J. Austral. Math. Soc. 73 (2002), 279–299

ANALYSE CONFORME SUR LES ALGÈBRES DE JORDAN

M. PEVZNER

(Received 23 September 2000; revised 3 September 2001)

Communicated by A. H. Dooley

Abstract

We construct the Weil representation of the Kantor-Koecher-Tits Lie algebra $\mathfrak{g}$ associated to a simple real Jordan algebra V. Later we introduce a family of integral operators intertwining the Weil representation with the infinitesimal representations of the degenerate principal series of the conformal group G of the Jordan algebra V. The decomposition of $L^2(V)$ in the case of Jordan algebra of real square matrices is given using this construction.

2000 *Mathematics subject classification*: primary 22E45, 42B35, 17C30.

Introduction

En 1979 Kashiwara et Vergne ont décrit, [8], une méthode d'étude de l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur la frontière de Shilov d'un domaine de type tube associé au cône des matrices symétriques définie-positives. Cette méthode est basée sur l' équivalence d'une certaine représentation de la série principale dégénérée du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ (ou de son revêtement universel $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$ pour n pair) et de la représentation de Weil.

Nous poursuivons la même idée en construisant la représentation de Weil pour la classe des algèbres de Lie de Kantor-Koecher-Tits. Nous appliquons cette méthode à l'étude de l'espace L^2 défini sur une algèbre de Jordan non-euclidienne. L'exemple de l'algèbre de Jordan des matrices réelles carrées est étudié en détail.

Ce travail est une partie de ma thèse préparée sous la direction de Jacques Faraut à qui j'exprime ici ma profonde reconnaissance. Je remercie également Wolfgang Bertram pour ses remarques et suggestions qui me furent précieuses.

1. Algèbres de Jordan et les groupes conformes

Soit $\mathbb{F}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors un espace vectoriel V sur $\mathbb{F}$ est une algèbre sur $\mathbb{F}$ si une application bilinéaire $(x, y) \mapsto xy$ de $V \times V$ dans V est définie. Pour tout élément $x \in V$, $L(x)$ désigne l'application linéaire de V dans V définie par: $L(x)y = xy$. V est dite une *algèbre de Jordan* si pour tous éléments x et y dans V:

$$xy = yx, \quad x(x^2y) = x^2(xy).$$

Nous notons r le rang de l'algèbre V et n sa dimension. A tout élément régulier de V nous associons de polynômes $\operatorname{tr}(x)$ et $\det(x)$ qui coïncident avec la trace et le déterminant habituels au cas d'une algèbre de Jordan matricielle [5].

Définissons la représentation quadratique de l'algèbre de Jordan V:

$$P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2).$$

Alors $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$, $P(x)x^{-1} = x$, $P(x^{-1}) = P(x)^{-1}$, si x^{-1}, *l'inverse de Jordan* est défini. Notons que $\det x = \operatorname{Det}(P(x))^{r/2n}$.

Pour tout couple $x, y \in V$ nous notons $x \,\square\, y$ l'endomorphisme de V défini par: $x \,\square\, y = L(xy) + [L(x), L(y)]$.

Une algèbre de Jordan réelle ou complexe V est dite *semi-simple* si la forme bilinéaire $\operatorname{Tr} L(xy)$ est non dégénérée. On montre que toute algèbre de Jordan semi-simple possède un élément neutre. V est dite *simple* si elle ne contient pas d'idéal non trivial. Une algèbre de Jordan simple est semi-simple et une algèbre de Jordan semi-simple est somme directe d'idéaux simples.

Une algèbre de Jordan réelle est dite *euclidienne* si la forme bilinéaire $\tau(x, y) = \operatorname{Tr} L(xy)$ est définie positive.

Soit V une algèbre de Jordan simple réelle de dimension n et de rang r. Le groupe de structure $\operatorname{Str}(V)$ de V est le groupe des transformations linéaires $g \in GL(V)$ de V pour lesquelles le polynôme $\det x$ est un semi-invariant, $\det(g.x) = \lambda(g)\det(x)$, et $\lambda(g) = \operatorname{Det}(g)^{r/n}$ est un caractère de $\operatorname{Str}(V)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Nous notons $L = \operatorname{Str}(V)^o$ la composante neutre du groupe de structure. On montre qu'il existe un nombre fini de L-orbites ω_i dans V et que le complémentaire de l'ensemble $\cup_i \omega_i$ est de mesure nulle dans V. Nous notons N le groupe des translations n_v $(v \in V)$, $n_v : x \mapsto x + v$, et P le groupe des transformations affines de V, c'est le produit semi-direct: $P = L \ltimes N$. Nous notons j la transformation rationnelle de V définie par: $j(x) = -x^{-1}$. Le groupe conforme $\operatorname{Co}(V)$ ou groupe de Kantor-Koecher-Tits de V est le groupe des transformations rationnelles de V engendré par P et j. Nous notons G sa composante neutre. C'est un groupe de Lie et P est un sous-groupe parabolique maximal de G dont le nilradical est abélien et isomorphe à V.

Une transformation différentiable $\varphi : U \mapsto V$, où U est un ouvert de V, est dite *L-conforme* si, en tout point x de U, la différentielle $D_x\varphi$ appartient à L. Si V

est une algèbre de Jordan simple différente de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$, alors toute transformation L-conforme est une restriction d'un élément du groupe conforme G, [1].

Si T est un endomorphisme de V, on note $T^\sharp$ son adjoint par rapport à la forme bilinéaire τ, c'est-à-dire $\tau(Tx, y) = \tau(x, T^\sharp y)$. L'endomorphisme T appartient à $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$ si et seulement si $2P(Tx, x) = TP(x) + P(x)T^\sharp$. Si $g \in L$, alors $(gx)^{-1} = (g^\sharp)^{-1}x^{-1}$, ([5, Proposition VIII.2.5]), et si $T \in \mathfrak{l}$, alors $P(x)Tx^{-1} = -T^\sharp x$.

Un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est un champ de vecteurs polynomial X sur V de la forme $X(z) = u + Tz - P(z)v$, avec $u, v \in V$ et $T \in \mathfrak{l} = \mathrm{Lie}(L)$. Ainsi à X est associé un triplet $(u, T, v) \in V \times \mathfrak{l} \times V$, nous l'écrirons $X = (u, T, v)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie du crochet de Lie défini par:

$$[X_1, X_2] = \big(T_1 u_2 - T_2 u_1, [T_1, T_2] + 2(u_1 \square v_2) - 2(u_2 \square v_1), -T_1^\sharp v_2 + T_2^\sharp v_1\big),$$

où $X_i = (u_i, T_i, v_i)$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est appelée *algèbre de Kantor-Koecher-Tits* de l'algèbre de Jordan V. C'est une algèbre de Lie simple.

Soit σ l'involution de G définie par $\sigma(g) = j \circ g \circ j$, et notons également σ sa différentielle à l'élément neutre. Si $X(z) = u + Tz - P(z)v$, alors

$$\sigma(X)(z) = P(z)X(-z^{-1}) = -v - P(z)Tz^{-1} + P(z)u = -v - T^\sharp z + P(z)u.$$

Ainsi $\sigma(u, T, v) = (-v, -T^\sharp, -u)$.

Soit ν une *involution de Cartan* de V c'est-à-dire un automorphisme involutif de V tel que la forme bilinéaire $\tau(\nu x, y)$ soit définie positive. Nous considérons le produit scalaire définie sur V par $(x \mid y) = \tau(\nu x, y)$, et nous notons T^* l'adjoint d'un endomorphisme T par rapport à ce produit scalaire.

PROPOSITION 1.1. *L'application $\theta : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ définie par*

$$\theta(u, T, v) = \big(-\nu(v), -T^*, -\nu(u)\big),$$

est une involution de Cartan de l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits.

DÉMONSTRATION. Si $X = (u, T, v), X' = (u', T', v') \in \mathfrak{g}$. Soit B la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Elle s'écrit ([14, Proposition 7.1)]:

$$B(X, X') = B_{\mathfrak{g}_0}(T, T') + 2\,\mathrm{Tr}(TT') + 4\tau(u, v') + 4\tau(v, u'),$$

où $B_{\mathfrak{g}_0}$ désigne la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Or la forme bilinéaire $\tau(x, \nu(y))$ est définie positive sur V, donc la forme de Killing

$$B(X, \theta X) = -B_{\mathfrak{g}_0}(T, T^*) - 2\,\mathrm{Tr}(TT^*) - 4\tau(u, \nu(u)) - 4\tau(v, \nu(v))$$

est définie négative, et θ est une involution de Cartan de l'algèbre $\mathfrak{g}$. $\square$

Notons que l'involution de Cartan du groupe conforme G associée à θ s'écrit $\theta(g) = \nu \circ j \circ g \circ j \circ \nu$.

La sous-algèbre $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\theta = \{(u, T, -\nu(u)) \mid T^* = -T\}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal K de G. Soit $\bar{N} = \sigma(N)$ le groupe des transformations conformes $\bar{n}_v = j \circ n_v \circ j$, $\bar{n}_v(x) = (x^{-1} - v)^{-1}$.

Proposition 1.2 ([2, Théorème 2.1.4, Section 2.3]). *La transformation conforme $\bar{n}_v$ est définie en 0, $\bar{n}_v(0) = 0$ et sa différentielle en 0 est égale à l'identité, $(D\bar{n}_v)_0 = I$.*

Réciproquement, si g est une transformation conforme définie en 0 et telle que $Dg_0 = I$, alors $g \in \bar{N}$.

Proposition 1.3 ([2, Theorem 2.14, Section 2.3]). *Soit G' l'ensemble des transformations conformes définies en 0. Alors G' est un ouvert dense de G et*

$$\{g \in G' \mid g(0) = 0\} = \bar{P}.$$

De plus $G' = NL\bar{N}$. L'application $N \times L \times \bar{N} \to G'$ est un difféomorphisme.

Nous appelons cette décomposition, décomposition de Gelfand-Naimark.

Proposition 1.4. *Si la transformation $g \in G$ est définie en $x \in V$, alors, $gn_x \in NL\bar{N}$ et sa décomposition de Gelfand-Naimark s'écrit: $gn_x = n_{g.x} Dg(x)\bar{n}'$, où $Dg(x) \in L$ désigne la différentielle de l'application L-conforme $x \mapsto gx$ et $\bar{n}' \in \bar{N}$.*

Démonstration. Le groupe des translations N peut être identifié à l'ensemble des transformations conformes $g \in G$ telles que $Dg(x) = \mathrm{id}$ quelque soit $x \in V$. Puisque tout élément $g \in NL\bar{N}$ s'écrit $g = n(g)l(g)\bar{n}'(g) = n_{g.0} \circ l(g) \circ \bar{n}'(g)$. D'après la Proposition 1.2 la différentielle de g en 0 est égale à $Dg(0) = \mathrm{id} \circ Dl(g)(0) \circ \mathrm{id}$, où id désigne la transformation identité. Or la transformation $l(g)$ étant linéaire elle coïncide avec sa différentielle, ainsi $Dg(0) = l(g)$ et donc $g = n_{g.0} Dg(0)\bar{n}'$, Considérons maintenant $g' = gn_x = n_{g'.0} Dg'(0)\bar{n}'$. Alors $n_{g'.0} = n_{gn_x.0} = n_{g.x}$ et de même

$$D(g')(0) = D(gn_x)(0) = D(g)(n_x 0) D(n_x)(0) = D(g)(x).$$

Donc $gn_x = n_{g.x} Dg(x)\bar{n}'$. □

Par la suite nous aurons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est un simple calcul:

Lemme 1.5. *Soit $u \in V$, alors pour tout $n_x \in N$,*

$$\theta(n_{-x}).u = (u^{-1} + \nu(x))^{-1}.$$

2. Représentations induites de P

Pour tout $m \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon = 0, 1$ introduisons le caractère $\chi_{m,\varepsilon}$ du groupe L défini par:

$$\chi_{m,\varepsilon}(g) = (\operatorname{sgn}(\lambda(g))^{\varepsilon}|\lambda(g)|^{m}$$

Nous prolongeons trivialement ce caractère à $\bar{P} = L \ltimes \bar{N}$, où $\bar{N} = \sigma(N)$. Considérons l'espace $\tilde{I}_{m,\varepsilon} = \{f \in C^{\infty}(G) : f(h\bar{p}) = \chi_{m,\varepsilon}(\bar{p})f(h)\}$ où $h \in G, \bar{p} \in \bar{P}$.

Le groupe G y opère par: $(\tilde{\pi}_{m,\varepsilon}(g)f)(h) = f(g^{-1}h)$ pour tout $f \in \tilde{I}_m$. La norme d'une fonction $f \in \tilde{I}_{m,\varepsilon}$ est définie par: $\|f\|^2 = \int_K |f(k)|^2\,dk$, où K est le sous-groupe compact maximal du groupe conforme.

D'après la décomposition de Gelfand-Naimark toute fonction $f \in \tilde{I}_{m,\varepsilon}$ est déterminée par sa restriction $f_V(x) = f(n_x)$ sur $N \simeq V$. Nous notons $I_{m,\varepsilon}$ le sous-espace de $C^{\infty}(V)$ des fonctions f_V, avec $f \in \tilde{I}_{m,\varepsilon}$.

Le groupe G agit également dans $I_{m,\varepsilon}$ par:

$$\pi_{m,\varepsilon}(g)f(x) = \chi_{m,\varepsilon}(Dg^{-1}(x))f(g^{-1}x).$$

En particulier, si g est une translation, $g : x \to x + a$, avec $x, a \in V$, alors

$$\pi_{m,\varepsilon}(g)f(x) = f(x-a),$$

si $g \in L$, alors

$$\pi_{m,\varepsilon}(g)f(x) = \chi_{m,\varepsilon}(g^{-1})f(g^{-1}x),$$

et si $g = j : x \to -x^{-1}$, alors pour tout x inversible

$$\pi_{m,\varepsilon}(g)f(x) = |\det x|^{-2m} f(-x^{-1}).$$

En effet, [5, Proposition II.3.3] pour tout x inversible, $D(j)(x) = P(x)^{-1} \in L$ et $\lambda(P(x)) = (\det x)^2$.

Soit $g = kh\bar{n}_x$, avec $k \in K$, $h \in L$. Notons que l'élément h est déterminé modulo $K \cap L$ à gauche. Nous posons $\delta_0(g) = \lambda(h)^{-n/r}$. On peut facilement montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.1. *La norme d'une fonction $f(n_x) = f_V(x) \in I_{m,\varepsilon}$ est donnée par*:

$$\|f\|^2 = \int_V |f_V|^2 \delta_0(n_x)^{2\operatorname{Re} m - n/r}\,dx.$$

COROLLAIRE 2.2. *Pour* $\operatorname{Re} m = n/2r$, *$I_{m,\varepsilon} \subset L^2(V)$ et la représentation $\pi_{m,\varepsilon}$ est unitaire.*

PROPOSITION 2.3. *Soit $n_x = k(n_x)h(n_x)\bar{n} \in N$, alors*

$$\delta_0(n_x) = \lambda(h(n_x))^{-1} = \det(x^{-1} + \nu(x)) \det x.$$

DÉMONSTRATION. Si $g = k(g)h(g)\bar{n}$ alors, $\theta(g^{-1})g = n^{-1}h(g)^2\bar{n}$. Mais d'après la décomposition de Gelfand-Naimark $g = nD(g)(0)\bar{n}$. Ainsi

$$h(n_x)^2 = D(\theta(n_{-x})n_x)(0).$$

Soit $u \in V$, alors d'après le Lemme 1.5 $\theta(n_{-x})n_x u = ((x+u)^{-1} + \nu(x))^{-1}$. Considérons la différentielle de cette application en 0.

$$D(\theta(n_{-x})n_x)(0) = P(x^{-1} + \nu(x))^{-1}P(x)^{-1}.$$

L'opérateur de Bergman $B(x, y)$ est défini par $B(x, y) = P(x)P(x^{-1} - y)$, et on montre que c'est une fonction polynomiale en x et y, [9, Lemma 2.3]. Ainsi

$$D(\theta(n_{-x})n_x)(0) = B(x, -\nu(x))^{-1}.$$

Puisque $\lambda(P(x)) = \det x^2$ il en résulte que $\delta_0(n_x) = \det(x^{-1} + \nu(x)) \det x$. $\square$

La norme d'une fonction dans $I_{m,\varepsilon}$ est donnée par

$$\|f\|^2 = \int_V |f|^2 \operatorname{Det} B(x, -\nu(x))^{mr/n-1/2}\, dx.$$

LEMME 2.4. *Soit $f \in C^\infty(V)$ telle que, pour tout $g \in G$, $\pi_{m,\varepsilon}(g)f \in C^\infty(V)$, alors $f \in I_{m,\varepsilon}$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction ϕ définie sur G par

$$\phi(g) = (\pi_{m,\varepsilon}(g^{-1})f)(0).$$

Pour $g = n_x l n'$,

$$\phi(g) = \chi_{m,\varepsilon}(Dg(0))f(g.0) = \chi_{m,\varepsilon}(l)f(n_x).$$

L'application $N \times L \times \bar{N} \to G'$ étant un difféomorphisme la fonction $\phi(g) \in C^\infty(G')$. Nous démontrons qu'elle est une section du fibré $G' \times_P \mathbb{R}$, effectivement

$$\begin{aligned}
\phi(gp) &= (\pi_{m,\varepsilon}(p^{-1}g^{-1})f)(0) = A(p^{-1}g^{-1}, 0)f(gp.0) \\
&= A(p^{-1}, 0)A(g^{-1}, p^{-1}0)f(gp.0) \\
&= \chi_{m,\varepsilon}^{-1}(p)A(g^{-1}, 0)f(g0) = \chi_{m,\varepsilon}^{-1}(p)(\pi_{m,\varepsilon}(g^{-1})f)(0) \\
&= \chi_{m,\varepsilon}^{-1}(p)\phi(g).
\end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer que la fonction initiale f est la restriction de $\phi(g)$ à V, plus précisément $f(x) = \phi(n_x)$. Le résultat s'en déduit. $\square$

A présent nous pouvons donner la décomposition de $L^2(V)$ en sous-espaces irréductibles pour l'action du sous-groupe parabolique P.

Considérons le sous-espace $H_\omega \subset L^2(V)$ associé à une L-orbite ouverte ω dans V:

$$H_\omega = \left\{f \in I_{n/2r,\varepsilon}, \mid \operatorname{supp} \hat{f} \subset \bar{\omega}\right\},$$

où $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f définie par

$$\hat{f}(y) = \mathscr{F} f(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_V e^{-i\tau(x,y)} f(x)\, dx.$$

PROPOSITION 2.5. *Pour la restriction à P de la représentation $\pi_{n/2r,\varepsilon}$ l'espace $L^2(V)$ se décompose comme suit en sous-espaces invariants irréductibles*:

$$L^2(V) = \bigoplus_{\omega\in\Omega} H_\omega.$$

où Ω désigne l'ensemble des L-orbites ouvertes dans V.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que les sous-espaces H_ω sont invariants par l'action du sous-groupe parabolique maximal P. En effet, $P = L \ltimes V$ et donc pour $g = n_a$, $a \in V$,

$$\mathscr{F}(\pi_{n/2r,\varepsilon}(g) f)(y) = e^{-i\tau(y,a)/2} \hat{f}(y),$$

et pour $g \in L$,

$$\mathscr{F}(\pi_{n/2r,\varepsilon}(g) f)(y) = \left(\operatorname{sgn} \det D(g^{-1}(y))\right)^{\varepsilon} |\det D(g^{-1}(y))|^{n/2r} \hat{f}(g^{-1}y).$$

Tout sous-espace fermé F de $L^2(V)$ invariant par translations est de la forme

$$F_A = \{\mathscr{F}(f), \mid f\chi_A = f \;\; pp\}$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique d'un sous-ensemble $A \subset V$ de mesure positive.

Supposons qu'il existe un sous-espace F_A contenu dans H_ω, alors A est contenu dans $\bar{\omega}$. Le sous-espace H_ω étant P invariant le sous-ensemble A est invariant par l'action du groupe L et donc il est une union de L-orbites dans V. De l'autre côté l'unique L-orbite de mesure non nulle contenue dans $\bar{\omega}$ est l'orbite ω elle-même. Donc le sous-espace F_A coïncide avec le sous-espace H_ω. D'où l'irréductibilité de la décomposition. $\square$

Il faut noter que la décomposition sous l'action du groupe conforme tout entier est plus complexe. Pour l'étudier nous utiliserons la représentation de Weil.

Considérons la représentation dérivée $d\pi_m$ de la représentation $\pi_{m,\varepsilon}$. Soit $g_t \subset G$ un sous groupe à un paramètre du groupe conforme, et soit $f \in I_{m,\varepsilon}$,

$$\pi_{m,\varepsilon}(g_t)f(z) = \chi_{m,\varepsilon}(Dg_{t^{-1}}(z))f(g_t^{-1}(z)),$$

Alors l'action du champ de vecteurs $X(z)$ associé au sous groupe g_t est donnée par

$$d\pi_m(X)f(z) = -m\frac{r}{n}\operatorname{div} X(z)f(z) - Df(z)(X(z)).$$

pour tout $f \in C^\infty(V)$, où $\operatorname{div} X(z) = \operatorname{Tr} DX(z)$.

LEMME 2.6. *L'action infinitésimale de l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(V)$ correspondant à la représentation $\pi_{m,\varepsilon}$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
&\text{Pour } X(z) = u, && d\pi_m(X)f(z) = -D_u f(z),\\
&\text{Pour } X(z) = P(z)v, && d\pi_m(X)f(z) = -2m\tau(z,v)f(z) - D_{P(z)v}f(z),\\
&\text{Pour } X(z) = T(z), && d\pi_m(X)f(z) = -m\frac{r}{n}\operatorname{Tr} Tf(z) - D_{T(z)}f(z).
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soit $X(z) = u$, alors $\operatorname{div} X(z) = \operatorname{div} u = 0$, et $Df(z)X(z) = D_u f(z)$. Soit $X(z) = T(z)$, alors $\operatorname{div} T(z) = \operatorname{Tr} DT(z) = \operatorname{Tr} T$. Soit $X(z) = P(z)v$. Rappelons que $D_y P(z)v = 2P(z,y)v = 2(z \square v)(y)$. Ainsi $\operatorname{div} P(z)v = \operatorname{Tr} D_y P(z)v = 2\operatorname{Tr}(z \square v) = 2\operatorname{Tr} L(zv) = 2(n/r)\tau(z,v)$. □

3. Représentation d'une algèbre de Jordan

Soit V une algèbre de Jordan simple sur $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une *représentation* ϕ de V dans E est une application linéaire $\phi : V \mapsto \operatorname{End}(E)$, vérifiant

$$\phi(xy) = \frac{1}{2}(\phi(x)\phi(y) + \phi(y)\phi(x)).$$

Supposons que E soit un espace *pseudo-euclidien*, c'est-à-dire que E soit muni d'une forme bilinéaire, symétrique non dégénérée $\beta(\xi, \eta)$.

Pour ξ fixé dans E l'application $x \mapsto \beta(\phi(x)\xi, \xi)$ est une forme linéaire sur V. Il existe donc $y \in V$ tel que $\beta(\phi(x)\xi, \xi) = \operatorname{tr}(xy)$. Nous posons $y = Q(\xi)$. Ainsi Q est une forme quadratique sur E à valeurs dans V.

La représentation ϕ est dite *symétrique* si pour tout x de V l'endomorphisme $\phi(x)$ est symétrique par rapport à β. Soit $\iota(w) = w^*$ l'involution de $\operatorname{End}(E)$ définie par $\beta(w\xi, \eta) = \beta(\xi, \iota(w)\eta)$.

Nous notons $W = \operatorname{Sym}_\beta(E)$ l'ensemble des points fixes de l'involution ι. C'est une algèbre de Jordan pour le produit de Jordan: $AB = (AB + BA)/2$.

Définissons *l'algèbre de Lie symplectique* $\mathfrak{sp}(E)$ comme l'algèbre de Lie des transformations préservant la forme symplectique σ sur $E \times E$ définie par:

$$\sigma\big((\xi_1, \xi_2), (\eta_1, \eta_2)\big) = \beta(\xi_1, \eta_2) - \beta(\eta_1, \xi_2).$$

Nous représentons tout élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ par une matrice par blocs de la forme suivante: $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sp}(E) \subset \mathfrak{gl}(E \times E)$ où A, B, C sont des endomorphismes de E tels que $B, C \in W$. Il en vient la proposition suivante:

PROPOSITION 3.1. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ est l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits $\mathfrak{g}_W$ de l'algèbre de Jordan W.*

Le théorème suivant est dû à Neher [10].

THÉORÈME 3.2. *Soient V et W deux algèbres de Jordan semi-simples réelles et $\phi : V \to W$ un homomorphisme d'algèbres de Jordan, alors il existe un unique homomorphisme d'algèbres de Lie $\Psi : \mathfrak{g}_V \to \mathfrak{g}_W$ où $\mathfrak{g}_V$ et $\mathfrak{g}_W$ sont les algèbres de Kantor-Koecher-Tits correspondant aux algèbres de Jordan V et W respectivement, tel que $\Psi(u, 0, v) = (\phi(u), 0, \phi(v))$.*

Nous appliquons ce résultat au cas d'une représentation symétrique d'une algèbre de Jordan simple réelle $\phi : V \mapsto W = \mathrm{Sym}_\beta(E)$.

Ainsi il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\Psi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{sp}(E)$.

REMARQUE 3.3. De façon plus spécifique d'après la Proposition 3.1 et le Théorème 3.2 nous avons

$$\Psi((u, T, v)) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(T) & \phi(u) \\ \phi(v) & -\tilde{\phi}(T^\sharp) \end{pmatrix}.$$

Ceci implique que pour tout $T \in \mathfrak{l} : \tilde{\phi}(T^\sharp) = \tilde{\phi}(T)^*$.

THÉORÈME 3.4. *Soient ϕ une représentation symétrique d'une algèbre de Jordan simple V dans un espace pseudo-euclidien E de dimension N, alors il existe une représentation $\tilde{\phi}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ dans E telle que $\tilde{\phi}(x \,\square\, y) = \phi(x)\phi(y)/2$.*

Pour démontrer ce théorème il suffit d'identifier les composantes des champs de vecteurs des éléments des algèbres $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_W$ dont les relations sont données par le théorème de Neher et la Proposition 3.1.

REMARQUE 3.5. Soit ϕ une représentation symétrique d'une algèbre de Jordan simple réelle dans un espace pseudo-euclidien E, alors $\tilde{\phi}(L(x)) = \phi(x)/2$.

Notons que l'algèbre de Jordan exceptionnelle Herm(3, $\mathbb{O}$) dite algèbre d'Albert n'admet pas de représentation symétrique.

4. Représentation de Weil associée à une représentation d'une algèbre de Jordan

En 1964 André Weil ([16]) introduisit une représentation naturelle du groupe métaplectique connue sous le nom de représentation de Segal-Shale-Weil ou encore de représentation harmonique.

Dans ce travail nous construisons l'analogue de la représentation harmonique pour le groupe conforme d'une algèbre de Jordan simple réelle associée à une représentation de cette dernière.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, nous notons $\mathscr{S}(E)$ l'espace de fonctions C^∞ à décroissance rapide sur E.

PROPOSITION 4.1. *Soient V une algèbre de Jordan simple, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de son groupe conforme et E un espace vectoriel pseudo-euclidien muni d'une forme bilinéaire $\beta(\xi, \eta)$. Considérons une représentation symétrique ϕ de l'algèbre de Jordan V dans E. Alors l'application $\rho : \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{End}(\mathscr{S}(E))$ définie par les formules suivantes*:

$$\begin{aligned}
&\text{Pour } X(z) = u, && \rho(X)f(\xi) = -\frac{i}{2}\beta(\phi(u)\xi, \xi)f(\xi),\\
&\text{Pour } X(z) = P(z)v, && \rho(X)f(\xi) = -\frac{i}{2}\beta\left(\phi(v)\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(\xi),\\
&\text{Pour } X(z) = T(z), && \rho(X)f(\xi) = \beta\left(\tilde{\phi}(T)\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(\xi) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{\phi}(T)f(\xi).
\end{aligned}$$

est une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{S}(E)$.

DÉMONSTRATION. La représentation ρ est la composée de la représentation harmonique H de l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}(E)$ et de l'homomorphisme Ψ. Définissons explicitement la représentation H. A un polynôme $p(x, \xi)$ sur $E \times E^*$ on associe un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux qui est déterminé par la condition: $p(x, \partial/\partial x)e^{\beta(x,\xi)} = p(x, \xi)e^{\beta(x,\xi)}$. Considérons l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des polynômes $p(x, \xi)$ sur $E \times E^*$ homogènes de degré 2. Alors l'ensemble $\mathscr{P}_2$ muni du crochet de Lie $[p, q] = p(x, \partial/\partial x)q(x, \partial/\partial x) - q(x, \partial/\partial x)p(x, \partial/\partial x)$ est une algèbre de Lie admettant la graduation suivante:

$$p(x, \xi) = p_0(x) + p_1(\xi, x) + p_2(\xi),$$

où $p_0(x)$ et $p_2(\xi)$ sont des formes quadratiques, sur E et sur E^* respectivement, et $p_1(x, \xi)$ est une forme bilinéaire sur $E \times E^*$. Voir Satake [14].

Considérons la représentation H de $\mathscr{P}_2$ définie pour tout $f \in \mathscr{S}(E)$ par:

$$\begin{aligned} H(p_0(x))f &= -\frac{i}{2}p_0(x)f, \\ H(p_1(x,\xi))f &= p_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)f + \frac{N}{2}(\operatorname{tr} p_1)f, \\ H(p_2(\xi))f &= -\frac{i}{2}p_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)f. \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie $\mathscr{P}_2$ étant isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(E)$ nous définissons la représentation harmonique de cette dernière par:

$$\begin{aligned} H\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f(x) &= H(\beta(Bx, x))f(x), \\ H\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} f(x) &= H\left(\beta\left(C\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) f(x), \\ H\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix} f(x) &= H\left(\beta\left(Ax, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) f(x). \end{aligned}$$

D'oú le résultat pour la représentation $\rho = H\Psi$. □

Notons que la représentation ρ étant une sous-représentation de la représentaiton harmonique il existe une représentation unitaire W du revètement universel $\tilde{G}$ du groupe conforme dans $L^2(E)$ telle que sa représentation dérivée dans $\mathscr{S}(E)$ coïncide avec ρ.

5. Identité de Hecke et opérateurs d'entrelacement

Soient V une algèbre de Jordan simple, ϕ une représentation symétrique de V dans un espace pseudo-euclidien E et $p(\xi)$ une fonction mesurable et tempérée sur E.

DÉFINITION 5.1. La fonction $p(\xi)$ est dite *pseudo-harmonique* si elle vérifie au sens des distributions le système différentiel suivant $Q(\partial/\partial\xi)p(\xi) = 0$, où $Q(\xi)$ est la forme quadratique à valeurs dans V associée à la représentation ϕ, et qu'elle est ϕ-homogène de degré (ν, ε) avec $\nu \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 0, 1$ si

$$p(\phi(x)\xi) = (\operatorname{sgn}\det x)^{\varepsilon}|\det x|^{\nu}p(\xi),$$

pour tout $x \in V$ et $\xi \in E$.

LEMME 5.2. *Soient p une fonction ϕ-homogène de degré d'homogénéité (ν, ε) sur E et $T \in \mathfrak{g}_0$ un élément de l'algèbre de structure, alors p vérifie l'équation d'Euler suivante*:

$$(Dp)_\xi(\tilde{\phi}(T)\xi) = \nu \operatorname{tr}(Te)p(\xi),$$

où e désigne l'élément neutre de l'algèbre de Jordan V. Et en particulier,

$$(Dp)_\xi(\phi(x)\xi) = \nu \operatorname{tr}(x)p(\xi).$$

DÉMONSTRATION. Considérons le sous groupe à un paramètre $\{e^{tT}\}$ du groupe de structure L. Alors $p(\phi(e^{tT}e)\xi) = \det(e^{tT}e)^\nu p(\xi)$. Dérivons cette expression par rapport à t et posons $t = 0$, alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(\phi(e^{tT}e)\xi) = D_\xi p(\tilde{\phi}(T)\xi) = \nu \operatorname{tr}(Te)p(\xi). \qquad \square$$

THÉORÈME 5.3. *Soit $p(\xi)$ une fonction pseudo-harmonique et ϕ-homogène de degré (ν, ε). Pour tout $x \in V$ inversible la fonction p vérifie au sens des distributions l'identité suivante*:

$$\int_E e^{i\beta(\phi(x)\xi,\xi)/2} e^{-i\beta(\xi,\eta)} p(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{N/2} e^{-i\pi\sigma(x)/4} |\det(x)|_\varepsilon^{-\nu-N/2r} e^{-i\beta(\phi(x^{-1})\eta,\eta)/2} p(\eta).$$

où $N = \dim E$, r est le rang de l'algèbre de Jordan V, $d\xi$ désigne une mesure pseudo-euclidienne sur E et $\sigma(x)$ est la signature de la forme quadratique $\beta_x(\xi, \xi) = \beta(\phi(x)\xi, \xi)$.

Ce théorème a été démontré dans [3]. Notons que compte tenu de sa démonstration et les hypothses sur la fonction $p(\xi)$ ce résultat reste valable pour les distributions tempérées.

Construisons une famille d'opérateurs d'entrelacement entre la représentation harmonique ρ et les représentations dérivées de la série principale dégénérée $\pi_{m,\varepsilon}$ du groupe conforme.

Soit ϕ une représentation de V dans E et Q la forme quadratique associée. Soit p une fonction pseudo-harmonique, ϕ-homogène de degré(ν, ε). Définissons l'application F de $\mathscr{S}(E)$ dans $C^\infty(V)$ par

$$Ff(x) = \int_E e^{\frac{i}{2}\operatorname{tr} Q(\xi)x} p(\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(x)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Considérons pour une fonction $f(x) \in L^1(V)$ sa transformation de Fourier

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_V e^{-i\operatorname{tr} xy} f(x)\, dx.$$

THÉORÈME 5.4. *Soit $p(\xi)$ une fonction pseudo-harmonique et ϕ-homogène de degré (ν, ε). Supposons que pour tout x de V $\sigma(x) \in 8\mathbb{Z}$.*

Si $\nu = 2m - N/2r$ l'opérateur F entrelace les représentations ρ et $d\pi_m$: pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $F(\rho(X)f) = d\pi_m(X)(Ff)$.

DÉMONSTRATION. Vérifions cette relation sur les générateurs de l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits $\mathfrak{g}$.

Pour $X(z) = u$, $u \in V$, nous avons

$$\begin{aligned} d\pi_m(X)(Ff)(z) &= -D_u \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ &= -\frac{i}{2} \int_E \beta(\phi(u)\xi, \xi) e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ &= F(\rho(X)f)(z). \end{aligned}$$

Pour $X(z) = T(z)$, $T \in \mathfrak{g}_0$,

$$\begin{aligned} d\pi_m(X)(Ff)(z) &= -m\frac{r}{n}\operatorname{Tr} T \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ &\quad - D_{T(z)} \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi \\ &= \int_E \left(-m\frac{r}{n}\operatorname{Tr} T - \frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi, \tilde{\phi}(T)\xi)\right) e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 5.2 nous écrivons

$$\begin{aligned} &F(\rho(T(z))f)(z) \\ &\quad = \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} (p(\xi) \left(\beta\left(\tilde{\phi}(T)\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) f(\xi)\right) d\xi \\ &\qquad + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{\phi}(T) \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} (p(\xi) f(\xi))\, d\xi \\ &\quad = -\int_E \left(\beta\left(\tilde{\phi}(T)\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi)\right) f(\xi)\, d\xi \\ &\qquad + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{\phi}(T) \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} (p(\xi) f(\xi))\, d\xi \\ &\quad = \int_E \left(\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\tilde{\phi}(T) - \frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi, \tilde{\phi}(T)\xi) - \nu\frac{r}{2n}\operatorname{Tr} T\right) e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} p(\xi) f(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Tr}\tilde{\phi}(T) = N/2n \operatorname{Tr} T$ il en résulte que pour $\nu = 2m - N/2r$ nous avons

$$d\pi_m(T(z))(Ff)(z) = F(\rho(T(z))f)(z).$$

Considérons l'élément du groupe conforme $j \in G$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ étant une algèbre de Lie symétrique nous pouvons l'écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ et

$$\mathrm{Ad}(j)\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}_{-i}, \quad i = \pm 1.$$

En particulier, si $X(z) = u$, alors $(\mathrm{Ad}(j)X)(z) = P(z)u$. Donc

$$\rho(P(z)u)f = \rho(\mathrm{Ad}(j)X(z))f = \mathrm{Ad}(\rho(\log j))(\rho(X(z))f).$$

D'après les formules définissant la représentation ρ il résulte que l'on peut identifier l'opérateur $\rho(\log j)$ avec la transformation de Fourier:

$$(\rho(\log j)f)(y) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{N/2} \hat{f}(y) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{N/2} \int_V e^{-i\,\mathrm{tr}\, xy^t} f(x)\, dx.$$

Rappelons que $\pi_m(j)f(z) = (\det z)^{-2m} f(-z^{-1})$. Ainsi nous pouvons reformuler l'identité de Hecke en d'autres termes

$$\begin{aligned} d\pi_m(\log j)F_\nu f(z) &= (\det z)^{-2m} \int_E e^{-\frac{i}{2}\beta(\phi(z^{-1}\eta,\eta))} p(\eta) f(\eta)\, d\eta \\ &= (2\pi)^{N/2} \int_E e^{\frac{i}{2}\beta(\phi(z)\xi,\xi)} \int_E e^{-i\beta(\xi,\eta)} f(\eta)\, d\eta p(\xi)\, d\xi \\ &= F_\nu \rho(\log j) f. \end{aligned}$$

□

Comme une application de cette construction nous considérons le problème de la décomposition de la représentation $\pi_{2n/r,\varepsilon}$. A priori la réponse est connue. Le cas $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ a été étudié dans [8], celui de $V = M(r, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})$ dans [11] et [13], celui de $V = \mathrm{Skew}(2n, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{SO}(2n, 2n)$ dans [7, 12, 17] et la littérature citée. Cependant les méthodes utlisées varient d'un cas à l'autre. Le recours aux algèbres de Jordan, permet d'unifier l'étude de la série principale dégénérée.

Nous illustrons l'application de la méthode de Kashiwara et Vergne dans le cas techniquement simple de $V = M(r, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})$.

6. Algèbre de Jordan des matrices réelles $M(r, \mathbb{R})$

Considérons l'algèbre de Jordan des matrices carrées $V = M(r, \mathbb{R})$ munie du produit $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$. Nous notons xy le produit matriciel habituel. C'est une algèbre de Jordan simple réelle, de dimension $n = r^2$ et de rang r.

Nous considérons sur V l'involution de Cartan ν définie par $\nu(x) = x^t$. Le groupe $G = \mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets du groupe conforme de V qui est le groupe $\mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})/\pm I$. L'action du groupe G sur V est donnée par

$$gu = (au+b)(cu+d)^{-1}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Nous notons $L = S(GL(r, \mathbb{R}) \times GL(r, \mathbb{R})) \subset G$. De même nous notons

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in M(r, \mathbb{R}) \mid \det a = (\det d)^{-1} \right\},$$
$$\bar{P} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, d \in M(r, \mathbb{R}) \mid \det a = (\det d)^{-1} \right\}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon = (0, 1)$ nous notons $\chi_{m,\varepsilon}$ le caractère de L défini par:

$$\chi_{m,\varepsilon} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = (\operatorname{sgn} \det a)^{\varepsilon} |\det a|^{m}.$$

Alors la représentation induite $\pi_{m,\varepsilon} = \operatorname{Ind}_{\bar{P}}^{G} \chi_{m,\varepsilon}$ réalisée dans l'espace $I_{m,\varepsilon}$, s'écrit:

$$\pi_{m,\varepsilon}(g) f(x) = (\operatorname{sgn} \det(cx+d))^{\varepsilon} |\det(cx+d)|^{-m} f((ax+b)(cx+d)^{-1}),$$

avec $g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. D'après la Proposition 2.3 l'espace $I_{m,\varepsilon}$ est contenu dans

$$L^2(V, \det(e + x^t x)^{m-r} dx).$$

En effet $\det B(x, y) = \det(e - xy)^{2r}$. Pour $\operatorname{Re} m = r$ la représentation $\pi_{m,\varepsilon}$ est unitaire.

Soit E l'ensemble des matrices rectangulaires $M(2r, r, \mathbb{R})$ dont les éléments nous notons par des couples $\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\xi_i \in M(r, \mathbb{R})$. Soit β la forme bilinéaire symétrique définie sur $E \times E$ par $\beta(\xi, \eta) = \operatorname{tr}(\xi_1 \eta_2^t + \eta_1 \xi_2^t)$.

Considérons la représentation β-symétrique de V dans E définie par:

$$\phi(x)\xi = \phi(x) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\xi_1 \\ x^t \xi_2 \end{pmatrix}.$$

C'est une représentation d'algèbre de Jordan β-symétrique. En effet,

$$\beta(\phi(x)\xi, \eta) = \operatorname{tr}(x\xi_1\eta_2^t + \eta_1(x^t\xi_2)^t) = \operatorname{tr}(\xi_1\eta_2^t x + x\eta_1\xi_2^t) = \beta(\xi, \phi(x)\eta).$$

La forme quadratique $Q : E \mapsto V$ associée à ϕ est définie par la condition

$$\tau(x, Q(\xi)) = \beta(\phi(x)\xi, \xi) = \operatorname{tr}(x\xi_1\xi_2^t + \xi_1(x^t\xi_2)^t) = 2\operatorname{tr}(x\xi_1\xi_2^t) = \operatorname{tr}(x\,Q(\xi)).$$

Ainsi, $Q\left(\begin{smallmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{smallmatrix}\right) = 2\xi_1\xi_2^t$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2r, \mathbb{R})$ l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits de V. D'après le Théorème 3.2 il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sp}(2r^2, \mathbb{R})$.

Donc la représentation de Weil de $\mathfrak{sl}(2r, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(E)$ est donnée par:

$$\rho(X)f(\xi_1, \xi_2) = -i(\operatorname{tr} X_1\xi_1\xi_2^T)f(\xi_1, \xi_2),$$

pour $X = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_1 \in M(r, \mathbb{R})$.

$$\rho(X)f(\xi_1, \xi_2) = -i \operatorname{tr}\left(X_{-1}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2^t}\right)f(\xi_1, \xi_2),$$

pour $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $X_{-1} \in M(r, \mathbb{R})$, et

$$\rho(X)f(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{tr}\left(T_1\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_2^t} + T_2\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1^t}\right)f(\xi_1, \xi_2) + r\operatorname{tr} T_1 f(\xi_1, \xi_2).$$

pour $X = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, $T_1, T_2 \in M(r, \mathbb{R})$, $\operatorname{tr} T_1 = -\operatorname{tr} T_2$.

L'homomorphisme Ψ se prolonge en homomorphisme des algèbres de Lie complexifiées: $\Psi^{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{sp}(2r^2, \mathbb{C})$. Le groupe $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(2r, \mathbb{C})$ est simplement connexe, donc il existe un homomorphisme de groupes de Lie $\psi^{\mathbb{C}} : G^{\mathbb{C}} \to \mathrm{Sp}(2r^2, \mathbb{C})$ de différentielle $\Psi^{\mathbb{C}}$.

Par composition de la représentation harmonique de $\mathrm{Sp}(2r^2, \mathbb{R})$ et de la restriction $\psi^{\mathbb{R}}$ de $\psi^{\mathbb{C}}$ à $\mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})$ nous obtenons une représentation W du groupe $G = \mathrm{SL}(2r, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(E)$ définie par:

$$W(g)f(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} |\det a|^r f(a^{-1}\xi_1, (d^t)\xi_2), & g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in L; \\ e^{-i\operatorname{tr}(b\xi_1\xi_2^t)}f(\xi_1, \xi_2), & g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N; \\ \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{r^2}\int_E e^{i\beta(\xi,\eta)}f(\eta_1, \eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2, & g = j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

6.1. Opérateurs d'entrelacement Soit

$$p_{\nu,\varepsilon}(\xi) = A(\operatorname{sgn}\det\xi_1)^\varepsilon|\det\xi_1|^\nu + B(\operatorname{sgn}\det\xi_2)^\varepsilon|\det\xi_2|^\nu.$$

C'est une distribution ϕ-homogène de degré d'homogénéité (ν, ε) et pseudo-harmonique. En effet, il suffit de remarquer qu'une distribution $p(\xi)$ sur E est pseudo-harmonique si et seulement si

$$Q(\eta)\hat{p}(\eta) = 0,$$

c'est-à-dire $\operatorname{supp}\hat{p} \subset \Xi = \{\eta \in E \mid Q(\eta) = 0\}$. Dans notre cas l'ensemble Ξ contient un sous-ensemble dense

$$\{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in M(2r, r) \mid \eta_1 = 0\} \cup \{\eta = (\eta_1, \eta_2) \in M(2r, r) \mid \eta_2 = 0\}.$$

Les fonctions généralisés $p_{\nu,\varepsilon}$ étant des sommes des fonctions d'une des variables ξ_1 ou ξ_2 elles sont donc pseudo-harmoniques au sens des distributions.

Considérons une famille d'opérateurs $F_{\nu,\varepsilon} : \mathscr{S} \mapsto C^\infty(V)$ définis par:

$$F_{\nu,\varepsilon} f(x) = \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, x\xi_1\xi_2^t} p_{\nu,\varepsilon}(\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Dans le cas $V = M(r, \mathbb{R})$ nous pouvons généraliser le Théorème 5.4 pour l'action des groupes.

THÉORÈME 6.1. *Si $\nu = m - r$ l'opérateur $F_{\nu,\varepsilon}$ entrelace les représentations W et $\pi_{m,\varepsilon}$ du groupe G, c'est à dire, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(E)$, $F_{\nu,\varepsilon} f$ appartient à $I_{m,\varepsilon}$ et tout $g \in G$*

$$F_{\nu,\varepsilon}(W(g)f) = \pi_{m,\varepsilon}(g)(F_{\nu,\varepsilon} f).$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$, alors $\pi_{m,\varepsilon}(g)(F_{\nu,\varepsilon} f)$ est de classe C^∞. D'après le Lemme 2.4 il en résulte que $F_{\nu,\varepsilon} f \in I_{m,\varepsilon}$.

Vérifions les relations d'entrelacement sur les générateurs du groupe G.

Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in L$, alors

$$\begin{aligned}
F_{\nu,\varepsilon}(W(g)f)(x) &= \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, x\xi_1\xi_2^t} p(\xi) |\det a|^r f(d\xi_1, (a^t)^{-1}\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= |\det a|^{-r} \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, xd^{-1}\xi_1\xi_2^t a} p(d^{-1}\xi_1, a^t\xi_2) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= (\mathrm{sgn}\det a)^\varepsilon |\det a|^{-\nu-r} \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, axd^{-1}\xi_1\xi_2^t} p(\xi) f(\xi)\, d\xi \\
&= \pi_{m,\varepsilon}(g)(F_{\nu,\varepsilon} f)(x).
\end{aligned}$$

Si $g = n_b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
F_{\nu,\varepsilon}(W(g)f)(x) &= \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, x\xi_1\xi_2^t} p(\xi) e^{-i\,\mathrm{tr}\, b\xi_1\xi_2^t} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= \int_E e^{i\,\mathrm{tr}(x-b)\xi_1\xi_2^t} p(\xi) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= \pi_{m,\varepsilon}(n_b)(F_{\nu,\varepsilon} f)(x).
\end{aligned}$$

Si $g = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, il suffit de le vérifier lorsque $p(\xi) = p(\xi_1) = (\mathrm{sgn}\det\xi_1)^\varepsilon |\det\xi_1|^\nu$. Alors

$$\begin{aligned}
F_{\nu,\varepsilon}(W(j)f)(x) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{r^2} \int_E \int_E e^{i\,\mathrm{tr}\, x\xi_1\xi_2^t} p(\xi_1) e^{i\beta(\xi,\eta)} f(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_1\, d\eta_2\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{r^2} \int_E e^{i\,\mathrm{tr}(x\xi_1)\xi_2^t} p(\xi_1) \hat{f}(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_1\, d\xi_2
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{r^2/2} \int_V p(\xi_1)(\mathscr{F}_1^{-1}\hat{f})(-x\xi_1, \xi_1)\, d\xi_1$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{r^2/2} \int_V p(\xi_1)(\mathscr{F}_2 f)(-x\xi_1, \xi_1)\, d\xi_1,$$

où $\mathscr{F}_1 f$, (respectivement $\mathscr{F}_2 f$) désigne la transformation de Fourier partielle par rapport à la première (respectivement seconde) variable définie par

$$\mathscr{F}_1 f(\eta_1, \xi_2) = (2\pi)^{-r^2/2} \int_{M(r,\mathbb{R})} e^{i\,\mathrm{tr}\,\xi_1\eta_1^t} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1,$$

et

$$\mathscr{F}_2 f(\xi_1, \eta_2) = (2\pi)^{-r^2/2} \int_{M(r,\mathbb{R})} e^{i\,\mathrm{tr}\,\xi_2\eta_2^t} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2.$$

D'autre part,

$$\pi_{m,\varepsilon}(j)(F_{\nu,\varepsilon} f)(x) = \chi_{m,\varepsilon}(-x^{-1}) \int_E e^{-i\,\mathrm{tr}\,x^{-1}\xi_1\xi_2^t} p(\xi_1) f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$
$$= (2\pi)^{-r^2/2} \chi_{m,\varepsilon}(-x^{-1}) \int_V p(\xi_1)\mathscr{F}_2 f(\xi_1, x^{-1}\xi_1)\, d\xi_1$$
$$= (2\pi)^{-r^2/2} \chi_{m,\varepsilon}(-x^{-1}) \int_V p(-x\xi_1)(\mathscr{F}_2 f)(-x\xi_1, \xi_1) |\det x|^r\, d\xi_1$$

La fonction $p(\xi)$ est ϕ-homogène de degré (ν, ε) donc pour $m = \nu + r$ il en résulte que $\pi_{m,\varepsilon}(j)(F_{\nu,\varepsilon} f)(x) = F_{\nu,\varepsilon}(W(j)f)(x)$. □

6.2. Décomposition de $L^2(V)$ D'après le Théorème 6.1 l'opérateur $F_{0,\varepsilon}$ entrelace les représentations W et $\pi_{r,\varepsilon}$, et donc, en vertu de Corollaire 2.2 pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(E)$, son image $F_{0,\varepsilon} f$ appartient à $L^2(M(r, \mathbb{R}))$. Considérons les deux fonctions suivantes: $p_\pm(\xi_1, \xi_2) = (\operatorname{sgn}\det\xi_1 \pm \operatorname{sgn}\det\xi_2)/2$.

Notons $F_\pm : \mathscr{S}(E) \mapsto L^2(V)$ les opérateurs d'entrelacement correspondants. Soit ω_+ (respectivement ω_-) l'ensemble des matrices $\xi \in M(r, \mathbb{R})$ de déterminant positif (respectivement négatif). Les ensembles ω_+ et ω_- sont les deux orbites ouvertes pour l'action de L dans V. Soit H_ε ($\varepsilon = \pm$) le sous-espace fermé de $L^2(V)$ défini par $H_\varepsilon = \{f \in L^2(V) \mid \operatorname{supp}(\hat{f}) \subset \overline{\omega_\varepsilon}\}$. Les sous-espaces H_+ et H_- sont invariants et irréductibles sous l'action de P et $L^2(V) = H_+ \oplus H_-$.

THÉORÈME 6.2. *Sous l'action de la représentation $\pi_{r,1}$ du groupe G l'espace $L^2(V)$ se décompose en somme directe de deux sous-espaces invariants irréductibles,*

$$L^2(V) = H_+ \oplus H_-.$$

DÉMONSTRATION. Montrons que H_+ et H_- sont invariants sous l'action de G. L'image de l'opérateur d'entrelacement $F_\pm$ est contenue dans $H_\pm$. En effet,

$$\begin{aligned} F_\pm f(x) &= \int_{M(2r,r)} e^{\frac{i}{2}\operatorname{tr} Q(\xi)x} f(\xi) p_\pm(\xi) d\xi \\ &= \int_{\xi_1 \in M(r,\mathbb{R})} \int_{\xi_1 \xi_2^t = y} e^{i \operatorname{tr} xy} \operatorname{sgn} \det \xi_1 Y(\det y) f(\xi_1, y^t \xi_1^{-1}) |\det \xi_1|^r \, dy \, d\xi_1 \\ &= \int_{y \in M(r,\mathbb{R})} e^{i \operatorname{tr} xy} Y(\det y) \tilde{f}(y) \, dy. \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{f}(y) = \int_{\xi_1 \in M(r,\mathbb{R})} \operatorname{sgn} \det \xi_1 f(\xi_1, y^t \xi_1^{-1}) |\det \xi_1|^r d\xi_1,$$

où $Y(\det y) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} \det y)$ désigne la fonction de Heaviside. Donc $F_\pm f(x)$ est la transformée de Fourier d'une fonction à support dans $M_\pm(r, \mathbb{R})$.

D'après le Théorème 6.1 les sous-espaces $F_\pm(\mathscr{S}(E))$ sont invariants pour l'action de G. Il reste à montrer que les sous-espaces $H_\pm$ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Nous le verrons dans la section suivante. $\square$

Notons que la classification des représentations $\pi_{m,\varepsilon}$ de la série principale dégénérée fut donnée par Rubenthaler [11]. Sa démonstration est basée les propriétés des intégrales zêta de Jacquet-Godement. Le même résultat fut établi par par Sahi et Stein dans [13] en utilisant les fonctions de Bessel de seconde espèce.

6.3. Fonctions de Bessel Considérons la transformation $\mathscr{B}_{\nu,\varepsilon} = \mathscr{F}^{-1} \circ F_{\nu,\varepsilon}$ de $\mathscr{S}(E)$ dans $L^2(V)$ où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier habituelle sur V.

La transformation $\mathscr{B}_{\nu,\varepsilon}$ est de type Radon et elle s'écrit

$$\mathscr{B}_{\nu,\varepsilon} f(y) = \int_{\Sigma_y} f(\xi) p(\xi) \, d_y \xi.$$

où $\Sigma_y = \{\xi \in E;\ Q(\xi) = y\}$ et $d_y\xi$ est une mesure sur Σ_y. On peut facilement prouver la proposition suivante:

PROPOSITION 6.3. *Soient $V = M(r, \mathbb{R})$ et $E = M(2r, r)$. Considérons les deux fonctions suivantes $f_\pm(\xi) = (\det \xi_1 \pm \det \xi_2) e^{-\|\xi\|^2/2}$. Alors,*

$$F_\pm f_\pm(x) = c(e \pm i^r \det x) \det(e + x^t x)^{-(r+1)/2}.$$

La transformation $\mathscr{B}_\pm$ de $\mathscr{S}(E)$ s'écrit:

$$\mathscr{B}_\pm f(y) = (2\pi)^{r^2/2} \int_V f(\xi_1, y^t(\xi_1^{-1})^t) p_\pm(\xi) |\det \xi_1|^{-r} \, d\xi_1.$$

Considérons la transformée de Fourier inverse de la fonction $F_+f_+(x)$ (le cas de la fonction $F_-f_-(x)$ se traite de la même façon).

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-r^2/2}\mathscr{B}_+f_+(y)\\
&= \int_V e^{-(\xi_1\xi_1'+yy'(\xi_1\xi_1')^{-1})/2}\operatorname{sgn}\det\xi_1\, Y(\det y)\left(\det\xi_1+\frac{\det y}{\det\xi_1}\right)|\det\xi_1|^{-r}\,d\xi_1\\
&= Y(\det y)\int_V e^{-(\xi_1\xi_1'+yy'(\xi_1\xi_1')^{-1})/2}|\det\xi_1|^{-r+1}d\xi_1\\
&\quad + Y(\det y)\int_V e^{-(\xi_1\xi_1'+yy'(\xi_1\xi_1')^{-1})/2}\det y|\det\xi_1|^{-r-1}d\xi_1.
\end{aligned}$$

Soit B_ν désigne la fonction spéciale de Herz-Bessel, [6], définie par

$$B_\nu(y)=\int_\Omega e^{-\operatorname{tr}\lambda y'}e^{-\operatorname{tr}\lambda^{-1}}\det\lambda^{\nu-\frac{r+1}{2}}\,d\lambda,$$

où Ω désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Posons $\lambda=\frac{1}{2}\xi\xi'$. D'après [5, Proposition XVI.2.1], nous avons:

$$\int_\Omega f(\lambda)d\lambda=\int_{M(r,\mathbb{R})} f(\xi\xi')|\det\xi|^{-1/2}\,d\xi$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(F_+f_+)(y) &= cY(\det y)(B_{1/2}(yy'/4)+\det y B_{-1/2}(yy'/4))\\
&= cY(\det y)B_{1/2}(yy'/4)
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons construit deux fonctions non nulles dans H_+ et H_- respectivement. Ce qui achève la démonstration de la décomposition de $L^2(V)$ en sous-espaces invariants et irréductibles.

Références bibliographiques

[1] W. Bertram, 'On some causal and conformal groups', *J. Lie Theory* (2) **6** (1996), 215–247.

[2] ———, 'Un théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan', *Bull. Soc. Math. France* (2) **124** (1996), 299–327.

[3] J.-L. Clerc, 'A generalized Hecke identity', *J. Fourier Anal. Appl.* (1) **6** (2000), 105–111.

[4] J. Faraut and S. Gindikin, 'Pseudo-Hermitian symmetric spaces of tube type', in: *Topics in geometry* (Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996) pp. 123–154.

[5] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Math. Monographs. Oxford Science Publications (The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994).

[6] C. S. Herz, 'Bessel functions of matrix argument', *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), 474–523.

[7] K. D. Johnson, 'Degenerate principal series and compact groups', *Math. Ann.* **287** (1990), 703–718.

[8] M. Kashiwara and M. Vergne, 'Functions on the Shilov boundary of the generalized half plane', in: *Noncommutative harmonic analysis (Proc. Third Colloq., Marseille-Luminy, 1978)*, Lect. Notes in Math. 728 (Springer, Berlin, 1979) pp. 136–176.
[9] M. Koecher, 'Über eine Gruppe von rationalen Abbildungen', *Invent. Math.* **3** (1967), 137–171.
[10] E. Neher, 'Cartan-Involutionen von halbeinfachen Jordan-Tripelsysteme', *Math. Z.* **169** (1979), 271–292.
[11] H. Rubenthaler, 'Une série dégénérée de représentations de $SL_n(\mathbb{H})$', in: *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg 1976–1978), II* (Springer, Berlin, 1979) pp. 427–459.
[12] S. Sahi, 'Jordan algebras and degenerate principal series', *J. Reine Angew. Math.* **462** (1995), 1–18.
[13] S. Sahi and E.M.Stein, 'Analysis in matrix space and Speh's representations', *Invent. Math.* **101** (1990), 379–393.
[14] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Kanô Memorial Lect. 4 (Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980).
[15] R. S. Strichartz, 'Fourier transform and non-compact rotation groups', *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974/1975), 499–526.
[16] A. Weil, 'Sur certains groupes d'opérateurs unitaires', *Acta Math.* **111** (1964), 143–211.
[17] G. Zhang, 'Jordan algebras and generalized principal series representations', *Math. Ann.* **302** (1995), 773–786.

Université Libre de Bruxelles
CP 218, Campus de la Plaine
1050 Brussels
Belgium
e-mail: mpevzner@ulb.ac.be