p]W$ se comportent bien.

Lemme 3.1 *Pour tout réel x on note $\pi(x)$ le nombre de premiers inférieurs ou égaux à x. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a*

$$\pi(N) - \pi(N/2) \geq c_N \frac{N}{\log N}$$

où $c_N \geq 0{,}41$ si $N \geq 41$ et $c_N \geq 0{,}23$ si $N \geq 2$.

Démonstration Le théorème 1 de [14] nous donne

$$\forall x \geq 59, \quad \frac{x}{\log x} + \frac{3x}{2(\log x)^2} \geq \pi(x) > \frac{x}{\log x} + \frac{x}{2(\log x)^2}.$$

Si on note $c(N) := \log(N/2)/\log(N)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \pi(N) - \pi(N/2) &> \frac{N}{\log N} + \frac{N}{2(\log N)^2} - \Big(\frac{N}{2c(N)\log N} + \frac{3N}{4(c(N)\log N)^2}\Big) \\ &= \frac{N}{\log N}\Big(1 - \frac{1}{2c(N)} - \Big(\frac{3}{4c(N)^2} - \frac{1}{2}\Big)\frac{1}{\log N}\Big). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $N \geq 5000$, nous avons bien l'inégalité voulue et une vérification numérique pour les petites valeurs de N nous permet de conclure. ■

Comme nous le montrent les deux lemmes suivants, les translatés de sous-tores sont en quelques sortes les cas pathologiques de variétés, celles dont le stabilisateur est de dimension maximale. Nous reviendrons sur ce point dans notre lemme de zéros (lemme 4.5).

Lemme 3.2 *Pour toute sous-variété V de $\mathbb{G}_m^n$ on a*

$$\dim(G_V) \leq \dim(V) \quad \textit{et} \quad \deg(G_V) \leq \deg(V)^{\dim(V) - \dim(G_V) + 1}.$$

De plus, on a $\dim(G_V) = \dim(V)$ si et seulement si V est une union de translatés de sous-tores.

Lemme 3.3 *Soient W une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible, G_W son stabilisateur et $l > 0$ un entier. On a*

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

(i) $\hat{h}([l]^{-1}W) = l^{n-\dim(W)-1}\hat{h}(W)$ *et* $\deg([l]^{-1}W) = l^{n-\dim(W)}\deg(W)$ *;*

(ii) $\hat{h}([l]W) = \dfrac{l^{\dim(W)+1}}{|\ker[l] \cap G_W|}\hat{h}(W)$ *et* $\deg([l]W) = \dfrac{l^{\dim(W)}}{|\ker[l] \cap G_W|}\deg(W)$ *;*

(iii) $|\ker[l] \cap G_W| = l^{\dim(G_W)}|\ker[l] \cap (G_W/G_W^0)|$ *;*

(iv) *si* $\boldsymbol{\xi}$ *est un point de torsion, on a* $\hat{h}(\boldsymbol{\xi} \cdot W) = \hat{h}(W)$*.*

Démonstration Pour (i), (ii), et (iv), on pourra consulter [10, lemme 6] et [8, proposition 2.1].

Pour (iii), notons tout d'abord que l'on a

$$|\ker[l] \cap G_W| = |\ker[l] \cap G_W^0| \cdot |\ker[l] \cap (G_W/G_W^0)|.$$

Il nous suffit donc de remarquer que l'on a $|\ker[l] \cap G_W^0| = l^{\dim(G_W)}$. ■

Nous utiliserons plusieurs fois l'inégalité suivante, valable pour tous réels $a, b > 0$ et $x > 1$.

Lemme 3.4

$$\frac{x^a}{(\log x)^b} \geq \Big(\frac{ea}{b}\Big)^b.$$

4 Transcendance

Dans cette section ainsi que dans la section 6.3, de nouveau bon nombre de résultats sont proches de ceux que l'on peut trouver dans [3]. Comme dans [3], nous utiliserons *l'indice d'obstruction de* V *de poids* T, noté $\omega(T;V)$,

$$\omega(T;V) := \min\{(T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}\},$$

où le minimum est pris sur l'ensemble des sous-variétés propres et géométriquement irréductibles de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V. On peut montrer les inégalités suivantes (voir par exemple [3]) :

$$n^{-1}T^{1/\operatorname{codim}(V)}\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V) \leq \omega(T;V) \leq T\omega_{\overline{\mathbb{Q}}}(V).$$

Notations Pour tout $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n$, on notera $|\boldsymbol{\mu}| := \mu_1 + \cdots + \mu_n$ la *longueur* de $\boldsymbol{\mu}$ et

$$D_{\boldsymbol{\mu}} := \frac{1}{\boldsymbol{\mu}!}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\mu_1} \circ \cdots \circ \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\mu_n},$$

où $\boldsymbol{\mu}! := \mu_1! \cdots \mu_n!$. Ainsi, un polynôme F s'annulera en un point $\boldsymbol{\alpha}$ avec multiplicité au moins T si pour tout $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n$ de longueur au plus $T-1$, on a $D_{\boldsymbol{\mu}}(F)(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Soient $\mathbf{E}$ une partie de $\mathbb{G}_m^n$, L, T des entiers et k un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$, on notera $E_k(\mathbf{E}, L, T)$ le k-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans k de degré au plus L, et nuls sur $\mathbf{E}$ avec multiplicité T.

Énonçons tout d'abord un lemme de Siegel absolu.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Proposition 4.1 *Soient θ un réel > 0 et $\mathbf{E}$ un ensemble non vide de points de hauteur $\leq \theta$. Soient L et T deux entiers. Si $E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)$ est non réduit à $\{0\}$, alors il existe un polynôme $F \in E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)$ non nul tel que*

$$h(F) \leq \frac{r}{N-r}((T+n)\log(L+1) + L\theta) + \frac{1}{2}\log N,$$

où $N := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ et $r := \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)$.

Démonstration Pour cette preuve, il s'agit ici principalement de la même démarche que pour [3, théorème 2.2], en remplaçant leur S par $E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)$. Comme dans [3], quitte à ne considérer que les points de $\mathbf{E}$ de degré majoré par D, pour un certain entier D suffisamment grand, on peut supposer par le théorème de Northcott que $\mathbf{E}$ est fini. On obtient alors

$$h(F) \leq \frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)}{\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathbf{E}, L, T)}((T+n)\log(L+1) + L\theta) + \frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}. \quad \blacksquare$$

Corollaire 4.2 *Soit $V \subset \mathbb{G}_m^n$ une variété géométriquement irréductible. Soient L et T deux entiers tels que $L + 1 \geq nT\omega(T; V)$. Pour tout réel $\theta > 0$, il existe un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $V(\theta)$ avec multiplicité au moins T tel que*

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}((T+n)\log(L+1) + L\theta) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

En particulier, si $T \geq 10^3 n$ et $\theta \leq 10^{-3}\frac{T}{L}$, alors

$$h(F) \leq \left(1{,}01 + \frac{n}{2}\right)\log(L+1). \tag{4.1}$$

Démonstration En appliquant la proposition 4.1 à $\mathbf{E} := V(\theta)$, on obtient

$$h(F) \leq \frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V(\theta), L, T)}{\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V(\theta), L, T)}((T+n)\log(L+1) + L\theta) + \frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}.$$

Soit Z est une variété propre et géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ contenant V telle que $\omega(T; V) = (T\deg(Z))^{1/\operatorname{codim}(Z)}$. Le lemme 2.5 de [3] nous dit que

$$\binom{L+n}{L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V, L, T) \leq \binom{T-1+\operatorname{codim}(Z)}{\operatorname{codim}(Z)}\binom{L+\dim(Z)}{\dim(Z)}\deg(Z).$$

Rappelons que l'on a $\binom{L+n}{L} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V, L, 1) = H_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{P}, L)$, où $\mathfrak{P}$ est l'idéal de définition sur k de la clôture projective de V et $H_{\overline{\mathbb{Q}}}(\mathfrak{P}, L)$ est la fonction de Hilbert de $\mathfrak{P}$. On obtient alors, si k' désigne la codimension de Z,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\binom{L+n}{n}} &\leq \binom{T-1+k'}{k'}\binom{L+n-k'}{n-k'}\binom{L+n}{n}^{-1}\deg(Z)\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} \times \frac{(T+k'-1)\cdots T}{(L+n)\cdots(L+n-k'+1)}\deg(Z).\end{aligned}$$

En utilisant, pour $j = 0, \dots k' - 1$, l'inégalité $T + j \leq (j+1)T$, on en déduit que

$$\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\binom{L+n}{n}} \leq \Big(\frac{nT}{L+1}\Big)^{k'} \deg(Z) = \frac{1}{T}\Big(\frac{nT\omega(T;V)}{L+1}\Big)^{k'} \leq \frac{1}{T},$$

d'où

$$\frac{\binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)}{\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)} \leq \frac{1}{T-1}.$$

Comme $\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E_{\overline{\mathbb{Q}}}(V(\theta), L, T) \geq \dim_{\overline{\mathbb{Q}}} E(V, L, T)$, en reprenant la majoration de la hauteur de notre fonction auxiliaire F on obtient

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}((T+n)\log(L+1) + L\theta) + \frac{1}{2}\log\binom{L+n}{n}.$$

Si maintenant θ est inférieur à $10^{-3}\frac{T}{L}$ il vient, puisque $\binom{L+n}{n} \leq (L+1)^n$, que

$$h(F) \leq \frac{1}{T-1}((T+n)\log(L+1) + 10^{-3}T) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Par hypothèses, on a $L+1 \geq nT\omega(T;V) \geq e$, ainsi

$$h(F) \leq \frac{1{,}001T+n}{T-1}\log(L+1) + \frac{n}{2}\log(L+1).$$

Enfin on a supposé $T \geq 10^3 n$, ainsi $\frac{1{,}001T+n}{T-1} \leq 1{,}01$, d'où l'inégalité (4.1). ∎

Le point clef de l'extrapolation ici est la « proximité » p-adique d'une racine p-ième de l'unité et de 1 ; plus précisément si p est un nombre premier, alors le polynôme $(X-1)^p$ est congru à $X^p - 1$ modulo p, ainsi il en est de même de $(X-1)^{p-1}$ et $\phi_p(X)$. En évaluant ces derniers en une racine p-ième ξ de l'unité, on obtient

$$\forall\, v \mid p,\ |\xi - 1|_v \leq p^{-1/(p-1)} \leq p^{-1/p}. \tag{4.2}$$

Proposition 4.3 *Soient $\theta > 0$, T, L des entiers et* $\mathbf{E}$ *un ensemble de points de hauteur inférieur ou égale à θ. Soient $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]_{\leq L}$ un polynôme non nul s'annulant sur* $\mathbf{E}$ *avec multiplicité au moins T. Alors, pour tout nombre premier p et tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$, l'ordre d'annulation T^* de F sur $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{E}$ vérifie*

$$T^*(1 + \log(L+1)) \geq T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta.$$

Démonstration Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{E}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\boldsymbol{\lambda}| = T^*$ tel que $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha})$ soit non nul. Si G est un polynôme à coefficients algébriques, d'après la formule de Taylor nous avons : $G(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{N}^n} D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}$. Si v est une place divisant p, alors $|D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha}) \cdot (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v$ est majoré par

$$|G|_v \max\{1, |\alpha_1|_v, \dots, |\alpha_n|_v\}^{\deg(G) - |\boldsymbol{\mu}|} \max\{|\alpha_1\xi_1 - \alpha_1|_v, \dots, |\alpha_n\xi_n - \alpha_n|_v\}^{|\boldsymbol{\mu}|},$$

soit d'après l'inégalité (4.2)

$$|D_{\boldsymbol{\mu}}(G)(\boldsymbol{\alpha})\cdot(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v \le |G|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^{\deg(G)} p^{-|\boldsymbol{\mu}|/p}$$

Appliquons ceci à $G = D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$,

$$\begin{aligned}|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})|_v &\le \max_{|\boldsymbol{\mu}|\ge T-T^*} |D_{\boldsymbol{\mu}}(D_{\boldsymbol{\lambda}}(F))(\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{\mu}}|_v\\ &\le |F|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^L\, p^{-(T-T^*)/p},\end{aligned}$$

car $D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)$ est nul en $\boldsymbol{\alpha}$ à un ordre $\ge T-T^*$.

Supposons maintenant v archimédienne. Si $F(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\nu}|\le L} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathbf{x}^{\boldsymbol{\nu}}$, alors on a

$$D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\nu}|\le L} \binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{\nu}}\cdot\mathbf{x}^{\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\lambda}}.$$

De plus, comme $\sum_{\nu=1}^{L}\binom{\nu}{\lambda} = \binom{L+1}{\lambda+1} \le (L+1)^{\lambda+1}$, on a

$$\sum_{|\boldsymbol{\nu}|\le L}\binom{\boldsymbol{\nu}}{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{|\boldsymbol{\nu}|\le L}\binom{\nu_1}{\lambda_1}\cdots\binom{\nu_n}{\lambda_n} \le (L+1)^{|\lambda|+n}.$$

On en déduit

$$|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})|_v \le |F|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|}\cdot(L+1)^{|\lambda|+n}.$$

Pour résumer :

$$|D_{\boldsymbol{\lambda}}(F)(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\alpha})|_v \le \begin{cases} |F|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|} & \text{si } v\nmid\infty, p,\\ |F|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|}\, p^{-(T-T^*)/p} & \text{si } v\mid p,\\ |F|_v \max\{1,|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v\}^{L-|\boldsymbol{\lambda}|}(L+1)^{T^*+n} & \text{si } v\mid\infty.\end{cases}$$

On déduit alors de la formule du produit

$$0 \le \frac{-(T-T^*)}{p}\log p + h(F) + (T^*+n)\log(L+1) + Lh(\boldsymbol{\alpha}),$$

d'où

$$T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta \le T^*\Big(\frac{\log p}{p} + \log(L+1)\Big). \qquad \blacksquare$$

Corollaire 4.4 *Soit V une sous-variété de $\mathbb{G}_m^n$. Soient T, L des entiers et $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\le L$, nul sur V avec multiplicité au moins T.*

Étant donnés un nombre premier p et un $\boldsymbol{\xi}\in\ker[p]$, l'ordre d'annulation T^* de F sur $\boldsymbol{\xi}\cdot V$ vérifie

$$T^*\big(1+\log(L+1)\big) \ge T\frac{\log p}{p} - h(F) - n\log(L+1) - L\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Démonstration Il suffit d'appliquer la proposition 4.3 à l'ensemble

$$\mathbf{E} := V(\theta) = \{\boldsymbol{\alpha} \in V \mid h(\boldsymbol{\alpha}) \leq \theta\},$$

qui est Zariski dense dans V si $\theta > \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$, et de faire tendre θ vers $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$. ■

Lemme 4.5 *Soient W une sous-variété propre de $\mathbb{G}_m^n$ géométriquement irréductible, $N, l_0 > 0$ deux entiers. On suppose que l_0 n'est divisible par aucun nombre premier de $[N/2, N]$ et est premier avec $|G_W/G_W^0|$.*

Si $N \geq 10^3 n \log\big(\max\{16, \deg(W)\}\big)$ et si W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$, alors

$$\deg\Big(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0 p]^{-1}[l_0 p]\cdot W\Big) \geq 0{,}4\frac{N}{\log N}\Big(\frac{l_0 N}{2}\Big)^{n+1-\dim(W)}\deg(W).$$

Démonstration Pour tout premier p dans $[N/2, N]$, on a

$$[l_0 p]^{-1}[l_0 p]\cdot W = \bigcup_{\boldsymbol{\zeta}_{l_0},\boldsymbol{\zeta}_p} \boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p \cdot W,$$

où l'union est prise sur les $(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}, \boldsymbol{\zeta}_p)$ dans $\ker[l_0] \times \ker[p]$. De plus tous les translatés $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p \cdot W$ de W sont géométriquement irréductibles de degré $\deg(W)$. Ainsi, il nous faut ici étudier à quelles conditions deux tels translatés de W sont égaux.

Considérons donc deux premiers p, p' dans $[N/2, N]$ et deux couples de points de torsion $(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}, \boldsymbol{\zeta}_p) \in \ker[p] \times \ker[p]$ et $(\boldsymbol{\xi}_{l_0}, \boldsymbol{\xi}_{p'}) \in \ker[p] \times \ker[p']$ tels que

$$\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p \cdot W = \boldsymbol{\xi}_{l_0}\boldsymbol{\xi}_{p'} \cdot W.$$

Nous avons donc $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}\boldsymbol{\xi}_{p'} \in G_W$. Il s'ensuit, puisque l_0 est premier avec p et p', que $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}^{-1}\boldsymbol{\xi}_{l_0} \in G_W$ et $\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}\boldsymbol{\xi}_{p'} \in G_W$. Pour éviter cela, il suffit que $\boldsymbol{\zeta}_{l_0}$ et $\boldsymbol{\xi}_{l_0}$ soient distincts modulo G_W, de même pour $\boldsymbol{\zeta}_p$ et $\boldsymbol{\xi}_{p'}$ si $p = p'$, et que $\boldsymbol{\zeta}_p^{-1}$ et $\boldsymbol{\xi}_{p'}$ n'appartiennent pas à G_W si $p \neq p'$. Nous avons donc

$$\deg\Big(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [l_0 p]^{-1}[l_0 p]\cdot W\Big) \geq \sum_p \sum_{\substack{\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\in\ker[p]/G_W\\ \boldsymbol{\zeta}_p\in(\ker[p]\setminus G_W)/G_W}} \deg(\boldsymbol{\zeta}_{l_0}\boldsymbol{\zeta}_p\cdot W) \tag{4.3}$$

Notons Λ l'ensemble des premiers de $[N/2, N]$ *ne divisant pas* $|G_W/G_W^0|$. Si $p \in \Lambda$, alors p est premier à $|G_W/G_W^0|$, de même pour l_0, le lemme 3.3(iii) nous donne alors

$$|\ker[l_0] \cap G_W| = l_0^{\dim(G_W)}|\ker[l_0] \cap (G_W/G_W^0)| = l_0^{\dim(G_W)},$$
$$|\ker[p] \cap G_W| = p^{\dim(G_W)}|\ker[p] \cap (G_W/G_W^0)| = p^{\dim(G_W)}.$$

En reprenant (4.3) on en déduit que le degré de l'ensemble étudié est encore minoré par

$$\mathrm{Card}(\Lambda)\Big(\Big(\frac{N}{2}\Big)^{n-\dim(G_W)}-1\Big)\,l_0^{n-\dim(G_W)}\deg(W). \tag{4.4}$$

Reste à compter le cardinal de Λ, soit les diviseurs premiers de $|G_W/G_W^0|$ dans $[N/2,N]$. D'après lemme 3.2, ceux-ci sont au plus au nombre de

$$\frac{\log|G_W/G_W^0|}{\log(N/2)}\le\frac{\log\deg(G_W)}{\log(N/2)}\le\frac{n\log\deg(W)}{\log(N/2)}.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité $N\ge 10^3 n\log(\deg(W))$ et le lemme 3.1 :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\Lambda)&\ge\pi(N)-\pi(N/2)-\frac{10^{-3}N}{\log(N/2)}\ge 0{,}41\frac{N}{\log N}-\frac{10^{-3}N}{\log(N/2)}\\&\ge 0{,}409\frac{N}{\log N}.\end{aligned}$$

De plus, comme $N\ge 10^3$, on a

$$\begin{aligned}0{,}409\Big(\Big(\frac{N}{2}\Big)^{n-\dim(G_W)}-1\Big)&\ge 0{,}409\times\Big(1-\frac{1}{500}\Big)\Big(\frac{N}{2}\Big)^{n-\dim(G_W)}\\&\ge 0{,}4\Big(\frac{N}{2}\Big)^{n-\dim(G_W)}.\end{aligned}$$

En reportant tout ceci dans (4.4) il vient que

$$\deg\Big(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p\text{ premier}}}[l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\Big)\ge 0{,}4\frac{N}{\log N}\Big(\frac{l_0N}{2}\Big)^{n-\dim(G_W)}\deg(W).$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$, son stabilisateur G_W est, d'après le lemme 3.2, de dimension au plus $\dim(W)-1$, d'où

$$\deg\Big(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p\text{ premier}}}[l_0p]^{-1}[l_0p]\cdot W\Big)\ge 0{,}4\frac{N}{\log N}\Big(\frac{l_0N}{2}\Big)^{n+1-\dim(W)}\deg(W). \qquad\blacksquare$$

5 Hypersurfaces dans $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$

Nous donnons ici des minorations du minimum essentiel pour des hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^2$ et $\mathbb{G}_m^3$. Ces résultats sont moins précis que ceux de [13], dans la mesure où ils ne prennent pas en compte la dimension du stabilisateur de l'hypersurface considérée. Néanmoins nous obtenons de meilleures constantes dans ces cas particuliers, ce qui nous sera plus utile, car dans la suite nous ne pourrons pas tirer partie de la dimension du stabilisateur. Notons de plus que, dans le cas de $\mathbb{G}_m^2$, nous obtenons un résultat plus précis : le théorème de Bézout permet de majorer le cardinal de l'ensemble des points de la courbe de petite hauteur.

Proposition 5.1 *Soit W une courbe géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^2$ de degré ω, qui ne soit pas un translaté d'un sous-tore. On a alors*

$$\operatorname{Card}\Big\{\boldsymbol{\alpha}\in W,\ |\ h(\boldsymbol{\alpha})\le\frac{10^{-11}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5}\Big\}\le 2\cdot 10^{11}\omega^2\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^4},$$

où $\omega':=\max\{\omega,16\}$. *En particulier on a*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W)\ge\frac{10^{-11}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5}.$$

Proposition 5.2 *Soit W une surface de $\mathbb{G}_m^3$ géométriquement irréductible de degré ω qui n'est pas translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$. Alors*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(W)\ge\frac{3\cdot 10^{-12}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5},$$

où $\omega':=\max\{\omega,16\}$.

Le déroulement de la preuve de ces deux résultats est similaire, nous les traiterons donc ensemble ; seules les constantes changeront.

5.1 Paramètres

Soit W une hypersurface de $\mathbb{G}_m^n$ (avec $n\in\{2,3\}$) géométriquement irréductible, de degré ω et notons $\omega:=\max\{\omega,16\}$. On pose, pour $n\in\{2,3\}$,

$$N:=c_1\frac{(\log\omega')^2}{\log\log\omega'},\quad T:=\Big[10N\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\Big],\quad L:=n\omega T^2,$$

où $c_1=4\cdot 10^4$ si $n=3$ et $c_1=2{,}5\cdot 10^4$ si $n=2$.

Lemme 5.3 *Nous avons*

(i) $\log N\ge 1{,}99\log\log\omega'$;

(ii) $0{,}92T\frac{\log N}{N}>\big(1{,}01+\frac{3n}{2}\big)\log(L+1)$;

(iii) $L<0{,}1\frac{N^3}{\log N}\omega$.

Démonstration (i) On utilise ici le lemme 3.4 avec $a=10^{-2}$ et $b=1$, soit

$$N\ge(\log\omega')^{1{,}99}\times 10^{-2}e\cdot c_1\ge(\log\omega')^{1{,}99}.$$

(ii) On veut montrer, pour $n=2$ et 3,

$$\frac{\log N}{N}>\frac{1{,}01+1{,}5n}{0{,}92T}\log(L+1).$$

Comme $\log(L+1) \leq 3\max\{\log(n\omega), \log(T+1)\}$ et $T+1 \leq 1{,}001T$, il nous suffit de montrer que

$$\frac{\log N}{N} > \frac{18}{T+1}\max\{\log(n\omega), \log(T+1)\}.$$

Remarquons tout d'abord que l'on a, en utilisant le lemme 3.4 avec $a = b = 1$, que

$$T+1 \geq 10N\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'} \geq 10eN \geq 27N. \tag{5.1}$$

Supposons $T+1 \geq n\omega$. Comme $9\log N \geq 9\log c_1 \geq 18\log 27$, nous avons $27\log N \geq 18\log(27N)$, ainsi

$$\frac{\log N}{N} \geq 18\,\frac{\log(27N)}{27N}.$$

Il suffit alors de remarquer que, d'après (5.1), on a $T+1 > 27N$, et que la fonction $x \mapsto (\log x)/x$ est décroissante sur $[e, +\infty[$.

Supposons maintenant $T+1 < n\omega$. Comme $\log N \geq 1{,}99\log\log\omega'$ (d'après (i)) on a, par choix de T,

$$\begin{aligned}\frac{\log N}{N} &\geq \frac{\log N}{T+1}\frac{10\log\omega'}{\log\log\omega'}\\ &\geq 19{,}9\,\frac{\log\omega'}{T+1}.\end{aligned}$$

Comme $27c_1 \leq 27N \leq T+1$ (d'après (5.1)) et $T+1 < n\omega'$, on obtient

$$\omega' \geq \frac{27}{n}c_1 > 3^{10}$$

et donc $1{,}1\log\omega' > \log(3\omega')$, d'où

$$\frac{\log N}{N} > 18\frac{\log(3\omega')}{T+1}.$$

(iii) On a

$$L = n\omega T^2 \leq n\omega\Big(10N\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\Big)^2,$$

ainsi

$$10L\frac{\log N}{\omega N^3} < 10^3 n\log N\Big(\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\Big)^2\frac{1}{N}.$$

De plus, comme $\log\log\omega' \geq 1$, on a $\log N \leq (2+\log c_1)\log\log\omega'$, d'où

$$\begin{aligned}10L\frac{\log N}{\omega N^3} &< 10^3 n(2+\log c_1)\frac{(\log\omega')^2}{\log\log\omega'}\frac{1}{N}\\ &= 10^3 n\frac{2+\log c_1}{c_1} < 1.\end{aligned}$$

■

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

5.2 Fonction auxiliaire et extrapolation

Posons

$$\theta := 0{,}08\frac{T\log N}{NL} \leq 10^{-3}\frac{T}{L}.$$

Comme $L+1 \geq n\omega T^2 = n\omega(T;W)T$ (puisque W est de codimension 1), le corollaire 4.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $W(\theta)$ avec multiplicité au moins T et tel que

$$h(F) \leq \left(1{,}01 + \frac{n}{2}\right)\log(L+1).$$

Notons T^* l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W(\theta)$, où $\boldsymbol{\xi}$ parcourt $\ker[p]$ et le nombre premier p parcourt $[N/2, N]$. D'après la proposition 4.3 nous avons

$$\begin{aligned} T^*(1+\log(L+1)) &\geq T\frac{\log N}{N} - h(F) - n\log(L+1) - L\theta \\ &\geq 0{,}92T\frac{\log N}{N} - \left(1{,}01 + \frac{3n}{2}\right)\log(L+1). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.3(ii), cette dernière quantité est strictement positive, donc $T^* > 0$. Nous avons donc montré que F s'annule sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W(\theta)$, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ et tout premier p de $[N/2, N]$.

5.3 Conclusion

Supposons par l'absurde F nul sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W$, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ et tout $p \in [N/2, N]$ premier (ce qui est en particulier le cas si $\theta \geq \hat{\mu}_{\text{ess}}(W)$). Le lemme 4.5 appliqué avec $l_0 = 1$ nous dit alors, puisque W n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^n$ et $N \geq 10^3 n\log\omega'$,

$$\begin{aligned} L \geq \deg(F) &\geq \deg\Bigl(\bigcup_{\substack{p\in[N/2,N]\\ p \text{ premier}}} [p]^{-1}[p]\cdot W\Bigr) \\ &\geq 0{,}4\frac{N}{\log N}\left(\frac{N}{2}\right)^{n+1-\dim(W)}\deg(W) \\ &= 0{,}1\frac{N^3}{\log N}\omega, \end{aligned}$$

ce qui contredit le lemme 5.3(iii). Il résulte une minoration du minimum essentiel : $\hat{\mu}_{\text{ess}}(W) > \theta$. De plus, on obtient l'existence d'un premier $p \in [N/2, N]$ et d'un $\boldsymbol{\xi} \in \ker[p]$ tels que le polynôme F soit non nul sur $\boldsymbol{\xi}\cdot W(\theta)$. Si $n = 2$, Bézout nous dit alors

$$\operatorname{Card}(W(\theta)) \leq \deg(F)\cdot\deg(\boldsymbol{\xi}\cdot W) \leq L\omega \leq 200c_1^2\omega^2\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^4}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Pour terminer les preuves des propositions 5.2 et 5.1, il nous reste à minorer θ. On a

$$\begin{aligned}\theta &= 0{,}08\frac{T\log N}{NL} = \frac{0{,}08}{n\omega}\frac{\log N}{TN} \geq \frac{0{,}08}{10n\omega}\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\frac{\log N}{N^2}\\ &= \frac{0{,}08}{10n\omega}\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\Big(\frac{\log\log\omega'}{c_1(\log\omega')^2}\Big)^2\log N.\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 5.3(i), on a $\log N \geq 1{,}99\log\log\omega'$, d'où

$$\theta > \frac{0{,}08\cdot 1{,}99}{10nc_1^2}\times\frac{1}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5}.$$

La constante $0{,}08\cdot 1{,}99/10nc_1^2$ vaut donc $3\cdot 10^{-12}$ si $n=3$ et 10^{-11} sinon (car $c_1 = 4\cdot 10^4$ si $n=3$ et $c_1 = 2{,}5\cdot 10^4$ si $n=2$).

La proposition 5.1 va en fait nous permettre, dans la démonstration du théorème 2.1, de se ramener au cas où notre courbe $\mathcal{C}$ n'est contenu dans aucun translaté de sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$, comme nous l'indique le lemme suivant.

Lemme 5.4 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C}\subset V$ une courbe géométriquement irréductible qui n'appartient à aucun translaté d'un sous-tore contenu dans V. S'il existe un translaté $\boldsymbol{\zeta}\cdot H$ d'un sous-tore H contenant $\mathcal{C}$, alors*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) \geq \frac{5\cdot 10^{-12}}{\omega}\frac{(\log\log(2\deg(H)\omega'))^4}{(\log(2\deg(H)\omega'))^5}.$$

Démonstration Comme H est un tore de codimension 1, il existe $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ dans $\mathbb{Z}^3$ tel que ses coordonnées soient premières entre elles et tel que

$$H = \{\mathbf{x}\in\mathbb{G}_m^3 \mid \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}} = 1\}.$$

On peut de plus supposer que $\lambda_3 = \max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,|\lambda_3|\}$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{G}_m^2 &\to \mathbb{G}_m^3\\ (x_1,x_2) &\mapsto (x_1^{\lambda_3}, x_2^{\lambda_3}, x_1^{-\lambda_1}x_2^{-\lambda_2}),\end{aligned}$$

qui est une paramétrisation de H (non nécessairement injective). Comme $\mathcal{C}$ n'est pas réunion de translatés de sous-tores, $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$ non plus. La proposition 5.1 appliquée à chaque composante de ce dernier nous dit alors que pour tout $\boldsymbol{\beta}\in\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$, sauf un nombre fini, on a

$$h(\boldsymbol{\beta}) \geq \frac{10^{-11}}{\deg(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C}))}\frac{(\log\log d')^4}{(\log d')^5},$$

où $d' := \max\{\deg(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})), 16\}$.

Les sous-variétés $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C}) \subset \varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot V)$ de $\mathbb{G}_m^2$ sont de dimension 1, de plus $\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot V)$ est définie par un polynôme de degré majoré par

$$\max\{|\lambda_3|, |\lambda_1+\lambda_2|\}\deg(V) \le 2\lambda_3\omega,$$

en particulier $\deg(\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})) \le 2\lambda_3\omega$. Considérons maintenant des éléments $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{C}$ et $\boldsymbol{\beta}\in\varphi^{-1}(\boldsymbol{\zeta}^{-1}\cdot\mathcal{C})$ tels que $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\zeta}\cdot\varphi(\boldsymbol{\beta})$; nous avons

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = h(\varphi(\boldsymbol{\beta})) \ge h(\beta_1^{\lambda_3}, \beta_2^{\lambda_3}) = \lambda_3 h(\boldsymbol{\beta}).$$

On en déduit que pour tout $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{C}$ sauf un nombre fini on a

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \ge \frac{10^{-11}}{2\omega}\frac{(\log\log 2\lambda_3\omega')^4}{(\log 2\lambda_3\omega')^5}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\lambda_3 \le \deg(H)$. ■

6 Courbe dans $\mathbb{G}_m^3$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer une minoration de la hauteur d'une courbe géométriquement irréductible de $\mathbb{G}_m^3$. Rappelons l'énoncé du théorème 2.1.

Théorème 2.1 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ de degré ω et $\mathcal{C}\subseteq V$ une courbe, toutes deux géométriquement irréductibles. Si V et $\mathcal{C}$ ne sont pas translaté d'un sous-tore, alors*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) > \frac{10^{-97}}{\omega}\cdot\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}},$$

où $\omega' = \max\{16,\omega\}$.

6.1 Paramètres

Soit $c_5 := 84$. On pose

$$N_1 := 5\cdot 10^{12} c_5^7 \frac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4}, \qquad T := \left[13 c_5^8 N_1 \frac{(\log\omega')^8}{(\log\log\omega')^7}\right],$$
$$L := [3T\min\{\omega T, (\deg(\mathcal{C})T)^{1/2}\}.$$

Notons ici que $L+1 \ge 3T\omega(T;\mathcal{C})$. Soit de plus $N_2 \ge e$ tel que

$$\frac{N_2}{\log N_2} = \frac{T\log N_1}{8N_1(c_5\log\omega')^2}.$$

Lemme 6.1 *On a les inégalités suivantes :*

(i) $\log(L+1) \le c_5\log\omega'$;

(ii) $N_1/2 > N_2 \ge 10^{11}\log(L+1)$;

(iii) $\log N_1 \geq 6{,}9 \log\log \omega'$ *et* $\log N_2 \geq 5{,}9 \log\log \omega'$;
(iv) $0{,}4 \frac{N_2}{\log N_2} \left(\frac{N_1 N_2}{4}\right)^3 \deg(\mathcal{C}) > L^2$.

Démonstration (i) Comme $L \geq 13c_5^8 \geq 10^{16}$, on a $\log(L+1) \leq 1{,}001 \log L$. Il suffit ainsi de remarquer que

$$\begin{aligned}\log L &\leq \log(3\omega' T^2)\\ &\leq \log\omega' + 2\Big(\log(5\cdot 10^{12}\cdot 13c_5^{15}) + 15\log\log\omega'\Big) + \log 3\\ &\leq \log\omega' + \frac{\log\omega'}{\log 16}\Big(2\log(5\cdot 10^{12}\cdot 13c_5^{15}) + 30\log\log 16 + \log 3\Big)\\ &\leq 83{,}4\log\omega'.\end{aligned}$$

(ii) Montrons d'abord l'inégalité $N_1/2 > N_2$. Par croissance stricte de la fonction $x \mapsto x/\log x$ sur $[e, +\infty[$, il nous suffit de vérifier l'inégalité

$$\frac{T\log N_1}{8N_1\big(c_5(\log\omega')\big)^2} = \frac{N_2}{\log N_2} < \frac{N_1/2}{\log(N_1/2)},$$

soit $T(\log N_1)^2/N_1 \leq 4c_5^2 N_1(\log\omega')^2$. Notons maintenant que l'on a les inégalités suivantes :

$$\frac{T}{N_1} \leq 13c_5^8 \frac{(\log\omega')^8}{(\log\log\omega')^7} \quad \text{et} \quad \log N_1 \leq (\log(5\cdot 10^{12} c_5^7) + 7)\log\log\omega'.$$

Compte tenu du fait que l'on a

$$N_1 = 5\cdot 10^{12}\frac{(c_5\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4},$$

il suffit donc de vérifier que $13c_5^8\cdot(\log(5\cdot 10^{12}c_5^7)+7)^2 \leq 5\cdot 10^{12}c_5^9$.

Montrons maintenant la seconde inégalité. Comme $T \geq 2$, nous avons

$$\frac{N_2}{\log N_2} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{(T+1)\log N_1}{8N_1(\log(L+1))^2}.$$

Par définition de T et comme $\log(L+1) \leq c_5\log\omega'$, on a

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{(T+1)}{8N_1}\cdot\frac{\log N_1}{(\log(L+1))^2} \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{13c_5^8(\log\omega')^8}{8(\log\log\omega')^7}\cdot\frac{\log\log\omega'}{(c_5\log\omega')^2} > c_5^6\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^6}.$$

Il vient que

$$N_2 \geq \frac{N_2}{\log N_2} \geq c_5^6\frac{(\log\omega')^6}{(\log\log\omega')^6}. \tag{6.1}$$

En utilisant le lemme 3.4 avec $(a, b) = (5, 6)$ et à nouveau la majoration $\log(L+1) \leq c_5 \log \omega'$, on obtient

$$N_2 \geq c_5^5 \left(\frac{5e}{6}\right)^6 \cdot (c_5 \log \omega') \geq 10^{11} \log(L+1).$$

(iii) On veut montrer les minorations

$$\log N_1 \geq 6{,}9 \log\log \omega' \quad \text{et} \quad \log N_2 \geq 5{,}9 \log\log \omega'.$$

On utilise pour cela deux fois le lemme 3.4 :

- avec $(a, b) = (10^{-1}, 4)$, on obtient

$$N_1 \geq 5 \cdot 10^{12} c_5^7 \left(\frac{10^{-1} e}{4}\right)^4 (\log \omega')^{6,9} \geq (\log \omega')^{6,9} ;$$

- avec $(a, b) = (10^{-1}, 6)$ dans l'inégalité (6.1), on obtient

$$N_2 \geq c_5^6 \left(\frac{10^{-1} e}{6}\right)^6 \cdot (\log \omega')^{5,9} \geq (\log \omega')^{5,9}.$$

(iv) Comme $L^2 \leq 9T^3 \deg(\mathcal{C})$, il nous suffit ici de montrer

$$\frac{0{,}4}{9 \cdot 4^3} \frac{N_1^3 N_2^4}{T^3 \log N_2} > 1.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{0{,}4}{9 \cdot 4^3} \frac{N_1^3 N_2^4}{T^3 \log N_2} &= \frac{0{,}4}{9 \cdot 8^2} \cdot \frac{T(\log N_2)^3}{N_1} \cdot \left(\frac{N_1 N_2}{T \log N_2}\right)^4 \\
&= \frac{0{,}4}{9 \cdot 8^2} \cdot \frac{T(\log N_2)^3}{N_1} \cdot \left(\frac{\log N_1}{8(c_5 \log \omega')^2}\right)^4 \\
&\geq \frac{0{,}4}{9 \cdot 8^6} \cdot \frac{49}{50} \frac{T+1}{N_1} \cdot \frac{(\log N_1)^4 (\log N_2)^3}{(c_5 \log \omega')^8},
\end{aligned}$$

puisque $T \geq 49$. En utilisant (iii), il vient que

$$\frac{0{,}4}{9 \cdot 4^3} \frac{N_1^3 N_2^4}{T^3 \log N_2} > \frac{0{,}4}{9 \cdot 8^6} \cdot \frac{13 c_5^8 (\log \omega')^8}{(\log\log \omega')^7} \cdot \frac{6{,}9^4 \cdot 5{,}9^3 \cdot (\log\log \omega')^7}{(c_5 \log \omega')^8} > 1 \qquad \blacksquare$$

6.2 Fonction auxiliaire et extrapolation

Comme $L + 1 \geq 3T\omega(T; \mathcal{C})$, le corollaire 4.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $\mathcal{C}(\frac{10^{-3}T}{L})$ avec multiplicité au moins T tel que

$$h(F) \leq 2{,}51 \log(L+1).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Pour $j = 1, 2$ posons $\mathcal{P}_j := \{p \in [N_j/2, N_j] \text{ premier}\}$ et notons T_1 l'ordre minimal d'annulation de F sur

$$\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}\Big(\frac{10^{-3}T}{L}\Big),$$

où p parcourt $\mathcal{P}_1$ et $\boldsymbol{\xi}_p$ l'ensemble $\ker[p]$. Posons maintenant

$$\theta := \min\Big\{\frac{T_1 \log N_1}{10 N_1 L}, \frac{10^{-3}T}{L}\Big\}.$$

Nous allons montrer le théorème 2.1 par l'absurde ; aussi nous supposerons dans la suite le minimum essentiel de $\mathcal{C}$ petit, plus précisément,

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) < \theta. \tag{6.2}$$

En particulier $\mathcal{C}(\theta)$ est Zariski-dense dans $\mathcal{C}$, et *a fortiori* F est nul sur $\mathcal{C}$.

Proposition 6.2 *Sous l'hypothèse* (6.2) *sur le minimum essentiel de* $\mathcal{C}$*, pour tout* (p, q) *dans* $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ *et tout* $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q) \in \ker[p] \times \ker[q]$*, le polynôme* F *est nul sur* $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$*. De plus on a*

$$T_1 > 0{,}8 \frac{T \log p}{p \log(L+1)}. \tag{6.3}$$

Démonstration Soient $(p, q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ quelconques. Remarquons tout d'abord que, pour tout $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q) \in \ker[p] \times \ker[q]$, nous avons

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}) = \hat{\mu}_{\text{ess}}(\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}) = \hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) < \theta\,;$$

il suffit donc de travailler avec les points de hauteur $\leq \theta$. Notons de plus que d'après le lemme 6.1(ii) nous avons $N_2/2 \leq q \leq N_2 < N_1/2 \leq p \leq N_1$.

Montrons dans un premier temps l'inégalité (6.3) ; nous pouvons bien sûr supposer pour cela $T_1 \leq T$. Notons $T_{1,p}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}(\theta)$, où $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$. La proposition 4.3 nous donne

$$T_{1,p}\big(1 + \log(L+1)\big) > T\frac{\log p}{p} - h(F) - 3\log(L+1) - L\theta.$$

Comme $L\theta \leq \frac{T_1 \log N_1}{10N_1} \leq \frac{T \log p}{10p}$ et $h(F) \leq 2{,}51 \log(L+1)$ on en déduit

$$T_{1,p}\big(1 + \log(L+1)\big) > 0{,}9T\frac{\log p}{p} - 5{,}51\log(L+1).$$

Comme $0{,}11\log(L+1) \geq 1$, en divisant par $1{,}11$ il vient que

$$T_{1,p}\log(L+1) > 0{,}81T\frac{\log p}{p} - 5\log(L+1). \tag{6.4}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

D'après le lemme 6.1(i)–(ii), on a $c_5 \log \omega' \geq \log(L+1)$ et $N_2 \geq 10^{11}$, d'où

$$\frac{T \log p}{p} \geq \frac{T \log N_1}{N_1} = \frac{8N_2}{\log N_2}(c_5 \log \omega')^2 \geq 500 \log(L+1),$$

ce qui montre (6.3).

Notons $T_{2,pq}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}(\theta)$, où $(\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q)$ parcourt $\ker[p] \times \ker[q]$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto \log(x)/x$, il vient que

$$L\theta \leq \frac{T_1 \log N_1}{10N_1} \leq \frac{T_1 \log q}{10q}.$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient une inégalité similaire à (6.4) :

$$\begin{aligned} T_{2,pq} \log(L+1) &> 0{,}8 \frac{T_{1,p} \log q}{q} - 5 \log(L+1) \\ &> 0{,}8^2 \frac{T \log p \log q}{pq \log(L+1)} - 5 \log(L+1). \end{aligned}$$

Il nous suffit ici de montrer que le membre de droite de cette inégalité est > 0 pour tout $(p, q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, autrement dit que

$$T \log N_1 \log N_2 \geq 8 N_1 N_2 (\log(L+1))^2,$$

ce qui est bien le cas, par définition de N_2 et puisque $\log(L+1) \leq c_5 \log \omega'$. ■

6.3 Lemme de zéros

Nous ne travaillerons dans la suite qu'avec des ensembles algébriques contenant au moins un translaté de $\mathcal{C}$ par un point de torsion, aussi il nous sera utile d'utiliser la notion de *trace* introduite dans [3].

Dans la suite, dans toute union, $\boldsymbol{\xi}_p$, $\boldsymbol{\xi}_{p_0}$ et $\boldsymbol{\xi}_q$ parcourront respectivement $\ker[p]$, $\ker[p_0]$, et $\ker[q]$.

Définition 6.3 Soient Z_1 et Z_2 deux sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^n$, on appelle *trace* de Z_1 relativement à Z_2, notée $\mathrm{tr}(Z_1, Z_2)$, la réunion des composantes isolées de Z_1 contenant au moins une composante isolée de Z_2.

Notons X l'ensemble algébrique de codimension 1 défini par notre fonction auxiliaire F et

$$Y := \mathrm{tr}\Big(X, \bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P}_1 \\ q \in \mathcal{P}_2}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}\Big).$$

Ensuite, pour tout $p \in \mathcal{P}_1$ posons :

$$X_p := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p^{-1} \cdot X \quad \text{et} \quad Y_p := \mathrm{tr}\Big(X_p, \bigcup_{q \in \mathcal{P}_2} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p, \boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}\Big).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Enfin, pour tout $q \in \mathcal{P}_2$ posons :

$$X_{p,q} := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p,\boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p^{-1}\boldsymbol{\xi}_q^{-1} \cdot X = \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_q^{-1} \cdot X_p \quad \text{et} \quad Y_{p,q} := \mathrm{tr}\big(X_{p,q}, \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p,\boldsymbol{\xi}_q} \boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}\big),$$

où rappelons-le $\boldsymbol{\xi}_p$ et $\boldsymbol{\xi}_q$ parcourent $\ker[p]$ et $\ker[q]$ respectivement. Notons les inclusions suivantes, pour tout $(p,q) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{C} \subseteq X_{p,q} \subseteq X_p \subseteq X \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subseteq Y_{p,q} \subseteq Y_p \subseteq Y.$$

En effet, comme F s'annule sur tous les $\boldsymbol{\xi}_p\boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$, la première série d'inclusions est immédiate. La seconde découle du lemme suivant.

Lemme 6.4 *Soient Z_1, Z_1', Z_2, et Z_2' des sous-ensembles algébriques de $\mathbb{G}_m^n$.*

(i) *On a $Z_1 \subseteq Z_1' \Rightarrow \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1', Z_2)$;*

(ii) *si les composantes isolées de Z_2 et Z_2' sont de même dimension, alors*

$$Z_2 \subseteq Z_2' \implies \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) \subseteq \mathrm{tr}(Z_1, Z_2');$$

(iii) *si Σ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}_m^n$, alors $\Sigma \cdot \mathrm{tr}(Z_1, Z_2) = \mathrm{tr}(\Sigma \cdot Z_1, \Sigma \cdot Z_2)$.*

Ainsi, comme $\mathrm{codim}(\mathcal{C}) = 2$, deux des trois ensembles algébriques Y, Y_p, et $Y_{p,q}$ ont même codimension ce qui nous permettra de comparer leurs degrés ou leurs hauteurs normalisées. Notons que le lemme 6.4(iii) nous dit en particulier que les groupes $\ker[p]$ et $\ker[pq]$ stabilisent respectivement Y_p et $Y_{p,q}$.

6.3.1 Cas où un Y_p est de codimension 2

Comme tous les Y_p sont propres et contiennent un translaté de $\mathcal{C}$, ils sont tous de codimension 1 ou 2. Notons $\tilde{\mathcal{P}}_1$ l'ensemble des premiers de $\mathcal{P}_1$ pour lesquels l'ensemble algébrique Y_p est de codimension 1 et supposons ici que

$$|\tilde{\mathcal{P}}_1| < 0{,}999 \cdot |\mathcal{P}_1|.$$

Soit $p_0 \in \mathcal{P}_1$ tel que $\mathrm{codim}(Y_{p_0}) = 2$ et considérons un premier $q \in \mathcal{P}_2$. Comme $\mathcal{C} \subseteq Y_{p_0,q} \subseteq Y_{p_0}$ on a en particulier $\mathrm{codim}(Y_{p_0}) = \mathrm{codim}(Y_{p_0,q}) = \mathrm{codim}(\mathcal{C}) = 2$.

D'après le lemme 6.4(iii), l'ensemble algébrique $Y_{p_0,q}$ est invariant par translation par un point de p_0q-torsion, ainsi :

$$\bigcup_{\boldsymbol{\xi}_q,\boldsymbol{\xi}_{p_0}} \boldsymbol{\xi}_q\boldsymbol{\xi}_{p_0} \cdot \mathcal{C} \subseteq Y_{p_0,q} \subseteq Y_{p_0}.$$

Ceci étant vrai pour tout q dans $\mathcal{P}_2$ on en déduit

$$\bigcup_{q\in\mathcal{P}_2} [p_0q]^{-1}[p_0q]\mathcal{C} = \bigcup_{q\in\mathcal{P}_2} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_q,\boldsymbol{\xi}_{p_0}} \boldsymbol{\xi}_q\boldsymbol{\xi}_{p_0} \cdot \mathcal{C} \subseteq Y_{p_0}. \tag{6.5}$$

Les ensembles algébriques considérés dans cette inclusion sont de même dimension, ainsi nous allons pouvoir comparer leurs degrés.

Étudions le membre de gauche de (6.5). Notons que

$$\mathcal{P}_1 \subseteq [N_1/2, N_1] \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \subseteq [N_2/2, N_2].$$

De plus le lemme 6.1(ii) nous dit que $N_1/2 > N_2$, en particulier p_0 est premier à tout nombre premier de $[N_2/2, N_2]$. Comme $N_2 \geq 10^{11} \log(L+1)$ (lemme 6.1(ii)) et $\deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}) \leq L^2$, on obtient $N_2 \geq 3 \cdot 10^3 \log \deg(\mathcal{C})$. Pour appliquer le lemme 4.5, il faut se ramener au cas où p_0 est premier à $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$. D'après la proposition 3.2, le nombre de diviseurs premiers de $[N_1/2, N_1]$ divisant $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$ est majoré par

$$\frac{\log |G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|}{\log(N_1/2)} \leq \frac{2 \log \deg(\mathcal{C})}{\log(N_1/2)} \leq \frac{4 \log L}{\log(N_1/2)}.$$

Or le lemme 6.1(ii) nous dit que $N_1 \geq 10^{11} \log(L+1)$, donc

$$\frac{4 \log L}{\log(N_1/2)} \leq \frac{4 \cdot 10^{-11} N_1}{\log(N_1/2)} \leq 10^{-3} \frac{0{,}41 N_1}{\log N_1}.$$

Par hypothèse on a $|\mathcal{P}_1 \backslash \tilde{\mathcal{P}}_1| > 10^{-3} \cdot |\mathcal{P}_1|$, autrement dit le nombre de Y_p de codimension 2 n'est pas trop petit ; de plus d'après le lemme 3.1, on a $|\mathcal{P}_1| \geq 0{,}41 N_1/\log N_1$, puisque $N_1 \geq 41$. On peut donc supposer p_0 premier à $|G_{\mathcal{C}}/G_{\mathcal{C}}^0|$.

Comme $\mathcal{C}$ n'est pas le translaté d'un sous-tore, le lemme 4.5(i) appliqué à $l_0 = p_0$ nous donne alors

$$0{,}4 \frac{N_2}{\log N_2} \left(\frac{N_1 N_2}{4} \right)^3 \deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}).$$

Par ailleurs, comme Y_{p_0} est incomplètement défini par des polynômes de degré au plus L (plus précisément par les polynômes de la forme $F(\boldsymbol{\xi}_{p_0} \cdot \mathbf{x})$, où $\boldsymbol{\xi}_{p_0}$ est un point de p_0-torsion), [11, proposition 3.3] (avec $p = 1$, $D_1 = L$ et $I_0 = (0)$) nous donne

$$\deg(Y_{p_0}) \leq L^{\operatorname{codim} Y_{p_0}} = L^2.$$

D'où une contradiction, d'après le lemme 6.1(iv).

6.3.2 Cas où les Y_p sont de codimension 1

Notons $\tilde{\mathcal{P}}_1$ l'ensemble des premiers p de $\mathcal{P}_1$ pour lesquels l'ensemble algébrique Y_p est de codimension 1. Supposons ici que cet ensemble vérifie $|\tilde{\mathcal{P}}_1| \geq 0{,}999 \times |\mathcal{P}_1|$.

Si $p \in \tilde{\mathcal{P}}_1$, alors, par définition de la trace, il existe une composante (géométriquement irréductible) Z_p de X_p de codimension 1 (Z_p est donc aussi une composante de X) contenant un translaté $\boldsymbol{\xi}_p \boldsymbol{\xi}_q \cdot \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$.

Commençons par une petite réduction du problème. Si Z_p est le translaté $\boldsymbol{\xi} \cdot H$ d'un sous-tore H, alors, d'après le lemme 5.4, nous avons

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(\mathcal{C}) \geq \frac{5 \cdot 10^{-12}}{\omega} \frac{(\log \log(2 \deg(H) \omega'))^4}{(\log(2 \deg(H) \omega'))^5}. \tag{6.6}$$

Comme Z_p et X sont de même dimension, on a $\deg(H) = \deg(Z_p) \leq \deg(X) \leq L$, ainsi, d'après le lemme 6.1(i), nous avons $\log(2\deg(H)\omega') \leq (2 + c_5)\log\omega'$. En reportant ceci dans (6.6) on obtient, puisque $c_5 = 84$,

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) \geq \frac{5 \cdot 10^{-12}}{(2+c_5)^5\omega} \frac{(\log\log\omega')^4}{(\log\omega')^5} \geq \frac{10^{-21}}{\omega} \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}},$$

ce qui est la conclusion recherchée. Nous supposerons donc dans la suite qu'*aucun des Z_p n'est translaté d'un sous-tore*. D'après le lemme 6.4(iii), pour tout $p \in \tilde{\mathcal{P}}_1$, comme Y_p est stable par translation par un point de p-torsion, on a

$$\bigcup_{p\in\tilde{\mathcal{P}}_1} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p \subseteq \bigcup_{p\in\tilde{\mathcal{P}}_1} Y_p \subseteq X.$$

Pour conclure, nous allons utiliser le lemme 6.5 suivant dans lequel on encadre la hauteur normalisée de ces ensembles algébriques. Ce lemme nous donne

$$\frac{\log(N_1/2)}{4{,}01}|\tilde{\mathcal{P}}_1| < 5 \cdot 10^{11} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Comme $N_1 \geq 41$, le lemme 3.1 nous dit que le nombre de premiers dans $[N_1/2, N_1]$ est supérieur à $0{,}41\frac{N_1}{\log N_1}$, en particulier,

$$\frac{\log(N_1/2)}{4{,}01}|\tilde{\mathcal{P}}_1| \geq \frac{\log(N_1/2)}{4{,}01} \times 0{,}999 \cdot 0{,}41 \frac{N_1}{\log N_1}.$$

Comme $N_1 \geq 5 \cdot 10^{12} c_5^7 \geq 10^{26}$, on a $0{,}999 \cdot \frac{0{,}41 \log(N_1/2)}{4{,}01 \log N_1} \geq 10^{-1}$. On déduit alors des deux inégalités précédentes :

$$N_1 < 5 \cdot 10^{12} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Or le lemme 6.1(iii) nous dit que $\log(L+1) \leq c_5 \log\omega'$, d'où une contradiction par définition de N_1.

Lemme 6.5 *Soient N, L deux entiers, avec $L \geq 16$ et $\mathcal{P} \subseteq [N/2, N]$ un ensemble de premiers. Soient $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ un polynôme non nul de degré au plus L et tel que $h(F) \leq 2{,}51\log(L+1)$. Pour tout $p \in \mathcal{P}$ on considère une hypersurface Z_p géométriquement irréductible qui n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$. Si F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p$, pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout point de p-torsion $\boldsymbol{\xi}_p$, alors*

$$\frac{\log N/2}{4{,}01}|\mathcal{P}| < 5 \cdot 10^{11} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Démonstration Plaçons nous dans un premier temps dans le cas le plus défavorable : celui où pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a $\ker[p] \subseteq G_{Z_p}$. Dans ce cas, si X désigne le lieu des zéros de F, on a

$$\bigcup_{p\in\mathcal{P}} [p]^{-1}[p]Z_p = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} Z_p \subseteq X.$$

Notons $C_1,\dots,C_s$ les classes d'équivalence pour la relation dans $\mathcal{P}$:

$$p \sim p' \iff Z_p = Z_{p'},$$

et pour tout $j \in \{1,\dots,s\}$ fixons un premier p_j de C_j. Nous allons voir que dans ce cas le nombre s de classes est grand. Plus précisément, il existe un élément j_0 dans $\{1,\dots,s\}$ tel que $s|C_{j_0}| \ge |\mathcal{P}|$. D'après le lemme 3.2, pour tout p on a $\dim G_{Z_p} < \dim Z_p = 2$ puisque Z_p n'est pas le translaté d'un sous-tore. De plus, le lemme 3.3(iii) nous donne

$$p^3 = |\ker[p]| = |\ker[p] \cap G_{Z_p}| = p^{\dim G_{Z_p}} [G_{Z_p} : G^0_{Z_p}]$$

et donc p^2, et *a fortiori* le produit $\prod_{p \in C_{j_0}} p^2$, divisent $[G_{Z_p} : G^0_{Z_p}]$. On en déduit, via la proposition 3.2

$$|C_{j_0}| \le \frac{\log[G_{Z_{p_{j_0}}} : G^0_{Z_{p_{j_0}}}]}{2\log(N/2)} \le \frac{(\dim Z_{p_{j_0}} + 1)\log\deg(Z_{p_{j_0}})}{2\log(N/2)} \le \frac{3\log L}{2\log(N/2)}.$$

Ainsi

$$s \ge |\mathcal{P}| \frac{2}{3} \frac{\log(N/2)}{\log L}.$$

On en déduit que

$$\hat{h}(X) \ge \hat{h}\Big(\bigcup_{j=1}^{s} Z_{p_j}\Big) = \sum_{j=1}^{s} \hat{h}(Z_{p_j}) \ge s \min_{p\in\mathcal{P}} \hat{h}(Z_p).$$

Ainsi

$$\hat{h}(X) \ge |\mathcal{P}| \frac{2}{3} \frac{\log(N/2)}{\log L} \min_{p\in\mathcal{P}} \hat{h}(Z_p). \tag{6.7}$$

Supposons maintenant qu'il existe un premier p de $\mathcal{P}$ tel que $\ker[p] \not\subseteq G_{Z_p}$, en particulier $|\ker[p] \cap G_{Z_p}| \le p^2$. En utilisant le lemme 3.3 on en déduit que

$$\hat{h}(X) \ge \hat{h}\Big([p]^{-1}[p]Z_p\Big) = \frac{p^3}{\big|\ker[p] \cap G_{Z_p}\big|} \hat{h}(Z_p) \ge p\hat{h}(Z_p) \ge \frac{N}{2}\hat{h}(Z_p)\,,$$

ce qui implique l'inégalité (6.7).

Nous avons montré à ce stade que l'inégalité (6.7) était toujours satisfaite. Remarquons maintenant qu'aucun des Z_p n'étant le translaté d'un sous-tore, la proposition 5.2 nous donne, pour $p \in \mathcal{P}$, puisque $\deg(Z_p) \le \deg(X) \le L$,

$$\hat{h}(Z_p) \ge 3 \cdot 10^{-12} \frac{(\log\log L)^4}{(\log L)^5}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

On obtient alors, en utilisant l'inégalité (6.7),

$$\hat{h}(X) \geq 2\cdot 10^{-12}\log(N/2)|\mathcal{P}|\cdot\frac{(\log\log L)^4}{(\log L)^6}. \tag{6.8}$$

Rappelons que de façon générale, si X est un ensemble algébrique défini par un polynôme F (donc équidimensionnel), à coefficients dans un corps k, alors sa hauteur normalisée vérifie

$$\hat{h}(X) = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathcal{M}_k}[k_v:\mathbb{Q}_v]\log M_v(F),$$

où $M_v(F) = \max\{|\operatorname{coeff}(F)|_v\}$ si v est ultramétrique et $M_v(F) = M(\sigma F)$ si $v|\infty$ est associé au plongement σ. D'après l'inégalité de Landau, nous avons dans ce dernier cas

$$\log M_v(F) = \log M(\sigma F) \leq h_v(F) + \frac{3}{2}\log(\deg(\sigma F)),$$

où, $h_{\tilde{v}}(F) := \max\{|\operatorname{coeff}(F)|_{\tilde{v}}\}$ pour toute place $\tilde{v}$ de k. On en déduit que

$$\begin{aligned}\hat{h}(X) &\leq \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]}\sum_{v\in\mathcal{M}_k}[k_v:\mathbb{Q}_v]h_v(F) + \frac{3}{2[k:\mathbb{Q}]}\sum_{v|\infty}[k_v:\mathbb{Q}_v]\log L\\ &\leq h(F) + \frac{3}{2}\log L \leq 4{,}01\log(L+1).\end{aligned}$$

En reprenant l'inégalité (6.8), on obtient

$$\frac{\log(N/2)}{4{,}01}|\mathcal{P}| < 5\cdot 10^{11}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}. \qquad\blacksquare$$

6.4 Conclusion

Dans tous les cas nous sommes arrivé à une contradiction ; l'hypothèse (6.2) est donc fausse, autrement dit, $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{C}) > \theta$. Pour conclure la démonstration du théorème 2.1, il nous reste à minorer θ. En utilisant la formule (6.3) de la proposition 6.2, on obtient

$$\theta > \frac{0{,}8T\log N_1}{N_1\log(L+1)}\cdot\frac{\log N_1}{10N_1L} \geq \frac{0{,}8(\log N_1)^2}{30\omega'\log(L+1)}\cdot\frac{1}{TN_1^2}.$$

Comme $\log(L+1) \leq c_5\log(\omega')$ et $\log(N_1) \geq 6{,}9\log\log\omega'$ (lemme 6.1(i) et (iii)), il vient que

$$\begin{aligned}\theta &> \frac{0{,}8\cdot(6{,}9\log\log\omega')^2}{30\omega'(c_5\log\omega')}\cdot\frac{(\log\log\omega')^7}{13c_5^8(\log\omega')^8}\cdot\frac{1}{N_1^3}\\ &\geq \frac{0{,}8\cdot 6{,}9^2}{30c_5\cdot(13c_5^8)}\cdot\frac{1}{\omega'}\cdot\Big(\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\Big)^9\cdot\Big(\frac{(\log\log\omega')^4}{5\cdot 10^{12}(c_5\log\omega')^7}\Big)^3\\ &\geq \frac{10^{-97}}{\omega'}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

7 Petits points d'une surface

On s'intéresse maintenant aux petits points d'une surface V géométriquement irréductible. Comme on a pu le constater dans l'introduction, si l'on souhaite obtenir une minoration quasi-optimale pour la hauteur des points de V, alors on obtient dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$ quasiment aucune information quand au nombre (ou plus généralement la somme des degrés) de translatés de sous-tores contenant les petits points. Dans le cas de $\mathbb{G}_m^3$, on arrive toutefois à obtenir quelques résultats. Rappelons l'énoncé du théorème 1.8.

Théorème 1.8 *Soient V une surface de $\mathbb{G}_m^3$ géométriquement irréductible de degré ω, qui n'est pas le translaté d'un sous-tore. Alors il existe un nombre fini de translatés de sous-tores $B_1, \dots, B_t$ de V tels que, pour tout $\boldsymbol{\alpha} \in V \setminus B_1 \cup \dots \cup B_t$, on ait*

$$h(\boldsymbol{\alpha}) \geq \frac{10^{-97}}{\omega} \cdot \frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.$$

De plus, si $B_1, \dots, B_m$ sont de dimension 1 et $B_{m+1}, \dots, B_t$ de dimension 0, on a

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq 2 \cdot 10^{100}\omega^2(\log\omega')^{32}.$$

Notons

$$\gamma := \frac{10^{-97}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}}.$$

D'après la proposition 5.2, nous avons $\gamma < \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$, en particulier, puisque V est géométriquement irréductible, l'adhérence de Zariski de $V(\gamma)$ (l'ensemble des points de V de hauteur majorée par γ) est de dimension 1. Écrivons sa décomposition en composantes irréductibles $\overline{V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}} = B_1 \cup \dots \cup B_t$. La première partie de l'énoncé est alors une reformulation du théorème 2.1 : ce dernier nous dit que les B_i sont des translatés de sous-tores (propres) de $\mathbb{G}_m^3$. On peut supposer qu'il existe un entier $1 \leq m \leq t$ tel que $B_{m+1}, \dots, B_t$ soient de dimension 0 et $B_1, \dots, B_m$ soient de dimension 1 ; dans la suite on ne s'intéressera qu'à ces derniers translatés de sous-tores.

7.1 Paramètres, extrapolation

Notre choix de paramètres est proche de celui de la section 5 dans le cas $n = 3$,

$$N := 6 \cdot 10^{23}\frac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4}, \quad T := \left[10N\frac{\log\omega'}{\log\log\omega'}\right], \quad L := 3\omega T^2.$$

Lemme 7.1 *On a les inégalités suivantes :*

(i) $0{,}92T\log N \geq 5{,}51N\log(L+1)$;

(ii) $N \geq 5 \cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}$;

(iii) $\frac{10^{-3}T}{L} \geq \frac{1}{10^3}\frac{T\log N}{NL} > \gamma$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Démonstration (i) Le premier point se traite exactement comme le lemme 5.3(ii) : notre paramètre N est simplement plus grand qu'à la section 5.

(ii) Comme $\log(L+1) \leq 3\max\{\log(3\omega), \log(T+1)\}$ nous séparons notre étude en deux cas.

- Dans le cas où $T+1 \geq 3\omega$, nous avons $T+1 \leq 2T \leq N^{8/7}$, et
$$5\cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4} \leq 5\cdot 10^{12}\Big(\frac{3\cdot 8}{7}\Big)^7\frac{(\log N)^7}{(\log\log N)^4} < N\,,$$
car, d'après le lemme 3.4 avec $(a,b) = (7,4)$, on a $N \geq 6\cdot 10^{23}\left(\frac{7e}{4}\right)^4$.
- Dans le cas contraire, nous avons $\log(L+1) \leq 3\log(3\omega') \leq 6\log\omega'$, ainsi
$$5\cdot 10^{12}\frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4} \leq 5\cdot 10^{12}\cdot 6^7\frac{(\log\omega')^7}{(\log\log\omega')^4} < N.$$

(iii) On a
$$\begin{aligned}\frac{10^{-3}T}{L} &\geq \frac{1}{10^3}\frac{T\log N}{NL} = \frac{\log N}{3\cdot 10^3\omega}\cdot\frac{1}{NT} \geq \frac{1}{3\cdot 10^4\omega}\cdot\frac{1}{N^2}\frac{\log\log\omega'}{\log\omega'}\\ &> \frac{10^{-97}}{\omega}\frac{(\log\log\omega')^{21}}{(\log\omega')^{30}} = \gamma.\end{aligned}$$
■

Comme $\frac{10^{-3}T}{L} > \gamma$ (lemme 7.1(iii)), le corollaire 4.2 nous donne un polynôme $F \in \overline{\mathbb{Q}}[\mathbf{x}]$ non nul de degré $\leq L$ nul sur $V(\gamma)$ avec multiplicité au moins T tel que $h(F) \leq 2{,}51\log(L+1)$. En particulier le polynôme F est nul sur $\overline{V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}} \supseteq \bigcup_{i=1}^m B_i$ avec multiplicité au moins T.

Notons X l'ensemble algébrique défini par notre fonction auxiliaire F. On peut supposer que $B_{r+1},\dots,B_m$ sont les seuls B_i inclus dans un translaté d'un sous-tore H_i de codimension 1 contenu dans X. Pour tout i dans $\{r+1,\dots,m\}$, on a l'inclusion $B_i \subseteq H_i\cap V \subseteq X\cap V$. Ainsi par Bézout on obtient, puisque V n'est pas le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$,

$$\deg\Big(\bigcup_{i=r+1}^m B_i\Big) \leq \deg\Big(\bigcup_{i=r+1}^m H_i\cap V\Big) \leq \deg(V)\deg(X) \leq \omega L. \tag{7.1}$$

Nous nous ramenons ainsi au cas où aucun des B_i n'est inclus dans un translaté d'un sous-tore contenu dans X de codimension 1. Posons $\mathcal{C} := \bigcup_{i=1}^r B_i$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers contenus dans $[N/2, N]$. Notons T_1 l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p\cdot V(\gamma)$, où p parcourt $\mathcal{P}$ et $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$.

Proposition 7.2 *Pour tout p dans $\mathcal{P}$ et tout $\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]$, le polynôme F est nul sur $\boldsymbol{\xi}_p\cdot\mathcal{C}$.*

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press

Démonstration Soient $p \in \mathcal{P}$ et $\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]$. D'après le lemme 7.1(iii), et comme $N/2 \leq p \leq N$, la décroissance de la fonction $x \mapsto \log(x)/x$ nous donne

$$\gamma \leq 0{,}08 \frac{T \log N}{NL} \leq 0{,}08 \frac{T \log p}{pL}. \tag{7.2}$$

Notons $T_{1,p}$ l'ordre minimal d'annulation de F sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)$, où $\boldsymbol{\xi}_p$ parcourt $\ker[p]$. La proposition 4.3 nous donne

$$T_{1,p}\big(1 + \log(L+1)\big) > T \frac{\log p}{p} - h(F) - 3 \log(L+1) - L\gamma,$$

soit avec (7.2), comme $h(F) \leq 2{,}51 \log(L+1)$

$$T_{1,p}\big(1 + \log(L+1)\big) > 0{,}92 T \frac{\log p}{p} - 5{,}51 \log(L+1).$$

En utilisant le lemme 7.1, on déduit que $T_{1,p} > 0$, et *a fortiori* F s'annule sur $\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C} \subseteq \overline{\boldsymbol{\xi}_p \cdot V(\gamma)}^{\mathrm{Zar}}$. ■

7.2 Lemme de zéros

Rappelons que X désigne l'ensemble algébrique défini par notre fonction auxiliaire F. Pour tout $p \in \mathcal{P}$, posons

$$X_p := \bigcap_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p^{-1} \cdot X \quad \text{et} \quad Y := \operatorname{tr}\Big(X, \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C}\Big).$$

Ensuite, pour tout $p \in \mathcal{P}$ posons $Y_p := \operatorname{tr}(X_p, \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot \mathcal{C})$. Notons, comme le lemme 6.4, les inclusions suivantes, pour tout $p \in \mathcal{P}$:

$$\mathcal{C} \subset X_p \subset X \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subset Y_p \subset Y.$$

Pour majorer le degré de $\mathcal{C}$, nous allons montrer que l'un des Y_p est, comme $\mathcal{C}$, de codimension 2, auquel cas le théorème de Bézout nous permettra de conclure.

7.2.1 Cas où tous les Y_p sont de codimension 1

Dans ce cas pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe une composante Z_p de codimension 1 de Y_p et $i_p \in \{1, \dots, r\}$ tels que Z_p contienne un translaté $\boldsymbol{\xi}_p \cdot B_{i_p}$ de B_{i_p}. Par hypothèse *aucun des B_i n'est inclus dans le translaté d'un sous-tore de X de codimension* 1. En particulier, comme $Z_p \subset X$, aucun des Z_p n'est le translaté d'un sous-tore de $\mathbb{G}_m^3$.

D'après le lemme 6.4, comme Y_p est stable par translation par un point de p-torsion, on a

$$\bigcup_{p \in \mathcal{P}} \bigcup_{\boldsymbol{\xi}_p \in \ker[p]} \boldsymbol{\xi}_p \cdot Z_p \subset \bigcup_{p \in \mathcal{P}} Y_p \subset X.$$

Le lemme 6.5 nous donne

$$\frac{\log N/2}{4{,}01}|\mathcal{P}| < 5 \cdot 10^{11} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4}.$$

Comme $N \geq 10^{26}$, en utilisant le même argument que celui qui précède le lemme 6.5, on obtient

$$N < 5 \cdot 10^{12} \frac{(\log(L+1))^7}{(\log\log(L+1))^4},$$

qui est une contradiction, par définition de N. Il existe donc un premier p dans $[N/2, N]$ tel que Y_p soit de codimension 2.

7.2.2 Cas où l'un de Y_p est de codimension 2

Supposons ici qu'il existe $p_0 \in \mathcal{P}$ tel que $\operatorname{codim}(Y_{p_0}) = 2$. De nouveau, comme Y_{p_0} est incomplètement défini par des polynômes de degré au plus L, [11, proposition 3.3] (avec $p = 1$, $D_1 = L$ et $I_0 = (0)$) nous donne

$$\sum_{i=1}^{r} \deg(B_i) = \deg(\mathcal{C}) \leq \deg(Y_{p_0}) \leq L^{\operatorname{codim}(Y_{p_0})} = L^2. \tag{7.3}$$

7.2.3 Conclusion

En reprenant les majorations (7.1) et (7.3), on a donc

$$\sum_{i=1}^{m} \deg(B_i) \leq \omega L + L^2 \leq 10\omega^2 T^4 \leq 10(6 \cdot 10^{24})^4 \omega^2 \frac{(\log \omega')^{32}}{(\log\log \omega')^{20}},$$

d'où le résultat souhaité.

Références

[1] F. Amoroso and S. David, *Le problème de Lehmer en dimension supérieure.* J. Reine Angew. Math. **513**(1999), 145–179.

[2] ———, *Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes.* Ramanujan J. **5**(2001), no. 3, 237–246.

[3] ———, *Minoration de la hauteur normalisée dans un tore.* J. Inst. Math. Jussieu **2**(2003), no. 3, 335–381.

[4] ———, *Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **3**(2004), no. 2, 325–348.

[5] ———, *Points de petite hauteur sur une sous-variété d'un tore.* Compos. Math. **142**(2006), no. 3, 551–562.

[6] E. Bombieri and U. Zannier, *Algebraic points on subvarieties of* $\mathbb{G}_m^n$. Internat. Math. Res. Notices **1995**, no. 7, 333–347.

[7] S. David and P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes.* In: Number Theory. Contemp. Math. 210, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, pp. 333–364.

[8] ———, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **28**(1999), no. 3, 489–543.

[9] ———, *Errata à: Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores.* Ann. Scuola Norm. Sup. Sci. Pisa Cl. Sci. **29**(2000), no. 3, 729–731.
[10] M. Hindry, *Autour d'une conjecture de Serge Lang.* Invent. Math. **94**(1988), no. 3, 575–603.
[11] P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs.* Bull. Soc. Math. France **114**(1986), no. 3, 355–383.
[12] C. Pontreau, *Minoration effective de la hauteur des points d'une courbe de $\mathbb{G}_m^2$ définie sur $\mathbb{Q}$.* Acta Arith. **120**(2005), no. 1, 1–26.
[13] ———, *Geometric lower bounds for the normalized height of hypersurfaces.* Int. J. Number Theory **2**(2006), no. 4, 555–568.
[14] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. **6**(1962), 64–94.
[15] W. M. Schmidt, *Heights of points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$.* In: Number Theory. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 235, Cambridge University Press, 1996, pp. 157–187.
[16] S. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic varieties.* J. Amer. Math. Soc. **8**(1995), no. 1, 187–221.
[17] ———, *Small points and adelic metrics.* J. Algebraic Geom. **4**(1995), no. 2, 281–300.

Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen BP 5186, 14032 Caen Cedex, France
courriel: pontreau@math.unicaen.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-2009-053-x Published online by Cambridge University Press