Canad. Math. Bull. Vol. **38** (4), 1995 pp. 438–444

COMPARAISON DE DEUX MESURES DE POLYNÔMES

V. FLAMMANG

RÉSUMÉ. L'objet de cet article est d'une part la comparaison de la mesure de Mahler et de la longueur d'un polynôme à coefficients entiers dont toutes les racines sont réelles positives. Nous comparons ensuite la mesure de Mahler d'un polynôme à coefficients entiers ayant toutes ses racines réelles à une mesure généralisant la longueur.

1. **Introduction.** Soit $P = a_0x^d + \cdots + a_d = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, $P \neq x$, un polynôme à coefficients complexes. La *mesure de Mahler* de P se définit par $M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|)$. La *longueur* de P vaut $L(P) = \sum_{i=0}^{d} |a_i|$.

Dans le premier paragraphe, nous montrons :

THÉORÈME 1.1. *Tout polynôme $P = a_0x^d + \cdots + a_d$, $a_0a_d \neq 0$, à coefficients réels de degré $d \geq 4$, sans racine réelle vérifie :*

$$L(P) \leq 2^{d-2} M(P) \cdot \frac{\left(1+\sqrt{\frac{|a_0|}{M(P)}}\right)^2}{2} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{\frac{|a_d|}{M(P)}}\right)^2}{2}. \tag{1}$$

Soulignons que la relation (1) peut se déduire du lemme 4 de Boyd dans [1] sous la condition plus faible : toute racine α de P satisfait : $|\alpha|^2 \leq \frac{M}{|a_0|}$. Mais la démonstration du théorème 1.1 que nous présentons est particulièrement simple.

Le second théorème est la comparaison de la mesure de Mahler et de longueur d'un polynôme à coefficients reéls dont toutes les racines sont réelles positives (polynôme totalement positif). Nous obtenons :

THÉORÈME 1.2. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif tel que $|P(0)| \geq 1$ et $|P(1)| \geq 1$. Alors*

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{5-\sqrt{5}}{4}} \leq M(P) \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{\sqrt{5}}.$$

REMARQUE. Si P est à coefficients entiers, les conditions du théorème sont réalisées lorsque x et $x-1$ ne divisent pas P ; de plus, il y a égalité si et seulement si P est une puissance de $x^2 - 3x + 1$.

Reçu par les éditeurs le 22 juillet 1994 ; révisé le 20 janvier 1995.
Classification (AMS) par sujet : primaire : 26C05 ; secondaire : 12E05.
© Société mathématique du Canada 1995.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

L'exemple suivant illustre l'amélioration apportée à l'inégalité bien connue

$$\frac{1}{2^d} L(P) \leq M(P) \leq L(P). \tag{2}$$

Soit le polynôme totalement positif suivant : $P = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$. (2) donne $1,81 \leq M(P) = 8,068 \cdots \leq 29$ alors que par le théorème 1.2, on a $7,59 \leq M(P) \leq 9,56$.

Enfin, nous introduisons une autre notion de mesure qui généralise la longueur

$$R(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} (1 + |\alpha_i|).$$

On a toujours $L(P) \leq R(P)$. Il y a égalité si P est totalement positif ; dans ce cas, $R(P) = L(P)$ se calcule à l'aide des coefficients de P. Par contre, si P est un polynôme dont toutes les racines sont réelles (polynôme totalement réel), il est nécessaire de connaître les racines de P pour évaluer $R(P)$.

Dans le cas d'un polynôme totalement réel, nous montrerons :

THÉORÈME 1.3. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel tel que $|P(0)| \geq 1$ et $|P(\pm 1)| \geq 1$. Alors*

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left[R(P)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3d}{2}}\right]^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \leq M(P) \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{d}{2}} \cdot \left[R(P)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{3d}{2}}\right]^{\sqrt{5}+2}.$$

REMARQUE. Si P est à coefficients entiers, les conditions du théorème sont réalisées lorsque x, $x-1$ et $x+1$ ne divisent pas P ; de plus, il y a égalité si et seulement si P est une puissance de $x^2 - x - 1$.

Soit le polynôme totalement réel suivant : $P = x^4 - 4x^2 + 2$. (2) donne $0,43 \leq M(P) = 3,41 \cdots \leq 7$ alors que par le théorème 1.3, on a $1,16 \leq M(P) \leq 4,03$.

Les théorèmes 1.2 et 1.3 découlent de deux lemmes plus généraux présentés au paragraphe 3.

2. Démonstration du théorème 1.1.

Soit $P = a_0 x^d + \cdots + a_d = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_d) \in \mathbb{R}[x]$, $a_0 a_d \neq 0$, de degré $d \geq 4$, n'ayant aucune racine réelle.

Soit d_1 (respectivement d_2 et d_3) le nombre de racines de P de module 1 dans le demi plan supérieur (respectivement de module > 1 et de module < 1). On a $2(d_1 + d_2 + d_3) = d$.

On numérote les racines de sorte que $\alpha_{d_i + j} = \overline{\alpha_j}$, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq 3$.

On a :

$$L(P) \leq |a_0| \prod_{i=1}^{d_1} (1 + |\alpha_i|)^2 \cdot \prod_{i=1}^{d_2} (1 + |\alpha_i|)^2 \cdot \prod_{i=1}^{d_3} (1 + |\alpha_i|)^2.$$

Nous utilisons ici un lemme intermédiaire qui s'obtient facilement par récurrence.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

LEMME 2.1. *Soient $x_1,\ldots,x_n$ des nombres réels tous supérieurs ou égaux à 1 ou tous inférieurs ou égaux à 1. Alors*

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\leq 2^{n-1}\Big(1+\prod_{i=1}^{n}x_i\Big).$$

Par conséquent, $L(P)\leq 2^{2d_1+2d_2-2+2d_3-2}|a_0|[(1+\prod_{i=1}^{d_2}|\alpha_i|)(1+\prod_{i=1}^{d_3}|\alpha_i|)]^2$ c'est à dire $L(P)\leq 2^{d-4}|a_0|\big(1+\sqrt{\frac{M(P)}{|a_0|}}\big)^2\cdot\big(1+\sqrt{\frac{|a_d|}{M(P)}}\big)^2$ car $|a_d|=M(P)\cdot\prod_{i=1}^{d_3}|\alpha_i|^2$.

3. **Démonstration du théorème 1.2.** Elle repose sur deux lemmes préliminaires.

LEMME 3.1. *Soit $P\in\mathbb{R}[x]$, de degré $d\geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$. Alors pour tout c_0, $0\leq c_0\leq\frac{5-\sqrt{5}}{4}$, on a :*

$$M(P)\geq\left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{c_0}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{d}\cdot|P(0)|^{c_1}\cdot|P(1)|^{c_2}$$

où $c_1\geq 0$ et $c_2\geq 0$ ne dépendent que de c_0.

LEMME 3.2. *Soit $P\in\mathbb{R}[x]$, de degré $d\geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$. Alors pour tout c_0', $0\leq c_0'\leq\frac{1}{\sqrt{5}}$, on a :*

$$L(P)\geq M(P)^{c_0'}\cdot 5^{\frac{d}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{c_0'd}\cdot|P(0)|^{c_1'}\cdot|P(1)|^{c_2'}$$

où $c_1'\geq 0$ et $c_2'\geq 0$ ne dépendent que de c_0'.

REMARQUES. a) Si P est tel que $|P(0)|\geq 1$ et $|P(1)|\geq 1$ alors

$$M(P)\geq\left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{c_0}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{d}$$

et

$$L(P)\geq M(P)^{c_0'}\cdot 5^{\frac{d}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{c_0'd}.$$

b) Pour $c_0=0$ et $P\in\mathbb{Z}[x]$, on retrouve un résultat de Höhn et Skoruppa [4] qui redémontrent un résultat de Schinzel [5].

c) Pour $c_0'=0$, si P est tel que $|P(0)|\geq 1$ et $|P(1)|\geq 1$, ceci montre que :

$$L(P)\geq 5^{\frac{d}{2}}$$

(résultat déjà montré pour P à coefficients entiers dans [3]).

3.1 *Preuve du lemme 3.1.*

3.3.1 *Principe de la démonstration.* Soit $f(x)=\log_+(x)-\big(c_0\log(x+1)+c_1\log(x)+c_2\log|x-1|\big)$ une fonction définie pour $x>0$, $x\neq 1$ et telle que $\min_{x>0}f(x)=m$; les c_i, $0\leq i\leq 2$, appartiennent à $\mathbb{R}^+$ et $\log_+(x)=\log\big(\max(1,|x|)\big)$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

Tout polynôme P satisfaisant les conditions du théorème et de racines $(\alpha_i)_{(1\leq i\leq d)}$ vérifie donc :

$$\log_+(\alpha_i) \geq c_0 \log(\alpha_i + 1) + c_1 \log(\alpha_i) + c_2 \log|\alpha_i - 1| + m \quad 1 \leq i \leq d$$

et en sommant sur i, il vient

$$\log_+\Big(\prod_{i=1}^{d} \alpha_i\Big) \geq c_0 \log\Big(\prod_{i=1}^{d}(\alpha_i + 1)\Big) + c_1 \log\Big(\prod_{i=1}^{d}(\alpha_i)\Big) + c_2 \log\Big(\prod_{i=1}^{d} |\alpha_i - 1|\Big) + dm$$

ce qui donne

$$M(P) \geq L(P)^{c_0} \cdot |P(0)|^{c_1} \cdot |P(1)|^{c_2} \cdot e^{md}$$

3.1.2 *Détermination explicite de m, c_0, c_1, c_2.* Pour cela, nous imposons deux conditions à la fonction f :

1) $f(x) = f(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$

2) f atteint son minimum en $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

La première condition permet de restreindre l'étude de f à l'intervalle $]0,1[$ et fournit une relation entre les c_i :

$$c_0 + 2c_1 + c_2 = 1. \tag{3}$$

Sur $]0,1[$, f s'écrit : $f(x) = -\big(c_0\log(x+1) + c_1\log(x) + c_2\log|x-1|\big)$. Le numérateur de la dérivée de f, noté numf', vaut en utilisant (3) :

$$\mathrm{num}f'(x) = (1 - c_1)x^2 + (1 - 2c_0 - 2c_1)x - c_1.$$

La seconde condition impose $f'\big(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\big) = 0$. Il en résulte $c_1 = \frac{1}{5}\big(\frac{5-\sqrt{5}}{2} - 2c_0\big)$. Puis, en reportant cette valeur de c_1 dans (3), on obtient $c_2 = \frac{\sqrt{5}-c_0}{5}$. $c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ entraîne $c_1 \geq 0$ et $c_2 > 0$. Vérifons que $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ est bien un minimum pour f

$$\mathrm{num}f' = \frac{1}{5} \cdot \left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left[\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} + 2c_0\right)x + \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 2c_0\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Or, $\frac{5+\sqrt{5}}{2} + 2c_0 > 0$ et $\frac{5+\sqrt{5}}{2} - 2c_0\frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq 0$ car $c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$.

Par conséquent, f' admet une unique racine comprise entre 0 et 1 et f y atteint son minimum.

Il reste à calculer m

$$m = f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_0\log\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Ceci termine la démonstration de 3.1.

3.2 *Preuve du lemme 3.2.* Elle est analogue à celle du lemme précédent. On utilise cette fois la fonction $g(x) = \log(x+1) - \big(c_0'\log_+(x) + c_1'\log(x) + c_2'\log|x-1|\big)$. Les deux conditions imposées restent identiques.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

On en déduit :

$$c_1' = \frac{2}{5} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}c_0',$$
$$c_2' = \frac{1-\sqrt{5}c_0'}{5},$$
$$c_0' \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{implique } c_1' > 0 \text{ et } c_2' \geq 0.$$

On vérifie que g atteint bien son minimum en $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ et

$$g\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right) = \log(\sqrt{5}) + c_0' \log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

Ceci prouve l'inégalité du second lemme.

3.3 *Fin de la preuve.* On a établi que si $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif et non divisible par x et $x-1$ tel que $|P(0)| \geq 1$ et $|P(1)| \geq 1$, alors pour tous c_0 et c_0', $0 \leq c_0 \leq \frac{5-\sqrt{5}}{4}$, $0 \leq c_0' \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{c_0}}_{(a)} \leq M(P) \leq \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^d \cdot \left(\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}}\right)^{\frac{1}{c_0'}}}_{(b)}.$$

Comme $\frac{L(P)}{5^{\frac{d}{2}}} \geq 1$ d'après la remarque c), l'expression (a) est la plus grande possible pour $c_0 = \frac{5-\sqrt{5}}{4}$ et l'expression (b) est la plus petite possible pour $c_0' = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Finalement, on aboutit à l'inégalité du théorème 1.2.

4. **Démonstration du théorème 1.3.** Le principe en est le même que pour le théorème 1.2. Aussi nous n'en donnerons que les différentes étapes. L'inégalité souhaitée est issue de deux inégalités plus générales énoncées dans les lemmes suivants

LEMME 4.1. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel et non divisible par x, $x-1$ et $x+1$. Alors pour tout c_0, $0 \leq c_0 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, on a :*

$$M(P) \geq R(P)^{c_0} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(\frac{1-3c_0}{2})d} \cdot |P(0)|^{c_1} \cdot |P(1)\cdot P(-1)|^{c_2}$$

où $c_1 \geq 0$ et $c_2 \geq 0$ ne dépendent que de c_0.

LEMME 4.2. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel et non divisible par x, $x-1$ et $x+1$. Alors pour tout c_0', $0 \leq c_0' \leq \sqrt{5}-2$, on a :*

$$R(P) \geq M(P)^{c_0'} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{(\frac{3-c_0'}{2})d} \cdot |P(0)|^{c_1'} \cdot |P(1)\cdot P(-1)|^{c_2'}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

où $c_1' \geq 0$ *et* $c_2' \geq 0$ *ne dépendent que de* c_0'.

Les fonctions f et g qui interviennent dans les preuves de ces lemmes sont

$$f(x) = \log_+|x| - \big(c_0 \log(1+|x|) + c_1 \log|x| + c_2 \log|x^2-1|\big)$$
$$g(x) = \log(1+|x|) - (c_0' \log_+|x| + c_1' \log|x| + c_2' \log|x^2-1|).$$

Afin de déterminer c_i et c_i' pour $i = 1, 2$, nous imposons les conditions suivantes

1) $f(x) = f(\frac{1}{x})$ et $g(x) = g(\frac{1}{x})$

2) f et g atteignent leur minimum en $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

En remarquant d'une part que $f(x) = f(-x)$ et $g(x) = g(-x)$, on peut restreindre l'étude des fonctions à $x > 0$. D'autre part, la première condition réduit le domaine à l'intervalle $]0,1[$ et relie les constantes entre elles par $c_0+2c_1+2c_2 = 1$ et $c_0'+2c_1'+2c_2' = 1$.

La seconde condition entraîne que les dérivées des deux fonctions s'annulent en $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ce qui conduit à :

$$c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{\sqrt{5}c_0}{5},$$
$$c_2 = \frac{\sqrt{5}}{10} - c_0\frac{5-2\sqrt{5}}{10},$$
$$c_1' = \frac{\sqrt{5}}{5} - c_0'\frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad \text{et}$$
$$c_2' = \frac{5-2\sqrt{5}}{10} - c_0'\frac{\sqrt{5}}{10}.$$
$$c_0 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{implique } c_1 \geq 0 \text{ et } c_2 > 0,$$
$$c_0' \leq \sqrt{5}-2 \quad \text{entraîne } c_1' \geq 0 \text{ et } c_2' > 0.$$

On vérifie aisément que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est le seul point de $]0,1[$ où les dérivées sont nulles.

Enfin, pour aboutir aux inégalités souhaitées, il reste à évaluer f et g en $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$:

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-3c_0}{2}\right)$$

et

$$g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3-c_0'}{2}\right).$$

Il suffit pour arriver à l'inégalité annoncée dans le théorème 1.3 de combiner comme précédemment les résultats de ces deux lemmes.

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press

RÉFÉRENCES

1. D. W. Boyd, *Reciprocal polynomials having small measure*, Math. Comp. **35**(1980), 1361–1377.
2. L. Cerlienco, M. Mignotte and F. Piras, *Computing the measure of a polynomial*, J. Symbolic Comput. **4**(1987), 21–34.
3. V. Flammang, *Sur la longueur des entiers algébriques totalement positifs*, J. Number Theory, à paraître.
4. G. Höhn and N.-P. Skoruppa, *Un résultat de Schinzel*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5**(1993), 185.
5. A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer*, Acta Arith. **24**(1973), 385–399.

URA CNRS n° 399
Département de Mathématiques et Informatique
Université de Metz, Ile du Saulcy
57045 Metz Cedex 1
France
e-mail: flammang@poncelet.univ-metz.fr

https://doi.org/10.4153/CMB-1995-064-5 Published online by Cambridge University Press