*Second Meeting, December* 10*th*, 1886.

George Thom, Esq President, in the Chair.

## Composition de Mathématiques Élémentaires proposée au Concours d' Agrégation de 1886.

Solution par M. Paul Aubert

*On donne un cercle et deux points P et Q situés sur un diamètre, on joint les points P et Q aux extrémités A et B d'un diamètre du cercle par les droites PA et QB qui se coupent au point M. On fait tourner le diamètre AB et on demande*

*I. D' étudier les variations du rapport* $\frac{MA}{MB}$, *et de construire la figure quand le rapport a une valeur donnée.*

*II. D' étudier les variations de l' angle AMB, et de construire la figure quand cet angle a une valeur donnée.*

*III. A′ et B′ étant les seconds points d' intersection des droites MA, MB avec la circonférence donnée, trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′.*

I. On a (fig. 45)

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=\frac{\sin\mathrm{ABM}}{\sin\mathrm{BAM}}$$

Menons par le point B la parallèle BR à MP, on a

$$\frac{\sin\mathrm{ABM}}{\sin\mathrm{BAM}}=\frac{\sin\mathrm{OBQ}}{\sin\mathrm{OBR}}=\frac{\mathrm{OQ}\sin\mathrm{BOQ}}{\mathrm{BQ}}\cdot\frac{\mathrm{OR}\sin\mathrm{BOQ}}{\mathrm{BR}}\quad\frac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OR}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BQ}}.$$

Appelons $a$ et $b$ les distances des points P et Q au centre de la circonférence donnée dont nous désignerons le rayon par R, et soit $\lambda$ l' angle BOQ du diamètre mobile AB avec le diametre fixe PQ On a

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}=\frac{b}{a}\,\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BQ}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2+\mathrm{R}^2-2a\mathrm{R}\cos\lambda}{b^2+\mathrm{R}^2-2b\mathrm{R}\cos\lambda}}.$$

Si les points P et Q, au lieu d' être de part et d' autre du point O, sont du même côté de ce point (fig. 46), il est facile de voir que les relations précédentes subsistent, à condition de changer sous le radical $a$ en $-a$. On est donc amené à étudier les variations de l'expression

$$y = \frac{a^2 + R^2 - 2aR\cos\lambda}{b^2 + R^2 - 2bR\cos\lambda}$$

quand $\lambda$ varie de 0° à 360°. Il suffira de faire varier $\lambda$ de 0° à 180°, puisque cos $\lambda$ prend toutes ses valeurs possibles dans cet intervalle, puis de prendre pour l' intervalle de 180° á 360° les valeurs de l' expression déjà trouvées mais dans l' ordre inverse.

Quand cos $\lambda$ varie de $+1$ à $-1$ les deux termes de la fraction $y$ restent toujours positifs. Par suite $y$ ne devient jamais nulle ni infinie. Supposons d' abord P et Q de part et d' autre du centre. On peut écrire

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{b}\,\frac{b(a^2+R^2) - 2abR\cos\lambda}{a(b^2+R^2) - 2abR\cos\lambda} \\ &= \frac{a}{b}\left[1 + \frac{b(a^2+R^2) - a(b^2+R^2)}{a(b^2+R^2) - 2abR\cos\lambda}\right] \\ &= \frac{a}{b}\left[1 + \frac{(R^2-ab)(b-a)}{a(b^2+R^2) - 2abR\cos\lambda}\right] \end{aligned}$$

Quand cos $\lambda$ varie de $+1$ à $-1$ le dénominateur de la fraction augmente constamment. Si son numérateur est positif, $y$ diminue; si ce numérateur est négatif, $y$ augmente continuellement. Le rapport $\frac{MA}{MB}$ varie de $\frac{b}{a}\,\frac{R-a}{R-b}$ à $\frac{b}{a}\,\frac{R+a}{R+b}$ toujours dans le même sens, la première expression étant prise en valeur absolue.

Si les points P et Q sont du même côté du centre, on a

$$\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2+R^2+2aR\cos\lambda}{b^2+R^2-2bR\cos\lambda}}.$$

Quand cos $\lambda$ varie de $+1$ à $-1$, le numérateur de la fraction diminue, son dénominateur augmente. Donc le rapport diminue continuellement. Il varie de

$$\frac{b}{a}\,\frac{a+R}{b-R} \text{ à } \frac{b}{a}\,\frac{a-R}{b+R}.$$

Dans les deux cas le rapport $\frac{MA}{MB}$ varie toujours dans un certain sens quand $\lambda$ croît de 0° à 180°, et dans le sens contraire quand $\lambda$ continue à croître de 180° à 360°.

Construction géométrique: La construction du point M dépend

https://doi.org/10.1017/S0013091500001346 Published online by Cambridge University Press

de la position du diamètre AB, qui est elle même déterminée par la position du point B. Or nous avons vu que

$$\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BQ}}=\frac{a}{b}\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}.$$

Si le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ est donné, on connaît donc la valeur du rapport $\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BQ}}$. Pour obtenir le point B, on déterminera d' abord les deux points I et I′ du diamètre QR (fig. 47) dont le rapport des distances aux points Q et R a la valeur $\frac{a}{b}\,\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$, puis on décrira sur II′ comme diamètre une circonférence qui coupera la circonférence donnée en deux points répondant à la question, si la valeur donnée pour le rapport $\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}}$ est comprise entre les valeurs limites trouvées précédemment. On peut retrouver ces valeurs limites en discutant les conditions de possibilité de la construction géométrique.

II. Étude de l' angle AMB.

On a dans le triangle BQR dont l' angle B est egal à l' angle AMB

$$\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2-2\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BR}\cos\mathrm{B},$$

d' où
$$\cos\mathrm{B}=\frac{\overline{\mathrm{BQ}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2-\overline{\mathrm{QR}}^2}{2\mathrm{BQ}\cdot\mathrm{BR}}.$$

Mais
$$\overline{\mathrm{BQ}}^2=\mathrm{R}^2+b^2-2b\mathrm{R}\cos\lambda,$$
$$\overline{\mathrm{BR}}^2=\mathrm{R}^2+a^2-2a\mathrm{R}\cos\lambda,$$
$$\overline{\mathrm{QR}}^2=(a-b)^2.$$

Effectuant ces substitutions, il vient

$$\cos\mathrm{B}=\frac{\mathrm{R}^2+ab-(a+b)\mathrm{R}\cos\lambda}{\sqrt{(\mathrm{R}^2+b^2)(\mathrm{R}^2+a^2)-2(a+b)(ab+\mathrm{R}^2)\mathrm{R}\cos\lambda+4ab\mathrm{R}^2\cos^2\lambda}}.$$

Il est avantageux de se servir de l' expression de tgB. On trouve sans difficulté en partant de la formule précédente

$$\mathrm{tgB}=\frac{(a-b)\mathrm{R}\sin\lambda}{\mathrm{R}^2+ab-(a+b)\mathrm{R}\cos\lambda}.$$

Posons $\mathrm{tg}\frac{\lambda}{2}=t$, il vient

$$\mathrm{tgB}=\frac{2(a-b)\mathrm{R}t}{(\mathrm{R}+a)(\mathrm{R}+b)t^2+(\mathrm{R}-a)(\mathrm{R}-b)}.$$

Nous nous servirons de cette expression pour étudier les variations de l' angle B quand $\lambda$ varie de $0^\circ$ à $360^\circ$, c'est-à-dire, quand $t$ varie de zéro à $+\infty$ et de $-\infty$ à zéro. Il suffit de faire varier $t$ de zéro à $+\infty$, car quand il varie de $-\infty$ à zéro, tg B reprend les mêmes valeurs dans l' ordre inverse mais changées de signe.

Pour cela considérons la fonctien $y = \frac{mt}{pt^2 + q}$.

Si on écrit la relation qui lie $y$ à $t$ sous la forme

$$pyt^2 - mt + qy = 0$$

on voit qu' $y$ ne pourra prendre que les valeurs satisfaisant à l' inégalité

$$m^2 - 4pqy^2 > 0.$$

Deux cas à distinguer $\qquad 1^\circ \; pq < 0.$

L' inégalité est toujours verifiée et $y$ peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ a $+\infty$.

$$2^\circ \; pq > 0.$$

Posons $pq = k^2$ L' inégalité s' écrit

$$(m - 2ky)(m + 2ky) > 0$$

et, $m$ et $k$ designant des quantités positives, on doit avoir

$$-\frac{m}{2k} < y < \frac{m}{2k}$$

Dans ce cas $y$ reste compris entre deux limites correspondant aux valeurs de $t$ fournies par la relation précédente, où l' on donne successivement à $y$ les deux valeurs $-\frac{m}{2k}$ et $+\frac{m}{2k}$, et en prenant chaque fois pour $t$ la demi-somme des racines de l' equation ainsi obtenue

$$t = \frac{k}{p} \text{ et } t = +\frac{k}{p}.$$

En résumé, si nous ne considérons que les valeurs positives de $t$, les variations de $y$ correspondantes sont représentées pour le premier cas par la courbe (fig. 48), et pour le second cas par la courbe (fig. 49), si on a $p > 0$, et par la courbe (fig. 50) si on a $p < 0$.

Revenons maintenant à l' étude de tg B et appliquons les résultats que nous venons d' obtenir.

La condition relative au signe de $pq$ conduit à étudier le signe de $(R + a)(R + b)(R - a)(R - b)$. Cette expression ne change pas quand on y remplace $a$ par $-a$. Donc dans tous les cas de figure elle est du signe de $(R - a)(R - b)$.

$1^\circ$ $(R - a)(R - b) < 0$, ce qui exprime que l' un des points est intérieur et l' autre extérieur à la circonférence. Dans ce cas l' angle B varie de 180° à 90°, puis diminue jusqu' à 0° ; il est droit pour

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\frac{(a-\mathrm{R})(\mathrm{R}-b)}{(\mathrm{R}+a)(\mathrm{R}+b)}}\quad \text{ou}\quad \cos\lambda=\frac{\mathrm{R}^2+ab}{(a+b)\mathrm{R}},$$

comme l' indiquait la valeur de cos B.

2°. $(\mathrm{R}-a)(\mathrm{R}-b)>0$ Les deux points sont alors tous deux extérieurs ou tous deux intérieurs.

Si on a $(\mathrm{R}+a)(\mathrm{R}+b)>0$, ce qui exclut le cas où les points seraient extérieurs et du même côté, l' angle B est toujours aigu, il croît de zéro à une valeur maxima donnée par

$$\operatorname{tg}\mathrm{B}=\frac{(a-b)\mathrm{R}}{\sqrt{(\mathrm{R}^2-a^2)(\mathrm{R}^2-b^2)}}$$

et correspondante à $\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\frac{(\mathrm{R}-a)(\mathrm{R}-b)}{(\mathrm{R}+a)(\mathrm{R}+b)}}$.

Si on a $(\mathrm{R}+a)(\mathrm{R}+b)<0$, ce qui exprime que les deux points sont extérieurs à la circonférence et du même côté, l' angle B est toujours obtus, il varie de 180° à un minimum pour augmenter ensuite jusqu' à 180°.

En résumé, quand les points sont l' un intérieur l' autre extérieur à la circonférence, l' angle B varie toujours dans le même sens et prend toutes les valeurs de 0° à 180°.

Quand les points sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs l' angle B est toujours soit aigu soit obtus ; dans le premier cas, il commence par croître jusqu' à un certain maximum pour décroître ensuite jusqu' à zéro ; dans le second cas, il décroît de 180° à un minimum qu' il dépasse ensuite pour retourner à la valeur 180°.

Pour construire géométriquement le point M répondant à une valeur donnée de l' angle M, il suffit de déterminer la position du point B. L' angle QBR étant connu, et les points Q et R étant fixes, on décrira sur RQ un segment de cercle capable de l' angle donné. Les points d' intersection de ce segment avec la circonférence donnée donnent les points B cherchés. On voit que si les points sont l'un intérieur et l'autre extérieur, il y aura toujours au-dessus du diamètre QR un point B répondant à la question. Si les points sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs, il pourra y avoir deux positions, une seule, ou aucune suivant les cas. L' étude des conditions de possibilité de cette construction géométrique du point B conduirait aux résultats établis plus haut par une autre voie.

III. Les triangles semblables PMQ et RBQ donnent

$$\frac{BR}{PM} = \frac{QR}{QP} = \frac{QB}{QM};$$

on, puisque $BR = PA$,

$$\frac{PA}{PM} = \frac{QR}{QP}.$$

Le dernier rapport est constant, puisque les points Q et R sont fixes. Le point P étant fixe, il résulte de cette égalité que le point M est sur une circonférence homothétique à la circonférence donnée par rapport au point P, qui est centre d' homothétie directe.

On a aussi $\quad \dfrac{QB}{QM} = \dfrac{QR}{QP}.$

Cette égalité montre que le point Q est le centre d' homothétie inverse des deux circonférences.

Ces résultats se rapportent à la figure 45 ; ils seraient renversés pour le cas de la figure 46. Dans tous les cas P et Q sont les centres d' homothétie directe et inverse de la circonférence donnée O, et de la circonférence lieu du point M, que nous appellerons circonférence O′. Considérons par exemple la figure 51. Les points M et A′ sont anti-homologues. La tangente en A′ au cercle O et la tangente en M à la circonférence O′ font donc avec MA′ des angles égaux, et se coupent en I sur l' axe radical des deux cercles. Pour la même raison, les points M et B′ étant anti-homologues, la tangente en B′ au cercle O rencontre MI sur l' axe radical, c'est-à-dire au point I, et les angles IMB′ et IB′M sont égaux. Le point I est donc situé sur les perpendiculaires élevées au milieu de MA′ et au milieu de MB′ ; c' est donc le centre du cercle circonscrit au triangle MA′B′. Il résulte des constructions précédentes que ce point est toujours sur l' axe radical des circonférences O et O′. Donc le lieu demandé est cet axe radical.

---

## The Equilateral and the Equiangular Polygon.

By R. E. Allardice, M.A.

### The Equilateral Polygon.

Since an $n$-gon is determined by $2n-3$ conditions, and $n-1$ conditions are involved in its being equilateral, there are still in the case of an equilateral $n$-gon $n-2$ conditions to be determined. These $n-2$ conditions cannot all be given in terms of the angles, since ar

https://doi.org/10.1017/S0013091500001346 Published online by Cambridge University Press