Can. J. Math., Vol. XXV, No. 3, 1973, pp. 495–505

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES AU PROBLÈME DES SECRÉTAIRES

SERGE DUBUC

1. Introduction. Nous reprenons le problème des secrétaires tel que considéré en particulier par Chow, Moriguti, Robbins et Samuels [**2**]. Nous commençons par dégager une formule sur le rendement de certains temps d'arrêt dans le problème des secrétaires. Nous faisons voir comment une certaine fonction d'une infinité de variables est étroitement reliée aux temps d'arrêt optimaux. Enfin, nous étudions le comportement asymptotique du rendement de certains temps d'arrêt pour le problème des n secrétaires lorsque n tend vers l'infini.

2. Considérations générales sur les temps d'arrêt. Donnons d'abord les définitions fondamentales relatives aux temps d'arrêt. Soient $\{X_i, \mathscr{A}_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n espaces mesurables, $\mathscr{A}_i$ étant une tribu donnée sur X_i, on considère le produit cartésien $X = \prod_{i=1}^n X_i$; nous nous intéressons aux tribus suivantes sur X; $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \ldots, \mathscr{B}_n$ où $\mathscr{B}_i$ est la tribu engendrée par "les i premières variables", plus précisément c'est la tribu engendrée par les parties suivantes de X;

$$\left\{\prod_{j=1}^n A_j; A_j \in \mathscr{A}_j \text{ et si } j > i, A_j = X_j\right\}.$$

Un *temps d'arrêt* est par définition une fonction $t : X \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $t^{-1}\{i\} = \{x : t(x) = i\} \in \mathscr{B}_i$.

Venons-en au problème fondamental de l'analyse séquentielle : Une mesure μ est donnée sur l'espace mesurable $\{X, \mathscr{B}_n\}$, et l'on a n fonctions intégrables sur X : $W_1, W_2, \ldots, W_n$ où W_i est une fonction qui ne dépend que des i premières variables, c'est-à-dire que W_i est mesurable pour la tribu $\mathscr{B}_i$. Si T désigne la totalité des temps d'arrêt, peut-on trouver un temps d'arrêt τ tel que

$$\mathscr{E}(W_\tau) = \int W_{\tau(x)}(x)d\mu(x) \leqq \int W_{t(x)}(x)d\mu(x)$$

pour tout $t \in T$? Si oui, comment peut-on l'expliciter. Arrow, Blackwell et Girshick [**1**] ont déterminé la solution suivante à ce problème d'analyse séquentielle.

THÉORÈME 1 (Arrow, Blackwell et Girshick). *Soient* $\{X_i, \mathscr{A}_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *n espaces mesurables, soit* μ *une mesure sur* $\{X = \prod_{i=1}^n X_i, \mathscr{B} = \otimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i\}$ *et*

Reçu le 1er février, 1972 et sous forme revisée, le 3 novembre, 1972.

soient $W_i : X \to R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *n fonctions* μ*-intégrables sur* X *où* W_i *ne dépend que des* i *premières variables, on pose alors par récurrence à rebours* $W_n^*(x) = W_n(x)$,

$$W_j^*(x) = \min(W_j(x), (\mathscr{E}_j W_{j+1}^*)(x)), j < n$$

et

$$\tau(x) = \min\{j : W_j(x) = W_j^*(x)\}$$

alors si t est un temps d'arrêt,

$$\mathscr{E}(W_\tau) \leqq \mathscr{E}(W_t).$$

(Remarque au sujet de la notation du théorème : si W est une fonction μ-intégrables sur X, si $i = 1, 2, \ldots$ ou n, $\mathscr{E}_i(W)$ est la dérivée de Radon-Nikodym de la mesure $W(x)d\mu(x)$ par rapport à la mesure μ restreinte à la tribu $\mathscr{B}_i$, c'est-à-dire $\mathscr{E}_i(W)$ est la fonction définie presque partout par rapport à la mesure μ telle que

(a) $\mathscr{E}_i(W)(x)$ est une fonction mesurable qui ne dépend que des i premières variables;

(b) pour tout $B \in \mathscr{B}_i$,

$$\int_B \mathscr{E}_i(W)(x)d\mu(x) = \int_B W(x)d\mu(x)).$$

Supposons maintenant que nous avons des informations additionnelles sur la mesure μ et les fonctions W_i : supposons que la i^{e}-fonction $W_i(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend que de la variable x_i et que la mesure μ est la mesure-produit $\otimes_{i=1}^n \mu_i$ où μ_i est une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $\{X_i, \mathscr{A}_i\}$, on voit alors que la fonction $W_i^*(x_1, \ldots, x_n)$ ne dépend que des variables x_i, $x_{i+1}, \ldots$ et x_n. D'où

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_{j-1}(W_j^*)(x) &= \int \ldots \int W_j^*(x_1, \ldots, x_n)d\mu_j(x_j)d\mu_{j+1}(x_{j+1}) \ldots \\ &= \int W_j^*(x)d\mu(x) = c_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}$$

On pose également $c_1 = \int W_1^*(x)d\mu(x)$. *D*'où

$$\begin{aligned} W_n^*(x) &= W_n(x) \\ W_j^*(x) &= \min(W_j(x), c_{j+1}) \qquad 1 \leqq j \leqq n. \end{aligned}$$

D'autre part, on peut remarquer que

$$c_j = \inf(\mathscr{E}(W_t) : \{t \in T \quad \text{et pour tout } x,\ t(x) \geqq j\}).$$

Résumons ces considérations sous la forme d'un théorème.

THÉORÈME 2. *Soient* $\{X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *n espaces de probabilité, soient* $X = \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathscr{A} = \otimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i$ *et* $\mu = \otimes_{i=1}^n \mu_i$ *et soient* $\{W_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, *n fonctions, chacune ne dépendant que de la* i^{e} *variable, désignons* *par T_i la totalité des temps d'arrêt qui se produisent après ou à l'instant i et notons par*

$$c_i = \inf\{\mathscr{E}(W_t) : t \in T_i\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

et par

$$c_{n+1} = \infty$$

si l'on pose

$$\tau(x) = \inf\{i : W_i(x) \leqq c_{i+1}\}$$

alors

$$c_1 = \mathscr{E}(W_\tau).$$

3. Formulation du problème des secrétaires. n candidates postulent un poste de secrétaire. On suppose que chacune a un rang entre 1 et n et que deux candidates *n'ont jamais le même rang.* Selon un ordre inconnu, ces candidates s'amènent successivement pour subir une entrevue. L'employeur lorsqu'il rencontre la i^e candidate peut reconnaître le rang relatif de celle-ci parmi les autres candidates déjà interviewées bien qu'à ce moment il ne puisse pas trouver son rang absolu parmi les n candidates (sauf si $i = n$). Après la i^e entrevue ($i < n$), l'employeur doit décider s'il choisit cette i^e candidate ou s'il attend de choisir parmi les $(n - i)$ candidates restantes à interviewer ; après la n^e entrevue, l'employeur doit choisir cette n^e candidate. Le problème posé est de déterminer la technique que doit utiliser l'employeur pour que l'espérance du rang absolu de la candidate choisie soit la plus petite possible. Pour être plus précis, décrivons un modèle mathématique pour ce problème.

Soit n un entier donné, supérieur à 1. On considère l'ensemble des permutations $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ des n premiers entiers naturels $1, 2, \ldots, n$. On probabilise cet ensemble en accordant un poids de $(n!)^{-1}$ à chaque permutation. Si $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une permutation et si $1 \leqq i \leqq n$, on désigne par x_i le rang relatif de y_i par rapport à $\{y_1, y_2, \ldots, y_i\}$.

Ici

$$Pr\{x_i = j\} = 1/i$$

si $j = 1, 2, \ldots,$ ou i. Soit $X_i = \{1, 2, \ldots, i\}$, on considère la distribution uniforme μ_i sur X_i. On pose

$$X = \prod_{i=1}^{n} X_i, \qquad \mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i.$$

Nous nous intéressons à la collection $T(n)$ des temps d'arrêt pour la suite aléatoire $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nous recherchons un temps d'arrêt τ tel que $\mathscr{E}(y_\tau) \leqq \mathscr{E}(y_t)$ pour tout $t \in T(n)$. Comme il est démontré dans Chow, Moriguti, Robbins et Samuels [**2**], $\mathscr{E}(y_t) = \mathscr{E}((n + 1)x_t/(t + 1))$. Si l'on pose $W_i(x_1, \ldots, x_n) = (n + 1)x_i/(i + 1)$, on est alors dans le contexte du Théorème 2. Introduisons les sous-collections $T_i(n)$ de temps d'arrêt : $T_i(n) = \{t \in T(n)$; pour tout x $t(x) \geqq i\}$. Si nous faisons comme Chow, Moriguti, Robbins et Samuels en posant

$$c_i(n) = \min\{\mathscr{E}(W_t) : t \in T_i(n)\}, \qquad 1 \leqq i \leqq n$$

et $c_{n+1}(n) = +\infty$, on obtient que $i \to c_i(n)$ est une fonction croissante et que si $\tau(x) = \min\{i : W_i(x) \leqq c_{i+1}\}$, alors $c_1(n) = \mathscr{E}(W_\tau)$. Nous désirons obtenir une formule plus explicite pour $c_1(n)$.

4. Seconde détermination de $c_1(n)$. Considérons la totalité des suites d'entiers $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ telles que $0 \leqq s_1 \leqq \ldots \leqq s_n = n$ et $s_i < i$ pour $i = 1, 2, \ldots,$ ou $(n-1)$. Une telle suite permet de donner le temps d'arrêt $\tau(x_1, \ldots, x_n) = \min\{i : x_i \leqq s_i\}$. Evaluons l'espérance du rang absolu, $\mathscr{E}(y_\tau)$, avec ce temps d'arrêt. La probabilité que le temps d'arrêt se produise à l'instant k est

$$\frac{s_k}{k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1 - \frac{s_i}{i}\right).$$

(Il est sous-entendu dans ce texte que l'expression $\prod_{k=p}^{p-1} u_k$ vaut 1 et que $\sum_{k=p}^{p-1} u_k$ vaut 0 si p est un entier et u_k est une suite donnée de nombres). Si le temps d'arrêt se produit à l'instant k, il est alors équiprobable que $x_k = 1, 2, \ldots$ ou s_k. Comme $\mathscr{E}(y_k|x_k = i) = ((n+1)/(k+1))i$, alors l'espérance conditionnelle de y_τ sous la condition que $\tau = k$ est

$$\sum_{i=1}^{s_k} \frac{i(n+1)}{s_k(k+1)} = \frac{(n+1)(s_k+1)}{2(k+1)},$$

d'où

$$\mathscr{E}(y_\tau) = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{i - s_i}{i}\right)\right)\frac{(n+1)s_k(s_k+1)}{k(k+1)}.$$

Associons à la suite

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \text{ la suite } (t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ où } t_i = \min\{j : s_j \geqq i\}.$$

Exprimons $\mathscr{E}(y_\tau)$ en fonction des nombres $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

(a) On remarque que

$$I_k = \prod_{i=1}^{t_k - 1}\left(\frac{i - s_i}{i}\right) = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{(t_i - i)}{(t_k - i)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

(b) Si

$$J_k = \sum_{j=t_k}^{t_{k+1}-1}\left(\prod_{i=t_k}^{j-1}\frac{i - s_i}{i}\right)\frac{1}{j(j+1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

alors

$$J_k = \sum_{j=t_k}^{t_{k+1}-1}\left(\prod_{i=t_k}^{j-1}\frac{i-k}{i}\right)\frac{1}{j(j+1)},$$

$$J_k = \frac{(t_k - 1)!}{(t_k - 1 - k)!}\sum_{j=t_k}^{t_{k+1}-1}\frac{(j-1-k)!}{(j+1)!}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-050-8 Published online by Cambridge University Press

Or il est facile de vérifier l'identité suivante :

$$\sum_{j=p}^{q-1} \frac{(j-k)!}{(j+1)!} = \frac{1}{k}\left(\frac{(p-k)!}{p!} - \frac{(q-k)!}{q!}\right)$$

k, p et q étant des entiers, $1 \leqq k \leqq p < q$. D'où

$$J_k = \frac{1}{k+1}\left(\frac{(t_k-k-1)!}{t_k!} - \frac{(t_{k+1}-k-1)!}{t_{k+1}!}\right)\frac{(t_k-1)!}{(t_k-1-k)!},$$

$$J_k = \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{t_k-i}{t_{k+1}-i}\right)\right).$$

On pose

$$J_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(c) $$I_k J_k = \frac{1}{t_k(k+1)}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{t_i-i}{t_k-i} - \frac{1}{(k+1)t_{k+1}}\right)\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{t_i-i}{t_{k+1}-i}\right)$$

(d) Posons

$$a_k = \prod_{i=1}^{k-1}\frac{t_i-i}{t_k-i}, \qquad 1 \leqq k < n,$$

alors

$$\mathscr{E}(y_\tau) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}\right) I_k J_k k(k+1)$$

$$\mathscr{E}(y_\tau) = \frac{n+1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{t_k}a_k - \frac{k}{t_{k+1}}a_{k+1}\right)\right) + \frac{n+1}{2}a_n$$

$$\mathscr{E}(y_\tau) = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{t_k}\right)\frac{n+1}{2}.$$

C'est la formule que nous voulions établir :

PROPOSITION 3. *Si* $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *est une suite croissante d'entiers telle que* $t_i > i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *et* $t_n = n$, *si* τ *est le temps d'arrêt*

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = \min\{j : t_{x_j} \leqq j\}$$

alors

$$\mathscr{E}(y_\tau) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{t_k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{t_i-i}{t_k-i}\right).$$

Si l'on pose

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n+1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{t_i-i}{t_k-i}$$

alors

$$c_1(n) = \min\{f_n(t_1, \ldots, t_n) : t_i \in N, t_1 \leqq t_2 \ldots \leqq t_n = n, \text{ et } t_i > i, i = 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Nomenclature. Le temps d'arrêt qui est associé au n-uple $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ dans la dernière proposition sera appelé le temps d'arrêt dont les *temps d'attente* sont $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Le *niveau* d'un tel temps d'arrêt sera l'entier $\max\{i : t_i < n\}$. On notera par $T(n, m)$ la totalité des temps d'arrêt, qui sont *de niveau* inférieur ou égal à m dans le problème des n secrétaires. Enfin, on posera $c_1(n, m) = \min\{\mathscr{E}(W_t) : t \in T(n, m)\}$, c'est le seuil inférieur de l'espérance du rang de la secrétaire choisie d'après un temps d'arrêt de niveau inférieur ou égal à m.

La tâche des deux prochaines sections sera d'étudier le comportement asymptotique des quantités $c_1(n, m)$ lorsque n tend vers l'infini. On peut observer que $c_1(n, m) \leqq c_1(n, m + 1)$ pour $m = 1, 2, \ldots, (n - 1)$ et que $c_1(n, m) = c_1(n)$ lorsque $2m \geqq n$. Pour cette dernière raison, nous allons toujours supposer que $2m \leqq n$. Nous allons démontrer dans la suite que de façon uniforme par rapport à m

$$\lim_{n\to\infty} c_1(n, m)(m/n)^{1/(m+1)} \prod_{i=1}^{m-1} (i/(i + 2))^{1/(i+1)} = 1.$$

5. Minoration du rendement des temps d'arrêt de niveau donné. Revenons à la fonction de n variables

$$f_n(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{t_i - i}{t_k - i}.$$

Introduisons également la fonction

$$f_{n,m}(t_1, t_2, \ldots, t_m) = f_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

où $t_i = n$ si $i > m$.

$$f_{n,m}(t_1, \ldots, t_m) = \frac{n+1}{2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{t_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{t_i - i}{t_k - i} + \frac{n-m}{n} \prod_{i=1}^{m} \frac{t_i - i}{n - i} \right).$$

On pose $\tilde{c}_1(n, m) = \min\{ f_{n,m}(t_1, \ldots, t_m) : 0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_m \leqq n, \ \ t_i \in \mathbf{R}, t_i \geqq i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m\}$.

Soit $(\tilde{t}_1(n, m), \tilde{t}_2(n, m), \ldots, \tilde{t}_m(n, m))$ un point où est atteint le minimum $\tilde{c}_1(n, m)$. Nous avons besoin de connaître le comportement asymptotique des quantités $\tilde{t}_m(n, m)$.

LEMME 4. *Si m et n sont deux entiers donnés où* $2m \leqq n$, $\tilde{t}_m(n, m)$ *est le nombre réel t tel que* $t > m$ *et*

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{t - j} \right) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n - i}{t - i} = 1.$$

On a que $\tilde{t}_m(n, m) \leqq \tilde{t}_m(n + 1, m)$. *De façon uniforme en m,*

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{t}_m(n, m)/(mn^m)^{1/(m+1)} = 1.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-050-8 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Un retour à la définition de la fonction $f_{n,m}(t_1, \ldots, t_m)$ montre que $\tilde{t}_m(n, m)$ est le nombre t qui minimise la fonction

$$t \to \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n-i}{t-i} + t - m.$$

C'est donc la valeur t telle que $\phi(t) = 1$ si

$$\phi(t) = \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{t-j}\right) \prod_{i=0}^{m-1} \frac{n-i}{t-i} \text{ et si } \phi(n) \leqq 1 \leqq \phi(m).$$

Si l'on se sert des inégalités

$$\frac{t-m}{n-m} \leqq \frac{t-i}{n-i} \leqq \frac{t}{n},$$

on obtient que $mn^m/t^{m+1} \leqq \phi(t) \leqq m(n-m)^m/(t-m)^{m+1}$. D'où $\phi(m) \geqq 1$ et puisque $2m \leqq n$, $\phi(n) \leqq 1$. La première partie du lemme est donc établie. L'inégalité $\tilde{t}_m(n, m) \leqq t_m(n+1, m)$ est alors évidente. On remarque maintenant que

$$(mn^m)^{1/(m+1)} \leqq \tilde{t}_m(n, m) \leqq m + [m(n-m)^m]^{1/(m+1)}.$$

Un petit raisonnement d'analyse montre que de façon uniforme en m,

$$\lim_{n\to\infty} (m + [m(n-m)^m]^{1/(m+1)})/(mn^m)^{1/(m+1)} = 1.$$

Ce qui complète la démonstration du Lemme 4.

Si $t_m = \tilde{t}_m(n, m)$, si l'on pose $u_i = (t_i - i)/(t_m - i)$ et $g_{n,m}(u_1, u_2, \ldots, u_m) = 2t_m(n+1)^{-1} f_{n,m}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, on obtient que

$$g_{n,m}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(t_m - i)\prod_{i=1}^{k-1} u_i}{\prod_{i=0}^{k-1} (u_k(t_m - k) + k - i)} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_m - m}{t_m - j} \prod_{i=1}^{m} u_i.$$

Le Lemme 4 montre que la suite de fonctions $g_{n,m}(u_1, \ldots, u_m)$, $n = 2m$, $2m+1, \ldots$ est croissante et converge lorsque n tend vers l'infini vers la fonction

$$g_m(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{k=1}^{m} u_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i + m \prod_{i=1}^{m} u_i.$$

Il y a lieu de juger que toutes les fonctions $g_{n,m}$ sont définies sur le même espace $U = \{(u_i)_{i=1}^{\infty} : 0 \leqq u_i \leqq 1\}$. On aura aussi besoin de parler de la fonction

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i.$$

Posons maintenant $\gamma_{n,m} = \inf\{g_{n,m}(u) : u \in U\}$, $\gamma_m = \inf\{g_m(u) : u \in U\}$ et $\gamma = \inf\{g(u) : u \in U\}$. On a donc les inégalités suivantes

$$c_1(n, m) \geqq \tilde{c}(n, m) = [2\tilde{t}_m(n, m)]^{-1}(n+1)\gamma_{n,m}.$$

Le lemme suivant garantira que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_{n,m} = \gamma_m.$$

LEMME 5. *Si* $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *est une suite croissante de fonctions semi-continues inférieurement définies sur un espace compact* X *à valeurs dans* $(-\infty, \infty]$, *si* $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) \not\equiv +\infty$, *alors*

$$\inf\{g(x) : (x \in X\} = \lim_{k\to\infty}(\inf\{g_k(x) : x \in X\}).$$

Démonstration. Posons $c_k = \inf\{g_k(x) : x \in X\}$ et $c = \inf\{g(x) : x \in X\}$. Puisque $g_k(x) \leqq g(x)$, on a que $c_k \leqq c$. La suite c_k est croissante, donc $\lim_{k\to\infty} c_k \leqq c$. Soit $\epsilon > 0$, si $O_k = \{x : g_k(x) > c - \epsilon\}$, $\{O_k\}$ est une suite croissante d'ouverts dont la réunion est X. La compacité de X donne qu'il existe un N tel que $O_N = X$ et alors $c_N > c - \epsilon$. Ainsi $\lim_{k\to\infty} c_k = c$.

L'effet du Lemme 4 joint au Lemme 5 produit que

$$\liminf_{n\to\infty} c_1(n, m) \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(m+1)} \geqq \gamma_m/2.$$

Maintenant on veut établir l'uniformité de ces limites par rapport à m. Puisque $\gamma_{2m,m} \leqq \gamma_{n,m}$ on obtient que

$$c_1(n, m) \geqq \frac{\tilde{l}_m(2m, m)}{\tilde{l}_m(n, m)} \frac{n+1}{2m+1} \gamma_{2m,m}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\left[\inf_{n\geqq 2m} c_1(n, m) \left(\frac{m}{n}\right)^{1/m+1}\right] \geqq \liminf_{m\to\infty} \gamma_{2m,m}.$$

Montrons que $\liminf_{m\to\infty} \gamma_{2m,m} \geqq \gamma = \lim_{m\to\infty} \gamma_m$. Revenons aux fonctions f_n en posant $h_m(v_1, v_2, \ldots) = (2n/(n+1)) f_n(t_1, \ldots, t_n)$ où $n = 2m$, $t_i = i + (n - i)v_i$ lorsque $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de nombres de $[0, 1]$,

$$h_m(v_1, v_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{2m} \left(\prod_{i=1}^{k-1} v_i\right) \Big/ \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i) + (2m-k)u_k}{2m-i}\right).$$

La suite h_m est une suite croissante de fonctions semi-continues inférieurement définies sur l'espace compact $V = \prod_{k=1}^{\infty} [0, 1]$ et

$$h(v_1, v_2, \ldots) = \lim_{m\to\infty} h_m(v_1, v_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k{}^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} v_i,$$

vu le théorème de Beppo-Lévi.

Posons $\bar{\gamma}_m = \inf\{h_m/v) : v \in V\}$, on remarque que

$$\gamma_{2m,m}(m + 1/2)/\tilde{l}_m(2m, m) = \tilde{c}_1(n, m) = (2m+1)\bar{\gamma}_m/4m.$$

D'où

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_{2m,m}/\bar{\gamma}_m = 1.$$

Comme

$$\lim_{m\to\infty} \bar{\gamma}_m = \bar{\gamma} = \inf\{h(v) : v \in V\},$$

alors

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_{2m,m} = \bar{\gamma}.$$

Pour montrer que $\bar{\gamma} = \gamma$, il suffit de montrer que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i + m \prod_{i=1}^{m} u_i = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i.$$

Or si

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} u_i < \infty.$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-1} u_i < \infty$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{2m} \prod_{i=1}^{k-1} u_i = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{2m} \prod_{i=1}^{2m} u_i = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} m \prod_{i=1}^{2m} u_i = 0.$$

D'où

$$\bar{\gamma} = \gamma.$$

Un calcul explicite fait voir que $\gamma_m = 2 \prod_{i=1}^{m-1} (1 + 2/i)^{1/(i+1)}$. On obtient donc que de façon uniforme par rapport à m,

$$\liminf_{n\to\infty} c_1(n, m)(m/n)^{1/(m+1)} \prod_{i=1}^{m-1} [i/(i+2)]^{1/(i+1)} = 1.$$

6. Majoration du rendement de certains temps d'arrêt. Considérons deux entiers donnés n et m où $2m \leqq n$. Nous considérons un temps d'arrêt de niveau m dont les temps d'attente $t_1, t_2, \ldots$ et t_n sont définis de la façon suivante : si $a_i = \prod_{k=i}^{\infty} [k/(k+2)]^{1/(k+1)}$, t_i est le plus petit entier qui dépasse le nombre $(mn^m)^{1/(m+1)} a_i/a_m$ lorsque $i = 1, 2, \ldots, m$ et $t_i = n$ lorsque $i > m$. Désignons par $t_{n,m}$ le temps d'arrêt défini par ces temps d'attente. Les inégalités $(u - i)/(v - i) \leqq u/v$ lorsque $i \leqq u \leqq v$ permettent de prétendre que

$$c_1(n, m) \leqq \mathscr{E}(y_{t_{n,m}}) \leqq \frac{n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k-1} t_i \right) t_k^{-k}$$

s'il est vrai que $t_i \geqq i$, c'est ce qu'assure le prochain lemme.

LEMME 6. *Si* $1 \leqq i \leqq m \leqq n$, $i \leqq (mn^m)^{1/(m+1)} a_i/a_m$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-050-8 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. On procède par induction à rebours de m jusqu'à 1 :

$$a_{i-1}/a_i = \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{1/i}.$$

Or

$$i^2 \geqq (i^2 - 1) = (i+1)(i-1),$$
$$i^{i-2} \geqq (i-1)^{i-2}.$$

D'où

$$i^i \geqq (i-1)^{i-1}(i+1)$$

et

$$(a_{i-1}/a_i)^i \geqq [(i-1)/i]^i.$$

Si m est fixe, on voit que

$$\limsup_{n\to\infty} 2\mathscr{E}(y_{t_{n,m}})$$
$$\leqq \limsup_{n\to\infty} (mn^m)^{1/(m+1)} \left(\sum_{k+1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k-1} t_i\right) t_k^{-k} + \frac{n-m}{n} \prod_{i=1}^{m} (t_i n^{-1})\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{k-1} u_i\right) u_k^{-k} + m \prod_{i=1}^{m} u_i$$

où

$$u_i = a_i/a_m.$$

La dernière expression vaut γ_m. D'où

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/(m+1)} c_1(n,m) \leqq \gamma_m/2.$$

Pour établir que la limite est atteinte de façon uniforme par rapport à m, on fait les majorations suivantes :

$$(mn^m)^{1/m+1} \left(\prod_{i=1}^{k-1} t_i\right) t_k^{-k} \leqq a_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} (a_i + k^{-1})$$

Or la suite $\Pi_{i=1}^{k-1} (1 + a_i^{-1}k^{-1})$ est à variation lente et

$$\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right) a_k^{-k} = 2\gamma/[k(k+1)]$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-k} \prod_{i=1}^{k-1} (a_i + k^{-1}) < \infty$$

$$\limsup_{m\to\infty} \left(\sup_n (mn^m)^{1/m+1} \prod_{i=1}^{m} (t_i n^{-1})\right) \leqq \limsup_{n\to\infty} \left(m \prod_{i=1}^{m} a_i\right) \prod_{i=1}^{m} (1 + (ma_i)^{-1}).$$

Un peu de calcul montre que $m \Pi_{i=1}^{m} a_i = O(m)$. La dernière limite est donc nulle. Ces estimés sont donc suffisants pour compléter la démonstration du théorème suivant :

https://doi.org/10.4153/CJM-1973-050-8 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 7. *De façon uniforme par rapport à m,*

$$\lim_{n\to\infty} c_1(n, m)(m/n)^{1/(m+1)} \prod_{i=1}^{m-1} (i/(i+2))^{1/(i+1)} = 1.$$

On obtient comme corollaire la proposition de Chow, Moriguti, Robbins et Samuels [**2**] :

$$\lim_{n\to\infty} c_1(n) = \prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{1/n}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. K. J. Arrow, D. Blackwell, et M. A. Girshick, *Bayes and minimax solutions of sequential decision problems*, Econometrica *17* (1949), 213–244.

2. Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, et S. M. Samuels, *Optimal selection based on relative rank* (*the Secretary Problem*), Israel J. Math. *2* (1964), 81–90.

Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec