Compositio Mathematica **105:** 153–236, 1997.

Le lemme fondamental implique le transfert

J.-L. WALDSPURGER
Université Paris 7 - CNRS UFR de Mathématiques 2, Place Jussieu 75251 Paris Cedex 05

Received 17 November 1995; accepted in final form 30 July 1996

1. Introduction

1.1. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, à corps résiduel fini. Si M est un groupe réductif connexe défini sur F, on note par la lettre minuscule m son algèbre de Lie*. On note m_{reg} l'ensemble des $X \in m$ dont le centralisateur T_X dans M est un tore. Si $X, X' \in m_{\text{reg}}(F)$, on dit que X et X' sont conjugués, resp. stablement conjugués, s'il existe $x \in M(F)$, resp. $x \in M(\bar{F})$ où $\bar{F}$ est la clôture algébrique de F, tel que $(\text{Ad}\, x)(X) = X'$. On note $C_c^\infty(m(F))$ l'espace des fonctions sur $m(F)$. à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. Soient $X \in m_{\text{reg}}(F)$ et $f \in C_c^\infty(m(F))$. Supposons $T_X(F)$ et $M(F)$ munis de mesures de Haar. On pose

$$J(X, f) = D(X)^{1/2} \int_{T_X(F)\backslash M(F)} f((\text{Ad}\, x^{-1})(X))\, \mathrm{d}x,$$

où

$$D(X) = |\text{det}(\text{ad}\, X|m(F)/t_X(F))|_F,$$

$|\cdot|_F$ désignant la valeur absolue usuelle de F.

On note $\mathcal{E}(F)$ l'ensemble des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi)$ où:

- G et G^* sont des groupes réductifs connexes définis sur sur F, G^* est quasi-déployé;
- $\varphi\colon G \to G^*$ est un torseur intérieur, i.e. φ est un isomorphisme sur $\bar{F}$ tel que pour tout $\sigma \in \text{Gal}\,(\bar{F}/F), \sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1}$ soit un automorphisme intérieur de G^*;
- (H, s, ξ) sont des données endoscopiques pour G^* (cf. [K1] Sect. 7 et ci-dessous 2.1).

Fixons de telles données. On munit $G(F)$ et $H(F)$ de mesures de Haar. Si T est un sous-tore maximal de G ou H défini sur F, on munit $T(F)$ d'une mesure de Haar. On impose à ces mesures une condition de compatibilité (cf. 2.5). Fixons une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_g$ sur $g(F)$, symétrique, non dégénérée et invariante par conjugaison,

* Si le groupe est noté $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{U}$, on note son algèbre de Lie t ou u.

et un caractère $\psi\colon F \to \mathbb{C}^*$ continu et non trivial. Pour tout sous-espace de $g(F)$ sur lequel la restriction de $\langle\ ,\ \rangle_g$ est non dégénérée, on munit ce sous-espace de la mesure de Haar autoduale pour le bicaractère $\psi(\langle\ ,\ \rangle_g)$. Pour $f \in C_c^\infty(g(F))$ et $X \in g(F)$, on pose

$$\hat{f}(X) = \int_{g(F)} f(Z)\psi(\langle Z, X\rangle_g)\,\mathrm{d}Z.$$

Notons $\mathcal{T}^G$ l'ensemble des sous-tores maximaux de G définis sur F et $\mathcal{T}^G/G(F)$ l'ensemble des classes de conjugaison de tels sous-tores, que l'on identifie à un ensemble de représentants de ces classes dans $\mathcal{T}^G$. Pour $T \in \mathcal{T}^G$, on note $W(G,T)$ le quotient $\mathrm{Norm}_{G(F)}(T)/T(F)$, où $\mathrm{Norm}_{G(F)}(T)$ est le normalisateur de T dans $G(F)$. D'après Harish–Chandra ([HC] Théorème 3), il existe une unique fonction $\hat{\imath}^G : g_{\mathrm{reg}}(F) \times g_{\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}$, localement constante et invariante par conjugaison (par $G(F) \times G(F)$) telle que, pour toute $f \in C_c^\infty(g(F))$ et tout $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité

$$J(X, \hat{f}) = \sum_{T\in\mathcal{T}^G/G(F)} |W(G,T)|^{-1} \int_{t(F)} J(Z, f)\hat{\imath}^G(X, Z)\,\mathrm{d}Z.$$

Remarquons qu'il n'y a pas de lien entre les mesures sur les tores et celles sur leurs algèbres de Lie. La fonction $\hat{\imath}^G$ dépend des choix de ces mesures.

Au bicaractère $\psi(\langle\ ,\ \rangle_g$ de $g(F)$ est associée une 'constante de Weil' $\gamma_\psi(g) \in \mathbb{C}^*$ (cf. 3.1). C'est une racine huitième de l'unité.

On a expliqué en [W1] VIII. 6, comment de $\langle\ ,\ \rangle_g$ se déduit une forme analogue $\langle\ ,\ \rangle_h$ sur $h(F)$. On définit alors des objets $\hat{\imath}^H, \gamma_\psi(h)$ relatifs à H.

A la suite de Langlands et Shelstad, on définit:

- un sous-ensemble $h_{G^*-\mathrm{reg}}$ de h_{reg} et des applications à fibres finies

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{classes de conjugaison stable}\\ \text{dans } h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)\end{matrix}\right\} \arrow[dr] & \\
& \left\{\begin{matrix}\text{classes de conjugaison stable}\\ \text{dans } g^*_{\mathrm{reg}}(F)\end{matrix}\right\} \\
\left\{\begin{matrix}\text{classes de conjugaison stable}\\ \text{dans } g_{\mathrm{reg}}(F)\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les définitions sont rappelées en 2.2. On dit que $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ est une image de $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$ si leurs classes de conjugaison stable ont même image par les applications ci-dessus;

- un facteur de tranfert $\Delta_{G,H} : h_{G^*-\mathrm{reg}}(F) \times g_{\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}$, cf. 2.3. Ce facteur n'est pas tout-à-fait celui de Langlands et Shelstad: il est privé du terme Δ_{IV}. Le facteur $\Delta_{G,H}(Y, X)$ est non nul si et seulement si Y est une image de X.

Pour $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ et $Z \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, on pose

$$D_{G,H}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g}) \sum_X \Delta_{G,H}(Y,X) \hat{i}^G(X,Z),$$
$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}) \sum_{Y',Z'} w(Z')^{-1} \Delta_{G,H}(Z',Z) \hat{i}^H(Y',Z'),$$

où

- X parcourt $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison;
- Y' parcourt la classe de conjugaison stable de Y modulo conjugaison;
- Z' parcourt $\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison;
- $w(Z')$ est le nombre de classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de Z'.

On a posé en [W1] VIII.7 la conjecture suivante.

1.2. CONJECTURE. *Pour tous $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$, $Z \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, on a l'égalité*

$$D_{G,H}(Y,Z) = \tilde{D}_{G,H}(Y,Z).$$

Notons que cette conjecture ne dépend pas des choix des mesures, pourvu que celles-ci vérifient les conditions imposées de compatibilité. Changer de mesures multiplie chaque membre de l'égalité ci-dessus par une même constante.

Le but de cet article est de montrer que le 'lemme fondamental pour les algèbres de Lie' implique cette conjecture.

1.3. Ce que nous appellerons 'lemme fondamental pour les algèbres de Lie' est l'assertion ci-dessous. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$, on pose

$$J^{G,H}(Y,f) = \sum_X \Delta_{G,H}(Y,X) J(X,f),$$

où X parcourt $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$ et $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$, on pose

$$J^{st}(Y,f) = \sum_{Y'} J(Y',f),$$

où Y' parcourt la classe de conjugaison stable de Y modulo conjugaison.

Supposons:

- φ 'trivial', i.e. il existe $x^* \in G^*(\bar{F})$ tel que $(\mathrm{Ad}\, x^*) \circ \varphi$ soit défini sur F;
- (H, s, ξ) non ramifié (cf. 7.3).

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

On définit la notion de sous-algèbre hyperspéciale de $g(F)$ ou $h(F)$. Il s'agit de réseaux dans ces algèbres. Soient k_g et k_h de telles sous-algèbres dans $g(F)$, resp. $h(F)$. On note 1_{k_g} et 1_{k_h} les fonctions caractéristiques de ces sous-algèbres. Sous les hypothèses ci-dessus, on a la

CONJECTURE *('lemme fondamental pour les algèbres de Lie'). Il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité*

$$J^{st}(Y, 1_{k_h}) = cJ^{G,H}(Y, 1_{k_g}).$$

La validité de cette conjecture ne dépend pas des choix de k_g et k_h.

1.4. Soit k un corps de nombres. On définit l'ensemble $\mathcal{E}(k)$ comme on a défini $\mathcal{E}(F)$ en 1.1. Soit $\underline{E} = (\underline{G}, \underline{G}^*, \underline{\varphi}, \underline{H}, \underline{s}, \underline{\mathcal{E}}) \in \mathcal{E}(k)$. Pour toute place v de k, on déduit de $\underline{E}$ des données $\underline{E}_v = (\underline{G}_v, \underline{G}_v^*, \underline{\varphi}, \underline{H}_v, \underline{s}, \underline{\mathcal{E}}) \in \mathcal{E}(k_v)$ par extension des scalaires au complété k_v de k en v. On dit que $\underline{E}$ vérifie la condition (lf) si pour presque toute place finie v de k (i.e. pour v hors d'un ensemble fini de places), les données $\underline{E}_v$ vérifient le 'lemme fondamental pour les algèbres de Lie'.

Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \mathcal{E}) \in \mathcal{E}(F)$. Nous dirons que E est consistante s'il existe au moins un couple $(Y, X) \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F) \times g_{\mathrm{reg}}(F)$ tel que Y soit une image de X.

THÉORÈME. *Soit $E \in \mathcal{E}(F)$.*

(i) *Si E n'est pas consistante, elle vérifie la conjecture* 1.2.
(ii) *Si E est consistante, il existe un corps de nombres k et une donnée $\underline{E} \in E(k)$ tels que si $\underline{E}$ vérifie la condition $(\bar{l}f)$, alors E vérifie la conjecture* 1.2.

La démonstration est constructive, on peut apporter des précisions sur la donnée $\underline{E}$.

1.5. Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. Disons que G^* est de type A si le revêtement simplement connexe du groupe dérivé G^*_{der} de G^* est produit de groupes de la forme $\mathrm{Res}_{F'/F}\, \mathrm{SL}\,(n)$, où F' est une extension finie de F.

THÉORÈME. *Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées*:

(1) *G^* est de type A;*
(2) *$H = G^*$.*

Alors E vérifie la conjecture 1.2.

1.6. Considérons le cas $H = G^*$. On appelle distribution stable sur $g(F)$ une forme linéaire ℓ sur $C_c^\infty(g(F))$ telle que si $f \in C_c^\infty(g(F))$ vérifie $J^{G,G^*}(Y, f) = 0$ pour tout $Y \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$, alors $\ell(f) = 0$.

COROLLAIRE. *La transformée de Fourier d'une distribution stable sur $g(F)$ est une distribution stable.*

1.7. Soit toujours $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. De façon analogue à ci-dessus, on définit l'ensemble G_{freg} des éléments de G dont le commutant est un tore et un ensemble $H_{G^*-\mathrm{freg}} \subset H_{\mathrm{freg}}$; on définit les espaces $C_c^\infty(G(F))$ et $C_c^\infty(H(F))$; pour $f \in C_c^\infty(G(F))$, resp. $f^H \in C_c^\infty(H(F))$, et $y \in H_{G^*-\mathrm{freg}}(F)$, on définit les intégrales orbitales $J^{G,H}(y,f)$, resp. $J^{st}(y,f^H)$. Supposons pour simplifier que G^*_{der} est simplement connexe. On dit que E vérifie la conjecture de transfert si pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, il existe $f^H \in C_c^\infty(H(F))$ telle que

$$J^{st}(y,f^H) = J^{G,H}(y,f)$$

pour tout $y \in H_{G^*-\mathrm{freg}}(F)$.

Grâce aux résultats de Langlands et Shelstad, on deduit des résultats ci-dessus le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$, supposons G^*_{der} simplement connexe. Alors*

(i) *il existe une famille finie $(k_i)_{i\in I}$ de corps de nombres et, pour tout $i \in I$, des données $\underline{E}_i \in \mathcal{E}(k_i)$ telles que, si $\underline{E}_i$ vérifie la condition (lf) pour tout $i \in I, E$ vérifie la conjecture de transfert*;

(ii) *supposons l'une des conditions suivantes vérifiées*:

(1) G^* est de type A;

(2) $H = G^*$.

Alors E vérifie la conjecture de transfert.

L'hypothèse G^*_{der} simplement connexe ne sert qu'à énoncer simplement cette conjecture de transfert.

1.8. La preuve du résultat principal 1.4 s'inspire directement de celle due à Hales que le 'lemme fondamental pour les unités de l'algèbre de Hecke' implique le lemme fondamental ([H1]). En fait c'en est l'analogue pour les algèbres de Lie. Hales lui-même s'inspirait du résultat de Clozel dans le cas du changement de base ([C]). Notre démonstration, comme celle de Hales, utilise largement les travaux de Langlands et Kottwitz sur la stabilisation de la formule des traces.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons diverses définitions de la théorie de l'endoscopie, notamment celle des facteurs de transfert, qui est un peu plus simple dans le cas des algèbres de Lie que dans le cas des groupes. Au paragraphe 3, on montre que la validité de la Conjecture 1.2 est indépendante des choix de $\langle\ ,\ \rangle_g$ et ψ. Au paragraphe 4, on ramène le cas général au cas où G^*_{der} est simplement connexe. Au paragraphe 5, on montre que si E se déduit par restriction des scalaires d'une donnée E' sur une extension finie F' de F, la Conjecture 1.2 pour E se déduit de cette même conjecture pour E'. Au paragraphe 6, on ramène le cas général à celui où les données endoscopiques (H, s, ξ) sont elliptiques. Au paragraphe 7, on étudie brièvement le cas non ramifié et on énonce dans notre situation deux lemmes dus à Kottwitz. Le paragraphe 8 démontre l'existence de fonctions qui nous serviront plus tard à séparer différentes données endoscopiques. Au paragraphe 9, on dit quelques mots du cas, d'ailleurs trivial, où on remplace le corps F par $\mathbb{C}$.

Le paragraphe 10 contient la partie essentielle de la preuve. Soient k un corps de nombres, $\underline{E} = (\underline{G}, \underline{G}^*, \underline{\varphi}, \underline{H}, \underline{s}, \underline{\xi}) \in \mathcal{E}(k)$ et f une fonction de Schwartz sur $g(\mathbb{A})$ (avec des notations usuelles, qui sont rappelées au paragraphe 10). On pose

$$I^{\underline{G}}(f) = \int_{\underline{G}(k)\backslash\underline{G}(\mathbb{A})} \sum_{X \in \underline{g}(k)} f((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X))\, \mathrm{d}x,$$

en admettant que cette expression soit convergente. D'après la formule de Poisson, on a l'égalité

$$I^{\underline{G}}(f) = I^{\underline{G}}(\hat{f}),$$

qui peut être vue comme le point de départ d'un analogue pour les algèbres de Lie de la formule des traces de Arthur–Selberg. Supposons que f et $\hat{f}$ vérifient des conditions 'd'ellipticité'. En imitant Langlands et Kottwitz, on peut alors stabiliser l'égalité ci-dessus. En imposant à $k, \underline{E}$ et f quelques conditions techniques et en supposant que $\underline{E}$ vérifie la condition (lf), ce qui est l'hypothèse essentielle, on peut comparer la formule ci-dessus, 'stabilisée', avec une formule analogue pour le groupe $\underline{H}$ et une fonction $f^{\underline{H}}$ sur $\underline{h}(\mathbb{A})$ déduite de f. On en déduit, grosso modo, que pour toute place finie v de k, les données $\underline{E}_v \in \mathcal{E}(k_v)$ vérifient la Conjecture 1.2. Au paragraphe 11, on déduit les résultats présentés dans cette introduction de ceux obtenus au paragraphe 10 et des réductions effectuées aux Sections 4, 5 et 6.

Je remercie D. Kazhdan pour une discussion enrichissante sur ces questions et C. Moeglin pour m'avoir signalé le Corollaire 1.6.

2. Endoscopie

2.1. Soit F comme en 1.1. On note Γ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. Rappelons que H est un groupe réductif connexe défini sur F et quasi-déployé. On introduit les groupes complexes $\hat{G}$ et $\hat{H}$ duaux de G^* et H. Le groupe Γ agit sur $G(\bar{F}), G^*(\bar{F}), H(\bar{F}), \hat{G}$ et $\hat{H}$. On note ces actions $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$ pour $\sigma \in \Gamma$ et, par exemple $x \in G(\bar{F})$, ou, si l'on a besoin de préciser, $(\sigma, x) \mapsto \sigma_G(x)$. On appelle paire Γ-stable de G^*, resp. $\hat{G}$, un couple $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$, resp. $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$, où $\mathbb{B}$, resp. $\hat{\mathbb{B}}$, est un sous-groupe de Borel de G^*, resp. $\hat{G}$, et $\mathbb{T}$, resp. $\hat{\mathbb{T}}$, un sous-tore maximal de $\mathbb{B}$, resp. $\hat{\mathbb{B}}$, tous deux définis sur F, resp. stables par Γ. Idem pour H et $\hat{H}$. Pour tout choix de telles paires, il y a des isomorphismes canoniques Γ-invariants de $X_*(\mathbb{T})$ sur $X^*(\hat{\mathbb{T}})$ et de $X^*(\mathbb{T})$ sur $X_*(\hat{\mathbb{T}})$ qui échangent racines et coracines, où, par exemple, $X_*(\mathbb{T})$ désigne le groupe des sous-groupes à un paramètre de $\mathbb{T}$ définis sur $\bar{F}$. On pose $W^{G^*} = \mathrm{Norm}_{G^*(\bar{F})}(\mathbb{T})/\mathbb{T}(\bar{F}), W^{\hat{G}} = \mathrm{Norm}_{\hat{G}}(\hat{\mathbb{T}})/\hat{\mathbb{T}}$. Ces groupes sont en bijection. On a l'inclusion $W(G^*, \mathbb{T}) \subset W^{G^*}$, avec les notations de 1.1.

Rappelons que s est un élément du centre $Z(\hat{H})$ de $\hat{H}, \xi : \hat{H} \to \hat{G}$ est un plongement, de sorte que

- $\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(\xi(s))^\circ$ (= composante neutre du centralisateur de $\xi(s)$ dans $\hat{G}$);
- pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $\hat{x}_\sigma \in \hat{G}$ tel que $\sigma_{\hat{G}} \circ \xi \circ \sigma_{\hat{H}}^{-1} = (\mathrm{Ad}\,\hat{x}_\sigma) \circ \xi$;
- l'image de s dans $Z(\hat{H})/\xi^{-1}(Z(\hat{G}))$ est fixe par Γ et son image $\bar{s}$ dans le groupe des composantes connexes $\pi_0([Z(\hat{H})/\xi^{-1}(Z(\hat{G}))]^\Gamma)$ appartient au noyau de l'application naturelle $\pi_0([Z(\hat{H})/\xi^{-1}(Z(\hat{G}))]^\Gamma) \to H^1(\Gamma, Z(\hat{G}))$ (cf. [K1], 7.1).

On appelle équivalence entre les données E et $E' = (G', G'^*, \varphi', H', s', \xi')$ des isomorphismes $i : G \to G', i^* : G^* \to G'^*, i_H : H \to H'$, définis sur $F, \hat{i} : \hat{G} \to \hat{G}', \hat{i}_H : \hat{H} \to \hat{H}'$ invariants par Γ, de sorte que

- il existe $x^* \in G^*(\bar{F})$ tel que $\varphi' \circ i = i^* \circ (\mathrm{Ad}\,x^*) \circ \varphi$;
- il existe $\hat{x} \in \hat{G}$ tel que $\xi' \circ \hat{i}_H = \hat{i} \circ (\mathrm{Ad}\,\hat{x}) \circ \xi$;
- $\bar{s}'$ est égal à l'image de $\bar{s}$ par l'application $\pi_0([Z(\hat{H})/\xi^{-1}(Z(\hat{G}))]^\Gamma) \to \pi_0([Z(\hat{H}')/\xi'^{-1}(Z(\hat{G}'))]^\Gamma)$ déduite de $\hat{i}_H$;
- les applications $\hat{i}$ et $\hat{i}_H$ sont duales de i^* et i_H.

Dire par exemple que $\hat{i}$ est duale de i^* signifie ce qui suit. Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ de G^* et $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$ de $\hat{G}$. Alors $(i^*(\mathbb{B}), i^*(\mathbb{T}))$ et $(\hat{i}(\hat{\mathbb{B}}), \hat{i}(\hat{\mathbb{T}}))$ sont des paires Γ-stables de G'^*, resp. $\hat{G}'$. On demande que le diagramme suivante soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_*(\mathbb{T}) & \xrightarrow{\sim} & X_*(i^*(\mathbb{T})) \\ \wr\| & & \wr\| \\ X^*(\hat{\mathbb{T}}) & \xrightarrow{\sim} & X^*(\hat{i}(\hat{\mathbb{T}})) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont déduites de i^* et $\hat{i}$.

Dans le cas où $G' = G, G'^* = G^*, \varphi' = \varphi, i, i^*$ et $\hat{i}$ sont les identités, on parlera d'équivalence entre les données endoscopiques (H, s, ξ) et (H', s', ξ').

2.2. Pour tout groupe réductif connexe M défini dur F, on note M_{der} le groupe dérivé de M et M_{sc} son revêtement simplement connexe. Le groupe M_{sc} agit sur M par conjugaison. Si $x \in M_{\mathrm{sc}}$, on notera encore $\mathrm{Ad}\,x$ cette action et on notera parfois xyx^{-1} l'image de $y \in M$ par cette application. Si $f : M \to M'$ est un homomorphisme,on notera encore $f : m \to m'$ l'homomorphisme dérivé. On note $\hat{M}_{\mathrm{sc}}$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé $\hat{M}_{\mathrm{der}}$ de $\hat{M}$. Il ne faut pas confondre $\hat{M}_{\mathrm{sc}}$ avec $(M_{\mathrm{sc}})\hat{}$.

Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ de $G^*, (\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ de $H, (\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$ de $\hat{G}$ et $(\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de $\hat{H}$. On suppose pour simplifier que $\xi(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}$ et $\xi(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}$.

Remarque. En général, il existe $\hat{x} \in \hat{G}$ tel que $(\mathrm{Ad}\,\hat{x}) \circ \xi(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}$ et $(\mathrm{Ad}\,\hat{x}) \circ \xi(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}$. On fixe un tel $\hat{x}$, on pose $\xi_0 = (\mathrm{Ad}\,\hat{x}) \circ \xi$. Il suffit alors de remplacer ξ par ξ_0 dans les définitions des paragraphes 2.2 et 2.3 ci-dessous. On vérifie qu'elles ne dépendent pas du choix de $\hat{x}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

On déduit de $\xi|_{\hat{\mathbb{T}}_H}$ un isomorphisme dual $\eta\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{T}$ défini sur $\bar{F}$. Pour $\sigma \in \Gamma$, il existe $w_\sigma \in W^{G^*}$ tel que $\sigma_{G^*} \circ \eta \circ \sigma_H^{-1} = w_\sigma \circ \eta$.

Si $Y \in h(\bar{F})$, on dit que Y est G^*-régulier s'il existe $y \in H(\bar{F})$ tel que $(\operatorname{Ad} y)(Y) \in \mathtt{t}(\bar{F})$ et $\eta \circ (\operatorname{Ad} y)(Y)$ est régulier dans $g^*(\bar{F})$. On note $h_{G^*-\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments G^*-réguliers de h.

Soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$, resp. $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. Un diagramme $D(Y, X^*; F)$, resp. $D(Y, X; F)$, est la donnée de $y \in H(\bar{F}), x^* \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$, resp. et $x \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ de sorte que

- $yT_Y y^{-1} = \mathbb{T}_H, x^*\mathbb{T}x^{*-1} = T_{X^*}$, resp. $x^*\mathbb{T}x^{*-1} = \varphi(x^{-1}T_X x)$;
- l'application $(\operatorname{Ad} x^*) \circ \eta \circ (\operatorname{Ad} y)\colon T_Y \to T_{X^*}$ est définie sur F, resp. le tore $x^*\mathbb{T}x^{*-1}$ est défini sur F et les applications $(\operatorname{Ad} x^*) \circ \eta \circ (\operatorname{Ad} y) : T_Y \to x^*\mathbb{T}x^{*-1}$ et $(\operatorname{Ad} x) \circ \varphi^{-1}\colon x^*\mathbb{T}x^{*-1} \to T_X$ sont définies sur F;
- l'application dérivée envoie Y sur X^*, resp. la composée des applications dérivées envoie Y sur X.

Dans le deuxième cas, on note X^* l'image de X par $\varphi \circ (\operatorname{Ad} x^{-1})$. On note θ_{Y,X^*}, resp. $\theta_{Y,X}$, l'isomorphisme $(\operatorname{Ad} x^*) \circ \eta \circ (\operatorname{Ad} y)\colon T_Y \to T_{X^*}$, resp. $(\operatorname{Ad} x) \circ \varphi^{-1} \circ (\operatorname{Ad} x^*) \circ \eta \circ (\operatorname{Ad} y)\colon T_Y \to T_X$. Il ne dépend que de Y et X^*, resp. X, et pas du diagramme.

Notons $\hat{T}_{X^*}$ le tore complexe dual de T_{X^*}. On déduit de l'isomorphisme $(\operatorname{Ad} x^*) : \mathbb{T} \to T_{X^*}$ un isomorphisme dual $\hat{i}_{x^*} : \hat{\mathbb{T}} \to \hat{T}_{X^*}$. L'image de $Z(\hat{G})$ est indépendante du choix de x^*. On note $K(T_{X^*}/F)$ le noyau de l'application $\pi_0([\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G})]^\Gamma) \to H^1(\Gamma, Z(\hat{G}))$. L'image de s par la composée de $\hat{i}_{x^*} \circ \xi$ et de la projection $\hat{T}_{X^*} \to \hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G})$ est invariante par Γ et son image dans $\pi_0([\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G})]^\Gamma)$ appartient à $K(T_{X^*}/F)$. On la note κ_Y. Elle ne dépend pas du diagramme.

On dit que Y est une image de X^*, resp. X, s'il existe un diagramme $D(Y, X^*; F)$, resp. $D(Y, X; F)$.

2.3. Soient $Y, \bar{Y} \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X, \bar{X} \in g_{\mathrm{reg}}(F), D(Y, X; F), D(\bar{Y}, \bar{X}; F)$ deux diagrammes. On définit un facteur $\Delta_{G,H}(Y, X; \bar{Y}, \bar{X})$ de la façon suivante. On fixe un scindage Γ-stable de G^*, i.e. pour toute racine α de $\mathbb{T}$, simple relativement à $\mathbb{B}$, on fixe X_α dans la sous-algèbre de Lie radicielle associée à α, de sorte que $\sigma(X_\alpha) = X_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. On fixe des a-données pour X^* et $\bar{X}^*$. Par exemple, notons $\Sigma(T_{X^*})$ l'ensemble des racines de T_{X^*} dans g^*. Pour tout $\alpha \in \Sigma(T_{X^*})$, on se donne $a_\alpha \in \bar{F}^\times$ de sorte que $\sigma(a_\alpha) = a_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$ et $a_{-\alpha} = -a_\alpha$. Avec ces notations, on note $\Sigma^{\mathrm{sym}}(T_{X^*}) = \{\alpha \in \Sigma(T_{X^*}); \exists\sigma \in \Gamma, \sigma(\alpha) = -\alpha\}$. L'application θ_{Y,X^*} envoie $\Sigma(T_Y)$ dans $\Sigma(T_{X^*})$. On note $\sum^{\mathrm{sym}}_{\mathrm{hors}\ H}(T_{X^*})$ l'ensemble des $\alpha \in \sum^{\mathrm{sym}}(T_{X^*})$ qui ne sont pas dans l'image de cette application. Pour $\alpha \in \sum^{\mathrm{sym}}(T_{X^*})$, notons $\Gamma_\alpha = \{\sigma \in \Gamma; \sigma(\alpha) = \alpha\}, \Gamma_{\pm\alpha} = \{\sigma \in \Gamma; \sigma(\alpha) = \pm\alpha\}, F_\alpha$ et $F_{\pm\alpha}$ les sous-corps des points fixes de Γ_α et $\Gamma_{\pm\alpha}$ dans $\bar{F}$. Alors F_α est une extension quadratique de $F_{\pm\alpha}$. On note χ_α le caractère quadratique de $F^\times_{\pm\alpha}$ associé à cette extension.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Définition de $\Delta_I(Y,X)$. A l'aide du scindage, on définit une application n : $W^{G^*_{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{Norm}_{G^*_{\mathrm{sc}}}(\bar{F})(\mathbb{T})$ (cf. [LS1] 2.1). Pour $\sigma \in \Gamma$, on note n_σ l'image par n de l'image naturelle de $x^{*-1}\sigma(x^*)$ dans $W^{G^*_{\mathrm{sc}}}$. Par abus de notations, on note $T_{X^*,\mathrm{sc}}$ l'image réciproque de T_{X^*} dans G^*_{sc}. Posons $a_\sigma = \sum \check{\alpha} \otimes a_\alpha \in X_*(T_{X^*,\mathrm{sc}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^\times \simeq T_{X^*,\mathrm{sc}}(\bar{F})$, où α parcourt les éléments de $\Sigma(T_{X^*})$ tels que $\alpha > 0, \sigma^{-1}(\alpha) < 0$, la positivité étant relative à $x^*\mathbb{B}x^{*-1}$. Posons

$$\tau(\sigma) = a_\sigma x^* n_\sigma \sigma(x^{*-1}).$$

Alors $\tau(\sigma) \in T_{X^*,\mathrm{sc}}(\bar{F})$ et $\sigma \mapsto \tau(\sigma)$ est un cocycle. On note encore τ l'élément de $H^1(\Gamma, T_{X^*,\mathrm{sc}}(\bar{F}))$ qu'il définit. Ce dernier groupe est dual de $K(T_{X^*}/F)$. On pose

$$\Delta_{\mathrm{I}}(Y,X) = \langle \tau, \kappa_Y \rangle.$$

Définition de $\Delta_{\mathrm{II}}(Y,X)$. On pose

$$\Delta_{\mathrm{II}}(Y,X) = \prod \chi_\alpha(\alpha(X^*)a_\alpha^{-1}),$$

où le produit est pris sur un ensemble de représentants des orbites de Γ dans $\sum^{\mathrm{sym}}_{\text{hors } H}(T_{X^*})$.

Définition de $\Delta_{\mathrm{III}}(Y,X;\bar{Y},\bar{X})$. Pour $\sigma \in \Gamma$, soit $u_\sigma \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$.

Posons

$$U = (T_{X^*,\mathrm{sc}} \times T_{\bar{X}^*,\mathrm{sc}})/\{(z^{-1},z); z \in Z(G^*_{\mathrm{sc}})\}.$$

Alors $\sigma \mapsto (u_\sigma\varphi(\sigma(x^{-1})x), \varphi(\bar{x}^{-1}\sigma(\bar{x}))u_\sigma^{-1})$ définit un cocycle à valeurs dans $U(\bar{F})$. On note inv $(Y,X;\bar{Y},\bar{X})$ sa classe dans $H^1(\Gamma, U(\bar{F}))$. Notons d'autre part $\hat{T}_{X^*,\mathrm{sc}}$ et $\hat{T}_{\bar{X}^*,\mathrm{sc}}$ les images réciproques de $\hat{T}_{X^*}$ et $\hat{T}_{\bar{X}^*}$ dans $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$. Posons

$$\hat{U} = (\hat{T}_{X^*,\mathrm{sc}} \times \hat{T}_{\bar{X}^*,\mathrm{sc}})/\{(z,z); z \in Z(\hat{G}_{\mathrm{sc}})\}.$$

Fixons $\tilde{s} \in \hat{\mathbb{T}}_{\mathrm{sc}}$ ayant même image que $\xi(s)$ dans $\hat{\mathbb{T}}/Z(\hat{G})$. Les isomorphismes $\hat{i}_{x^*}$ et $\hat{i}_{\bar{x}^*}$ se relèvent en des isomorphismes notés de même de $\hat{\mathbb{T}}_{\mathrm{sc}}$ sur $\hat{T}_{X^*,\mathrm{sc}}$, resp. $\hat{T}_{\bar{X}^*,\mathrm{sc}}$. On note s_U l'image de $(\hat{i}_{x^*}(\tilde{s}), \hat{i}_{\bar{x}^*}(\tilde{s}))$ dans $\pi_0(\hat{U}^\Gamma)$. Les groupes $H^1(\Gamma, U(\bar{F}))$ et $\pi_0(\hat{U}^\Gamma)$ sont duaux. On pose

$$\Delta_{\mathrm{III}}(Y,X;\bar{Y},\bar{X}) = \langle \mathrm{inv}(Y,X;\bar{Y},\bar{X}), s_U \rangle.$$

On pose alors

$$\Delta_{G,H}(Y,X;\bar{Y},\bar{X}) = \Delta_{\mathrm{I}}(Y,X)\Delta_{\mathrm{I}}(\bar{Y},\bar{X})^{-1}$$
$$\Delta_{\mathrm{II}}(Y,X)\Delta_{\mathrm{II}}(\bar{Y},\bar{X})^{-1}\Delta_{\mathrm{III}}(Y,X;\bar{Y},\bar{X}).$$

Ce terme est indépendant de tous les choix.

Pour définir un facteur $\Delta_{G,H}(Y,X)$, on fixera un couple $\bar{Y},\bar{X}$ tel qu'il existe un diagramme $D(\bar{Y},\bar{X};F)$. On specifiera arbitrairement la valeur de $\Delta_{G,H}(\bar{Y},\bar{X})$ et on posera

$$\Delta_{G,H}(Y,X)=\Delta_{G,H}(\bar{Y},\bar{X})\Delta_{G,H}(Y,X;\bar{Y},\bar{X})$$

s'il existe un diagramme $D(Y,X;F)$. S'il n'en existe pas, on pose $\Delta_{G,H}(Y,X)=0$.

On vérifie que si $\mu\in F^{\times}$ est assez proche de 0, $\Delta_{G,H}(Y,X)$ est égale (à une constante près) au facteur Δ_{loc} (exp $\mu^2 Y$, exp $\mu^2 X$) de Langlands et Shelstad, privé du facteur Δ_{IV} ([LS1] Sect. 3, [LS2] Sect. 2.1). En effet, au voisinage des éléments neutres des groupes G et H, le facteur Δ_{II} de [LS1] se simplifie en celui que nous avons défini et le facteur $\Delta_{\mathrm{III},2}$ est égal à 1 ([LS1] Lemme 3.3 et Définition 3.5).

2.4. Le facteur de transfert ne dépend que de la classe d'equivalence des données E. Précisément, soient $E'=(G',G'^{*},\varphi',H',s',\xi')$ des données équivalentes, notons $i\colon G\to G'$, $i_H\colon H\to H'$, etc... les isomorphismes définissant l'équivalence. Alors

LEMME. *Il existe $\delta\neq 0$ tel que pour tous $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, $X\in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité*

$$\Delta_{G',H'}(i_H(Y),i(X))=\delta\Delta_{G,H}(Y,X).$$

Cela résulte de la même propriété des facteurs Δ_{loc} qui est démontrée (de façon occulte...) dans [LS1] paragraphe 3. □

2.5. La condition de compatibilité que l'on impose aux mesures sur les tores est la suivante. Si $T\in\mathcal{T}^G$ et $T^*\in\mathcal{T}^{G^*}$, si $x^*\in G^*(\bar{F})$ est tel que $(\mathrm{Ad}\,x^*)\circ\varphi|_T$ soit un isomorphisme défini sur F de T sur T^*, on veut que les mesures sur $T(F)$ et $T^*(F)$ se correspondent par cet isomorphisme. D'autre part, soient $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $X^*\in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$, supposons que Y est une image de X^*. Introduisons l'isomorphisme $\theta_{Y,X^*}\colon T_Y\to T_{X^*}$. On veut que les mesures sur $T_Y(F)$ et $T_{X^*}(F)$ se correspondent par cet isomorphisme. Ces conditions sont loisibles et impliquent que les mesures ne dépendent que de la classe de conjugaison stable des tores.

3. Indépendance de $\langle\ ,\ \rangle_g$ et ψ

3.1. Soit $E=(G,G^*,\varphi,H,s,\xi)\in\mathcal{E}(F)$. On fixe un caractère $\psi\colon F\to\mathbb{C}^{\times}$ continu et non trivial et une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_g$ sur $g(F)$, symétrique non dégénérée et invariante par conjugaison. Pour $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $Z\in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a défini en 1.1 les termes $D_{G,H}(Y,Z)$ et $\tilde{D}_{G,H}(Y,Z)$. Rappelons la définition des termes $\gamma_\psi(g)$ et $\gamma_\psi(h)$. Si q est une forme quadratique non dégénérée sur un espace V de dimension finie sur F et si $L \subset V$ est un $\mathfrak{o}$-réseau, où $\mathfrak{o}$ est l'anneau des entiers de F, on pose

$$I(L) = \int_L \psi(q(v)/2)\,\mathrm{d}v,$$

et $\gamma_\psi(q) = I(L)|I(L)|^{-1}$ pour n'importe quel réseau L assez grand. Alors $\gamma_\psi(g) = \gamma_\psi(q)$ pour $V = g, q(v) = \langle v, v\rangle_g$. Idem pour $\gamma_\psi(h)$.

On vérifie que la validité de la Conjecture 1.2 est indépendante des choix du facteur de transfert et des mesures de Haar sur $G(F), H(F)$ et sur les tores $T(F)$, pourvu que les mesures vérifient la condition 2.5.

3.2. LEMME. *La validité de la Conjecture 1.2 est indépendante des choix de ψ et de la forme $\langle\ ,\ \rangle_g$.*

Soient ψ' et $\langle\ ,\ \rangle'_g$ d'autres choix, $\langle\ ,\ \rangle'_h$ la forme sur $h(F)$ déduite de $\langle\ ,\ \rangle'_g$. On note $\hat{i}^G(\ ,\ )'$ et $\hat{i}^H(\ ,\ )'$ les termes déduits de ces choix. Soit $\lambda \in F^\times$ tel que $\psi'(\mu) = \psi(\lambda\mu)$ pour tout $\mu \in F$. Il est clair que

- la forme sur $h(F)$ déduite de $\lambda\langle\ ,\ \rangle'_g$ est $\lambda\langle\ ,\ \rangle'_h$;
- $\hat{i}^G(\ ,\ )'$ et $\hat{i}^H(\ ,\ )'$ sont égaux aux termes déduits de $\psi, \lambda\langle\ ,\ \rangle'_g$ et $\lambda\langle\ ,\ \rangle'_h$.

On peut donc se limiter au cas où $\lambda = 1$ et $\psi = \psi'$.

Il existe des automorphismes τ, resp. τ_H, de l'espace vectoriel $g(F)$, resp. $h(F)$, commutant à la conjugaison par $G(F)$, resp. $H(F)$, tels que pour tous $X, Z \in g(F)$, resp. $h(F)$,

$$\langle X, Z\rangle'_g = \langle X, \tau(Z)\rangle_g, \qquad \text{resp. } \langle X, Z\rangle'_h = \langle X, \tau_H(Z)\rangle_h.$$

Pour $f \in C_c^\infty(g(F))$, notons $\hat{f}'$ la transformée de Fourier relative à ψ et $\langle\ ,\ \rangle'_g$. On calcule $\hat{f}' = |\det\tau|_F^{1/2}\hat{f}\circ\tau$. Comme τ commute à la conjugaison par $G(F)$, il respecte tout tore maximal défini sur F. Pour $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on calcule

$$D\circ\tau(X) = |\det\tau|_F|\det\tau|_{t_X}|_F^{-1}D(X).$$

On déduit de ces relations que pour $X, Z \in g_{\mathrm{reg}}(F)$,

$$\hat{i}^G(X,Z)' = |\det\tau|_{t_X}|_F^{1/2}\hat{i}^G(\tau(X), Z).$$

Idem, pour $X, Z \in h_{\mathrm{reg}}(F)$,

$$\hat{i}H(X,Z)' = |\det\tau_{H|t_X}|_F^{1/2}\hat{i}^H(t_H(X), Z).$$

Soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. Supposons que Y soit une image de X, introduisons l'isomorphisme $\theta_{Y,X} : t_Y \to t_X$ (cf. 2.2). Par définition, pour $Z, Z' \in t_Y(F)$,

$$\langle Z, Z'\rangle_h = \langle\theta_{Y,X}(Z), \theta_{Y,X}(Z')\rangle_g,$$
$$\langle Z, Z'\rangle'_h = \langle\theta_{Y,X}(Z), \theta_{Y,X}(Z')\rangle'_g.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

On en déduit:

$$\theta_{Y,X} \circ \tau_H = \tau \circ \theta_{Y,X}.$$

D'où

- $\det(\tau_{H|t_Y}) = \det(\tau|_{t_X})$;
- $\tau_H(Y)$ est une image de $\tau(X)$.

On montrera ci-dessous que

(1) pour tous Y, X comme ci-dessus,

$$\Delta_{G,H}(\tau_H(Y), \tau(X)) = \gamma_\psi(g)'\gamma_\psi(g)^{-1}\gamma_\psi(h)\gamma_\psi(h)'^{-1}\Delta_{G,H}(Y, X),$$

où l'on affecte bien sûr d'un $'$ les objets définis à l'aide de $\psi, \langle\ ,\ \rangle'_g$ et $\langle\ ,\ \rangle'_h$.

Il résulte facilement des relations ci-dessus que pour $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $Z \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a les égalités

$$D_{G,H}(Y, Z)' = \gamma_\psi(h)'\gamma_\psi(h)^{-1}|\det \tau_{H|t_Y}|_F^{1/2} D_{G,H}(\tau_H(Y), Z),$$

$$\tilde{D}_{G,H}(Y, Z)' = \gamma_\psi(h)'\gamma_\psi(h)^{-1}|\det \tau_{H|t_Y}|_F^{1/2} \tilde{D}_{G,H}(\tau_H(Y), Z),$$

L'assertion de l'énoncé en résulte.

Il reste à prouver (1). Soient donc $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, supposons que Y soit une image de X. Fixons un diagramme $D(Y, X; F)$. Les mêmes données définissent un diagramme $D(\tau_H(Y), \tau(X); F)$. Ile résulte alors de 2.3 que

(2) $\Delta_{G,H}(\tau_H(Y), \tau(X))\Delta_{G,H}(Y, X)^{-1} = \Delta_{\mathrm{II}}(\tau_H(Y), \tau(X))\Delta_{\mathrm{II}}(Y, X)^{-1} = \prod \chi_\alpha(\alpha(X^{*'})\alpha(X^*)^{-1})$.

Le produit étant pris sur un ensemble de représentants des orbites de Γ dans $\sum^{\mathrm{sym}}_{\mathrm{hors}\,H}(T_{X^*})$, où $X^{*'}$ désigne l'image de $\tau(X)$ par $\varphi \circ (\mathrm{Ad}\, x^{-1})$.

Notons $\Sigma(T_X)$ l'ensemble des racines de T_X dans g et introduisons des notations analogues à celles de 2.3. Pour $\alpha \in \Sigma(T_X)$, fixons un élément E_α non nul dans le sous-espace radiciel de $g(\bar{F})$ associé à α, de sorte que $\sigma(E_\alpha) = E_{\sigma(\alpha)}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Pour $\alpha \in \sum^{\mathrm{sym}}(T_X)$, notons ψ_α le caractère $\psi\circ\ \mathrm{trace}_{F_{\pm\alpha}/F}$ de $F_{\pm\alpha}, \sigma_\alpha$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(F_\alpha/F_{\pm\alpha})$ et q_α la forme quadratique sur F_α, à valeurs dans $F_{\pm\alpha}$, définie par

$$q_\alpha(\mu) = 2\langle E_{-\alpha}, E_\alpha\rangle_g \mu\sigma_\alpha(\mu).$$

Notons q_X la restriction de $\langle\ ,\ \rangle_g$ à t_X. On a prouvé en [W1], preuve du Lemme VIII.5, l'égalité

$$\gamma_\psi(g) = \gamma_\psi(q_X) \prod_\alpha \gamma_{\psi_\alpha}(q_\alpha)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

où α parcourt un ensemble de représentants des orbites de Γ dans $\sum^{\text{sym}}(T_X)$. Avec des notations évidentes, on a aussi

$$\gamma_\psi(g)' = \gamma_\psi(q'_X) \prod_\alpha \gamma_{\psi_\alpha}(q'_\alpha).$$

Comme τ est invariant par conjugaison par $G(F)$, il vérifie la relation

$$[\tau(Z), Z'] = \tau([Z, Z'])$$

pour tous $Z, Z' \in g(F)$, donc aussi pour $Z, Z' \in g(\bar{F})$. Soit $\alpha \in \sum^{\text{sym}}(T_X)$. On a

$$[X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha, [\tau(X), E_\alpha] = \alpha \circ \tau(X)E_\alpha.$$

En appliquant la relation précédente, on obtient

$$\tau(E_\alpha) = \alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1}E_\alpha,$$

d'où

$$\langle E_{-\alpha}, E_\alpha\rangle'_g = \langle E_{-\alpha}, \tau(E_\alpha)\rangle_g = \alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1}\langle E_{-\alpha}, E_\alpha\rangle_g$$

et $q'_\alpha = \alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1}q_\alpha$. Ces formes étant de rang 2, on en déduit la relation

$$\gamma_{\psi_\alpha}(q'_\alpha) = \chi_\alpha(\alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1})\gamma_{\psi_\alpha}(q_\alpha).$$

Donc

$$\gamma_\psi(g)'\gamma_\psi(g)^{-1} = \gamma_\psi(q'_X)\gamma_\psi(q_X)^{-1} \prod_\alpha \chi_\alpha(\alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1})$$

le produit étant pris comme ci-dessus. On a une relation analogue pour $\gamma_\psi(h)'\gamma_\psi(h)^{-1}$. Comme $\theta_{Y,X}$ identifie t_Y à t_X, q_Y à q_X et q'_Y à q'_X, on obtient

$$\begin{aligned}&\gamma_\psi(g)'\gamma_\psi(g)^{-1}\gamma_\psi(h)\gamma_\psi(h)'^{-1}\\ &\quad = \left[\prod_\alpha \chi_\alpha(\alpha \circ \tau(X)\alpha(X)^{-1})\right]\left[\prod_\beta \chi_\beta(\beta \circ \tau_H(Y)^{-1}\beta(Y))\right],\end{aligned}$$

où α, resp. β, parcourt un système de représentants des orbites de Γ dans $\sum^{\text{sym}}(T_X)$, resp. $\sum^{\text{sym}}(T_Y)$. Identifions t_Y et t_X à t_{X^*} par les isomorphismes déduits du diagramme $D(Y, X; F)$. Comme ces isomorphismes sont invariants par Γ, le deuxième membre de l'égalité ci-dessus s'identifie au terme de droite de l'égalité (2). On en déduit (1), ce qui achève la preuve. □

3.3. Soient $E' = (G', G'^*, \varphi', H', s', \xi') \in \mathcal{E}(F)$ des données équivalentes á E, i, i_H, etc,..., les isomorphismes définissant l'équivalence. On munit $g'(F)$ de la forme $\langle\ ,\ \rangle_{g'}$ déduite de $\langle\ ,\ \rangle_g$ via l'isomorphisme i. Si $T'^* \in \mathcal{T}^{G'^*}$, on munit $T'^*(F)$ de la mesure déduite de celle sur $i^{*-1}(T'^*)(F)$ via l'isomorphisme i^*. On munit les sous-tores de G' et H' de mesures telles que la condition 2.5 soit vérifiée. Les fonctions $\hat{i}^{G'}$ et $\hat{i}^{H'}$ sont calculées pour ces choix.

D'après 2.4, il existe $\delta \neq 0$ tel que pour tous $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité

$$\Delta_{G',H'}(i_H(Y), i(X)) = \delta\Delta_{G,H}(Y, X).$$

Fixons un tel δ (δ est unique s'il existe un couple Y, X tel que $\Delta_{G,H}(Y, X) \neq 0$).

LEMME. *Pour tous $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), Z \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a les égalités*

$$D_{G',H'}(i_H(Y), i(Z)) = \delta D_{G,H}(Y, Z),$$
$$\tilde{D}_{G',H'}(i_H(Y), i(Z)) = \delta\tilde{D}_{G,H}(Y, Z).$$

Par définition de $\langle\ ,\ \rangle_{g'}$, pour $X_1, X_2 \in g(F)$, on a l'égalité

$$\langle i(X_1), i(X_2)\rangle_{g'} = \langle X_1, X_2\rangle_g.$$

On en déduit que $\gamma_\psi(g') = \gamma_\psi(g)$ et que pour toute $f' \in C_c^\infty(g'(F))$, on a l'égalité

$$(f' \circ i)\hat{\ } = \hat{f}' \circ i.$$

On vérifie que si $T \in \mathcal{T}^G$, l'isomorphisme i transporte la mesure de $T(F)$ sur celle de $i(T)(F)$. On déduit alors de l'égalité précédente que

$$\hat{i}^{G'}(i(X_1), i(X_2)) = \hat{i}^G(X_1, X_2) \tag{1}$$

pour tous $X_1, X_2 \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. D'autre part si $X_1, X_2 \in g_{\mathrm{reg}}(F), X_1$ et X_2 sont conjugués par un élément de $G(F)$, resp. de $G(\bar{F})$, si et seulement si $i(X_1)$ et $i(X_2)$ le sont par un élément de $G'(F)$, resp. $G'(\bar{F})$.

Soient alors $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $Z \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. Rappelons que

$$D_{G',H'}(i_H(Y), i(Z)) = \gamma_\psi(g')\sum_{X'}\Delta_{G',H'}(i_H(Y), X')\hat{i}^{G'}(X', i(Z))$$

où X' parcourt $g'_{\mathrm{reg}}(F)$ modulo conjugaison. On peut remplacer $\gamma_\psi(g')$ par $\gamma_\psi(g)$ et X' par $i(X)$ où X parcourt $g_{\mathrm{reg}}(F)$ modulo conjugaison. Il suffit alors d'utiliser la relation (1) et la définition de δ pour obtenir la première égalité du lemme.

Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ de G^*, $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ de H, $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$ de $\hat{G}$, $(\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de $\hat{H}$. On pose $(\mathbb{B}', \mathbb{T}') = (i^*(\mathbb{B}), i^*(\mathbb{T}))$ etc,... Ce sont encore des paires Γ-stables.

Quitte à composer ξ et ξ' avec des automorphismes intérieurs de $\hat{G}$, resp. $\hat{G}'$, on suppose $\xi(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}, \xi'(\hat{\mathbb{T}}_{H'}) = \hat{\mathbb{T}}', \xi(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}, \xi'(\hat{\mathbb{B}}_{H'}) \subset \hat{\mathbb{B}}'$. Les données E et E' étant équivalentes, il existe $\hat{x} \in \mathrm{Norm}_{\hat{G}}(\hat{T})$ tel que

$$\xi' \circ \hat{i}_H = \hat{i} \circ (\mathrm{Ad}\,\hat{x}) \circ \xi.$$

Soit $x^* \in \mathrm{Norm}_{G^*(\bar{F})}(\mathbb{T})$ tel que les images de x^* dans W^{G^*} et de $\hat{x}$ dans $W^{\hat{G}}$ se correspondent. Alors

$$\eta' \circ i_{H|\mathbb{T}_H} = i^* \circ (\mathrm{Ad}\,x^*) \circ \eta. \tag{2}$$

Je dis que pour tous $Y_1, Y_2 \in h(F)$, on a l'égalité

$$\langle i_H(Y_1), i_H(Y_2)\rangle_{h'} = \langle Y_1, Y_2\rangle_h. \tag{3}$$

En effet, notons $\langle\langle Y_1, Y_2\rangle\rangle_h$ le membre de gauche. Alors $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_h$ est comme $\langle\ ,\ \rangle_h$ une forme bilinéaire symétrique sur $h(F)$, non dégénérée et invariante par conjugaison. Deux telles formes sont égales si leurs restrictions à $\mathtt{t}_H(F)$ le sont ([W1] VIII.6). Supposons donc $Y_1, Y_2 \in \mathtt{t}_H(F)$. Notons encore $\langle\ ,\ \rangle_g$ et $\langle\ ,\ \rangle_{g'}$ les extensions $\bar{F}$-bilinéaires de ces formes à $g(\bar{F})$ et $g'(\bar{F})$. D'après les définitions de nos formes, on a

$$\langle Y_1, Y_2\rangle_h = \langle \varphi^{-1} \circ \eta(Y_1), \varphi^{-1} \circ \eta(Y_2)\rangle_g,$$

$$\langle\langle Y_1, Y_2\rangle\rangle_h = \langle \varphi'^{-1} \circ \eta' \circ i_H(Y_1), \varphi'^{-1} \circ \eta' \circ i_H(Y_2)\rangle_{g'} = \langle \theta(Y_1), \theta(Y_2)\rangle_g,$$

où $\theta = i^{-1} \circ \varphi'^{-1} \circ \eta' \circ i_{H|\mathtt{t}_H}$. Il résulte de (2) et de la définition d'une équivalence qu'il existe $x_1 \in G(\bar{F})$ tel que $\theta = (\mathrm{Ad}\,x_1) \circ \varphi^{-1} \circ \eta$. Mais $\langle\ ,\ \rangle_g$ étant invariante par conjugaison par $G(F)$ l'est aussi par conjugaison par $G(\bar{F})$, l'invariance étant un propriété algébrique. Donc

$$\langle \theta(Y_1), \theta(Y_2)\rangle_g = \langle \varphi^{-1} \circ \eta(Y_1), \varphi^{-1} \circ \eta(Y_2)\rangle_g$$

d'où l'égalité cherchée $\langle\langle Y_1, Y_2\rangle\rangle_h = \langle Y_1, Y_2\rangle_h$.

Soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $X^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$ dont Y soit l'image. Introduisons l'isomorphisme $\theta_{Y,X^*} : T_Y \to T_{X^*}$. On vérifie que $i_H(Y)$ est une image de $i^*(X^*)$ et que

$$i^* \circ \theta_{Y,X^*} = \theta_{i_H(Y), i^*(X^*)} \circ i_H.$$

Comme $\theta_{Y,X^*}, \theta_{i_H(Y), i^*(X^*)}$ et $i^*|_{T_{X^*}}$ préservent les mesures, $i_H|_{T_Y}$ transporte la mesure de $T_Y(F)$ sur celle de $T_{i_H(Y)}(F)$. Grâce à (2), on en déduit comme ci-dessus que

$$\hat{i}^{H'}(i_H(Y_1), i_H(Y_2)) = \hat{i}^H(Y_1, Y_2)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

pour tous $Y_1, Y_2 \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. On démontre alors la deuxième égalité du lemme comme on a démontré la première. $\square$

Il résulte des lemmes 3.2 et 3.3 que E vérifie la Conjecture 1.2 si et seulement si E' la vérifie.

4. Extensions

4.1. On fixe pour tout le paragraphe 4 des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$ et une suite exacte

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} G_1 \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\gamma} A' \longrightarrow 1 \tag{4}$$

où G_1 est un groupe réductif connexe, A et A' sont abéliens, A est central dans G_1, les groupes et les morphismes étant définis sur F.

4.2. On va construire des données $E_1 = (G_1, G_1^*, \varphi_1, H_1, s_1, \xi_1) \in \mathcal{E}(F)$. Notons d'abord que β se relève en un isomorphisme $\beta_{\mathrm{sc}}\colon G_{1,\mathrm{sc}} \to G_{\mathrm{sc}}$. Pour $\sigma \in \Gamma$, soit $u_\sigma \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ tel que $\varphi^{-1} \circ \sigma(\varphi) = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$. Posons $u_{1,\sigma} = \beta_{\mathrm{sc}}^{-1}(u_\sigma)$. Notons G_1^* le groupe sur F tel que $G_1^*(\bar{F}) = G_1(\bar{F})$, muni de l'action de Γ définie par

$$\sigma_{G_1^*}(x) = u_{1,\sigma}\sigma_{G_1}(x)u_{1,\sigma}^{-1}, \text{ pour tous } \sigma \in \Gamma, x \in G_1^*(\bar{F}).$$

On note $\varphi_1\colon G_1 \to G_1^*$ l'identité. C'est un torseur intérieur et la suite (1) de 4.1 se complète en un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & G_1 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\varphi"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha^*"] & G_1^* \arrow[r, "\beta^*"] & G^* \arrow[r, "\gamma^*"] & A' \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Les applications horizontales sont définies sur F. Fixons une paire Γ-stable $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ de G^*. Posons $\mathbb{B}_1 = \beta^{*-1}(\mathbb{B}), \mathbb{T}_1 = \beta^{*-1}(\mathbb{T})$. Alors $(\mathbb{B}_1, \mathbb{T}_1)$ est une paire Γ-stable de G_1^*. Le groupe G_1^* est donc quasi-déployé sur F. On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha^*} \mathbb{T}_1 \xrightarrow{\beta^*} \mathbb{T} \xrightarrow{\gamma^*} A' \longrightarrow 1$$

(pour simplifier, on note simplement β^* la restriction de β^* à $\mathbb{T}_1$ etc...)

Introduisons le groupe $\hat{G}_1$. Fixons des paires Γ-stables $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}}), (\hat{\mathbb{B}}_1, \hat{\mathbb{T}}_1), (\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de $\hat{G}, \hat{G}_1$ et $\hat{H}$. Quitte à composer ξ par un automorphisme intérieur de $\hat{G}$, on suppose $\xi(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}, \xi(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}$. Il existe un homomorphisme $\hat{\beta}\colon \hat{G} \to \hat{G}_1$, dual à β^*, tel que $\hat{\beta}(\hat{\mathbb{B}}) \subset \hat{\mathbb{B}}_1, \hat{\beta}(\hat{\mathbb{T}}) \subset \hat{\mathbb{T}}_1$. On en fixe un. Définissons

- $s_1 = \hat{\beta} \circ \xi(s)$;
- $\hat{H}_1 = Z_{\hat{G}_1}(s_1)^\circ$;
- $\xi_1 \colon \hat{H}_1 \to \hat{G}_1$ est l'injection naturelle;
- $\hat{\mathbb{B}}_{H_1} = \hat{H}_1 \cap \hat{\mathbb{B}}_1, \hat{\mathbb{T}}_{H_1} = \hat{\mathbb{T}}_1$.

Pour $\sigma \in \Gamma$, soit $\hat{x}_\sigma \in \hat{G}$ tel que $\sigma_{\hat{G}} \circ \xi \circ \sigma_{\hat{H}}^{-1} = (\mathrm{Ad}\, \hat{x}_\sigma) \circ \xi$. On définit une action de Γ sur $\hat{H}_1$ par la relation

$$\sigma_{\hat{G}_1} \circ \xi_1 \circ \sigma_{\hat{H}_1}^{-1} = (\mathrm{Ad}\, \hat{\beta}(\hat{x}_\sigma)) \circ \xi_1.$$

C'est loisible. Cette action préserve le couple $(\hat{\mathbb{B}}_{H_1}, \hat{\mathbb{T}}_{H_1})$. Notons $\hat{\delta} : \hat{H} \to \hat{H}_1$ l'application telle que $\xi_1 \circ \hat{\delta} = \hat{\beta} \circ \xi$. Alors $\hat{\delta}$ est Γ-invariante et l'on a $\hat{\delta}(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}_{H_1}, \hat{\delta}(\hat{\mathbb{T}}_H) \subset \hat{\mathbb{T}}_{H_1}$. L'image d'un scindage Γ-stable de $\hat{H}$ est un scindage Γ-stable de $\hat{H}_1$. Il existe alors un unique groupe réductif connexe H_1 défini sur F et quasi-déployé dont le groupe complexe associé, muni de son action de Γ, soit $\hat{H}_1$. Munissons H et H_1 de paires Γ-stables $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ et $(\mathbb{B}_{H_1}, \mathbb{T}_{H_1})$. Il existe un homomorphisme $\delta : H_1 \to H$ défini sur F, dual de $\hat{\delta}$, tel que $\delta(\mathbb{B}_{H_1}) \subset \mathbb{B}_H, \delta(\mathbb{T}_{H_1}) \subset \mathbb{T}_H$. Fixons-en un.

Notons $\eta \colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{T}, \eta_1 \colon \mathbb{T}_{H_1} \to \mathbb{T}_1$ les isomorphismes sur $\bar{F}$ déduits de ξ et ξ_1 (cf. 2.2). Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}_1 \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{T} \\
\mathbb{T}_{H_1} \arrow[u, "\eta_1"] \arrow[r, "\delta"] & \mathbb{T}_H \arrow[u, "\eta"'].
\end{tikzcd}$$

On a donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha_H} \mathbb{T}_{H_1} \xrightarrow{\delta} \mathbb{T}_H \xrightarrow{\gamma_H} A' \longrightarrow 1.$$

Comme η et η_1 commutent à l'action de Γ modulo action des normalisateurs $\mathrm{Norm}_{G^*}(\mathbb{T})$, $\mathrm{Norm}_{G_1^*}(\mathbb{T}_1)$ et que ces derniers agissent trivialement sur A et A', la suite ci-dessus est définie sur F. Mais les noyau et conoyau de δ sont les mêmes que ceux de $\delta|_{\mathbb{T}_{H_1}}$. On en déduit une suite exacte définie sur F

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha_H} H_1 \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\gamma_H} A' \longrightarrow 1.$$

Les données $E_1 = (G_1, G_1^*, \varphi_1, H_1, s_1, \xi_1)$ appartiennent à $\mathcal{E}(F)$. On vérifie que leur classe d'isomorphie ne dépend que de celle de E.

4.3. Notons $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie du centre de G. On a les égalités

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}, \mathfrak{t} = \mathfrak{z} \oplus (\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}).$$

Posons $\mathfrak{h}' = \eta^{-1}(\mathfrak{z}), \mathfrak{h}'' = \mathfrak{h}_{\mathrm{der}} + \eta^{-1}(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{der}})$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$. Pour $X \in \mathfrak{g}$, resp. $X \in \mathfrak{h}$, on notera X' et X'' les composantes de X dans $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$, resp. $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{h}''$.

Pour $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on vérifie

(1) Y est une image de X si et seulement si $X' = \eta(Y')$ et Y'' est une image de X'';

(2) si $X' = \eta(Y'), \Delta_{G,H}(Y, X) = \Delta_{G,H}(Y'', X'')$ (cf. [LS2] 3.5).

On a des propriétés analogues pour le couple G_1, H_1. Notons que la suite (1) de 4.1 définit un isomorphisme

$$\mathfrak{g}_{1,\mathrm{der}} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{z}_1 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{z} \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{a}' \longrightarrow 0$$

De même, on a un isomorphisme

$$\mathfrak{h}_1'' \xrightarrow{\delta} \mathfrak{h}''$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\alpha_H} \mathfrak{h}_1' \xrightarrow{\delta} \mathfrak{h}' \xrightarrow{\gamma_H} \mathfrak{a}' \longrightarrow 0$$

LEMME. *Il existe $c \neq 0$ tel que pour tous $Y \in \mathfrak{h}_1''(F) \cap \mathfrak{h}_{1,G_1^*-\mathrm{reg}}(F), X \in \mathfrak{g}_{1,\mathrm{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{1,\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité*

$$c\Delta_{G_1,H_1}(Y, X) = \Delta_{G,H}(\delta(Y), \beta(X)).$$

Si $y \in H_1(\bar{F}), x^* \in G^*_{1,\mathrm{sc}}(\bar{F})$ et $x \in G_{1,\mathrm{sc}}(\bar{F})$ définissent un diagramme $D(Y, X; F)$, alors $\delta(y), \beta^*_{\mathrm{sc}}(x^*)$ et $\beta_{\mathrm{sc}}(x)$ définissent un diagramme $D(\delta(Y), \beta(X); F)$, où β^*_{sc} est l'isomorphisme de $G^*_{1,\mathrm{sc}}$ sur G^*_{sc} déduit de β^*. Inversement, si $y \in H(\bar{F}), x^* \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ et $x \in G_{\mathrm{sc}}$ définissent un diagramme $D(\delta(Y), \beta(X); F)$, choisissons $\tilde{y} \in H_1(\bar{F})$ tel que $\delta(\tilde{y}) \in yZ_H(\bar{F})$. Alors $\tilde{y}, \beta^{*-1}_{\mathrm{sc}}(x^*)$ et $\beta^{-1}_{\mathrm{sc}}(x)$ définissent un diagramme $D(Y, X; F)$. Donc Y est une image de X si et seulement si $\delta(Y)$ est une image de $\beta(X)$.

Supposons qu'il en soit ainsi et fixons un couple analogue $\bar{Y}, \bar{X}$. Fixons des diagrammes $D(Y, X; F)$ et $D(\bar{Y}, \bar{X}; F)$ et construisons $D(\delta(Y), \beta(X); F)$ et $D(\delta(\bar{Y}), \beta(\bar{X}); F)$ comme ci-dessus. On a les égalités

$$\Delta_{\mathrm{I}}(Y, X) = \Delta_{\mathrm{I}}(\delta(Y), \beta(X)),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

$$\Delta_{\mathrm{III}}(Y,X;\bar{Y},\bar{X}) = \Delta_{\mathrm{III}}(\delta(Y),\beta(X);\delta(\bar{Y}),\beta(\bar{X})).$$

En effet, ces termes se calculent au niveau des revêtements simplement connexes $G_{\mathrm{sc}}, G_{1,\mathrm{sc}}$ etc... Et à ce niveau, les objets relatifs à G_1 et H_1 s'identifient à ceux relatifs à G et H. On a aussi

$$\Delta_{\mathrm{II}}(Y,X) = \Delta_{\mathrm{II}}(\delta(Y),\beta(X)),$$

car β^* définit une bijection Γ-invariante de $\Sigma(T_{X^*})$ sur $\Sigma(T_{\beta(X)^*})$ de sorte que pour $\alpha \in \Sigma(T_{X^*}), \beta^*(\alpha)(\beta(X)^*) = \alpha(X^*)$.
Cela démontre le lemme. □

4.4. Fixons ψ et $\langle\ ,\ \rangle_g$ comme en 1.1. On munit $G(F)$ et, pour tout $T \in \mathcal{T}^G$, on munit $T(F)$ de mesures de Haar de sorte que l'exponentielle préserve les mesures dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$, resp. $\mathfrak{t}(F)$. D'après la formule d'intégration de Weyl, la définition de $\hat{\imath}^G$ se récrit:

$$J(X,\hat{f}) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Z)\hat{\imath}^G(X,Z)D(Z)^{-1/2}\,\mathrm{d}Z$$

pour toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et tout $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. Pour $f' \in C_c^\infty(\mathfrak{z}(F)), f'' \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F))$, on définit de façon évidente $\hat{f}'$ et $\hat{f}''$. Notons que pour $X'' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$, on peut définir $J(X'',f'')$ par la même formule qu'en 1.1. Définissons $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par $f(X'+X'') = f'(X')f''(X'')$. La formule ci-dessus devient

$$\hat{f}'(X')J(X'',\hat{f}'') = J(X,\hat{f}) = \int_{\mathfrak{z}(F)\times\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F)}$$
$$f'(Z')f''(Z'')\hat{\imath}^G(X,Z'+Z'')D(Z'')^{-1/2}\,\mathrm{d}Z'\,\mathrm{d}Z''.$$

On en déduit:

(1) $\hat{\imath}^G(X,Z) = \psi(\langle X',Z'\rangle_g)\hat{\imath}^G(X'',Z'')$ pour tous $X,Z \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$;
(2) $J(X,\hat{f}) = \int_{\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F)} f(Z)\hat{\imath}^G(X,Z)D(Z)^{-1/2}\,\mathrm{d}Z$, pour tous $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F))$, $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$.

On a des formules analogues pour le groupe H, en remplaçant $\mathfrak{z}$ par $\mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}$ par $\mathfrak{h}''$. Fixons une forme $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}_1}$ sur $\mathfrak{g}_1(F)$ de sorte que les restrictions de $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}_1}$ à $\mathfrak{g}_{1,\mathrm{der}}(F)$ et de $\langle\ ,\ \rangle_g$ à $\mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F)$ s'identifient par l'isomorphisme β. On a encore des formules analogues pour les groupes G_1 et H_1.

Soit $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$. Notons $G(F)X$ sa classe de conjugaison. Comme l'application $G_1(F) \to Z_G(F)\backslash G(F)$ déduite de β est de conoyau fini, le sous-ensemble $\beta^{-1}(G(F)X) \cap \mathfrak{g}_{1,\mathrm{der}}(F)$ de $\mathfrak{g}_{1,\mathrm{der}}(F)$ est réunion de classes $G_1(F)X_1$,

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

où X_1 parcourt un ensemble fini, disons $I(X)$. Soient $X_1 \in I(X)$ et $x \in G(F)$ tels que $\beta(X_1) = (\operatorname{Ad} x)(X)$. D'après nos choix de formes et de mesures, l'application

$$T_{X_1}(F)\backslash G_1(F) \to T_X(F)\backslash G(F)$$

déduite de $x_1 \mapsto x^{-1}\beta(x_1)$ préserve les mesures. On en déduit que si $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{\text{der}}(F))$ et si $f_1 \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{1,\text{der}}(F))$ est définie par $f_1 = f \circ \beta$, alors

$$J(X, f) = \sum_{X_1 \in I(X)} J(X_1, f_1).$$

D'autre part $(f_1)\hat{}\ = (\hat{f})_1$. On déduit alors de (2) l'égalité

$$\hat{\imath}^G(X, \beta(Z_1)) = \sum_{X_1 \in I(X)} \hat{\imath}^{G_1}(X_1, Z_1) \tag{3}$$

pour tous $X \in \mathfrak{g}_{\text{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, $Z_1 \in \mathfrak{g}_{1,\text{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{1,\text{reg}}(F)$.

On a une relation analogue pour les groupes H et H_1, où $\mathfrak{h}''$ et $\mathfrak{h}_1''$ remplacent $\mathfrak{g}_{\text{der}}$ et $\mathfrak{g}_{1,\text{der}}$.

4.5. PROPOSITION. *Supposons la conjecture* 1.2 *vraie pour les données* E_1. *Alors elle l'est pour les données* E.

On fixe des formes $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{g}_1}$ comme en 4.4. Soient $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$, $Z \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$. Notons Z_1 l'élément de $\mathfrak{g}_{1,\text{der}}(F)$ tel que $\beta(Z_1) = Z''$, Y_1 l'élément de $\mathfrak{h}_1''(F)$ tel que $\delta(Y_1) = Y''$. On a l'égalité

$$D_{G,H}(Y, Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g}) \sum_X \Delta_{G,H}(Y, X)\hat{\imath}^G(X, Z)$$

où X parcourt $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. D'après 4.3 (1) et (2), on a donc

$$D_{G,H}(Y, Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g}) \sum_{X''} \Delta_{G,H}(Y'', X'')\hat{\imath}^G(\eta(Y') + X'', Z),$$

où X'' parcourt $\mathfrak{g}_{\text{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. D'après 4.4 (1), c'est aussi

$$D_{G,H}(Y, Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g})\psi(\langle \eta(Y'), Z'\rangle_{\mathfrak{g}})$$
$$\sum_{X''} \Delta_{G,H}(Y'', X'') \sum_{X_1 \in I(X'')} \hat{\imath}^{G_1}(X_1, Z_1).$$

Pour $X_1 \in I(X'')$, on a $\Delta_{G,H}(Y'', X'') = c\Delta_{G_1,H_1}(Y_1, X_1)$ d'après le Lemme 4.3 et l'invariance par conjugaison de $\Delta_{G,H}(Y'', .)$. D'autre part, quand X'' parcourt

$\mathfrak{g}_{\text{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison et X_1 parcourt $I(X'')$, X_1 parcourt en fait $\mathfrak{g}_{1,\text{der}}(F) \cap \mathfrak{g}_{1,\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison par $G_1(F)$. Alors

$$D_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(\mathfrak{g})\psi(\langle\eta(Y'),Z'\rangle_{\mathfrak{g}}) \sum_{X_1} \Delta_{G_1,H_1}(Y_1,X_1)\hat{i}^{G_1}(X_1,Z_1),$$

i.e., d'après 4.3 (1) appliqué à G_1:

(1) $D_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(\mathfrak{g})\gamma_\psi(\mathfrak{g}_1)^{-1}\psi(\langle\eta(Y'),Z'\rangle_{\mathfrak{g}})D_{G_1,H_1}(Y_1,Z_1)$.

On a l'égalité

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{h}) \sum_{\tilde{Y},\tilde{Z}} w(\tilde{Z})^{-1}\hat{i}^H(\tilde{Y},\tilde{Z})\Delta_{G,H}(\tilde{Z},Z)$$

où $\tilde{Y}$ parcourt la classe de conjugaison stable de Y modulo conjugaison et $\tilde{Z}$ parcourt $\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. D'après 4.3 (1) et (2), on a donc

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{h})$$

$$\sum_{\tilde{Y},\tilde{Z}''} w(\eta^{-1}(Z') + \tilde{Z}'')^{-1}\hat{i}^H(\tilde{Y},\eta^{-1}(Z') + \tilde{Z}'')\Delta_{G,H}(\tilde{Z}'',Z'')$$

où $\tilde{Z}''$ parcourt $\mathfrak{h}''(F) \cap \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. Il est clair que $w(\eta^{-1}(Z') + \tilde{Z}'') = w(\tilde{Z}'')$. D'autre part, quand $\tilde{Y}$ parcourt la classe de conjugaison stable de Y modulo conjugaison, on a $\tilde{Y}' = Y'$ et $\tilde{Y}''$ parcourt la classe de conjugaison stable de Y'' modulo conjugaison. D'où, d'après 4.4 (1):

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{h})\psi(\langle Y',\eta^{-1}(Z')\rangle_{\mathfrak{h}})$$

$$\sum_{\tilde{Y}'',\tilde{Z}''} w(\tilde{Z}'')^{-1}\hat{i}^H(\tilde{Y}'',\tilde{Z}'')\Delta_{G,H}(\tilde{Z}'',Z'').$$

Fixons $\tilde{Z}''$. Soit $\tilde{Z}_1 \in \mathfrak{h}_1''(F)$ tel que $\delta(\tilde{Z}_1) = Z''$. D'après le Lemme 4.3 et l'égalité 4.4 (3), la somme en $\tilde{Y}''$ ci-dessus est égale à

$$cw(\tilde{Z}'')^{-1}\sum_{\tilde{Y}''}\sum_{\tilde{Y}_1\in I(\tilde{Y}'')} \hat{i}^{H_1}(\tilde{Y}_1,\tilde{Z}_1)\Delta_{G_1,H_1}(\tilde{Z}_1,Z_1).$$

Quand $\tilde{Y}''$ et $\tilde{Y}_1$ décrivent les ensembles indiqués, $\tilde{Y}_1$ décrit en fait la classe de conjugaison stable de Y_1 modulo conjugaison. Par ailleurs, comme l'expression ne dépend que de la classe de conjugaison de $\tilde{Z}''$, on peut remplacer $\tilde{Z}_1$ par un élément quelconque de $I(\tilde{Z}'')$, puis sommer sur ces éléments en divisant le tout par $|I(\tilde{Z}'')|$. On obtient alors

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(\mathfrak{h})\psi(\langle Y',\eta^{-1}(Z')\rangle_{\mathfrak{h}})$$

$$\sum_{\tilde{Y}_1}\sum_{\tilde{Z}''}\sum_{\tilde{Z}_1\in I(\tilde{Z}'')} w(\tilde{Z}'')^{-1}|I(\tilde{Z}'')|^{-1}\hat{i}^{H_1}(\tilde{Y}_1,\tilde{Z}_1)\Delta_{G_1,H_1}(\tilde{Z}_1,Z_1).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

De nouveau, $\tilde{Z}_1$ parcourt en fait $h_1''(F) \cap h_{1,G_1^*-\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. Montrons que

(2) pour tous $X \in h''(F) \cap h_{\text{reg}}(F), X_1 \in I(X)$, on a l'égalité $w(X_1) = w(X)|I(X)|$.

Comme les groupes adjoints de H et H_1 sont identiques, δ de restreint en une bijection entre les classes de conjugaison stable de X_1 et de X. Notons $C(X_1)$, resp. $C(X)$, l'ensemble des classes de conjugaison dans ces classes de conjugaison stable. On a donc une surjection $\delta_C : C(X_1) \to C(X)$. On a $w(X_1) = |C(X_1)|, w(X) = |C(X)|$ et la fibre de δ_C au dessus de la classe de X a $|I(X)|$ éléments. Pour démontrer l'assertion, il suffit donc de prouver que toutes les fibres de δ_C ont même nombre d'éléments. Rappelons que l'on a une application $\tau \colon C(X_1) \to H^1(\Gamma, T_{X_1}(\bar{F}))$ ainsi définie: si $c \in C(X_1)$, on choisit $x_1 \in H_1(\bar{F})$ tel que $(\text{Ad}\, x_1)(X_1) \in c$; l'application $\sigma \mapsto \sigma(x_1^{-1})x_1$ est un cocycle de Γ dans $T_{X_1}(\bar{F})$ et $\tau(c)$ est la classe de ce cocycle. On sait que τ est injective et que l'image de τ est un sous-groupe de $H^1(\Gamma, T_{X_1}(\bar{F}))$ ([L] II.3). Supposons comme il est loisible que $\delta(X_1) = X$. Alors δ définit une application

$$\delta_{H^1} \colon H^1(\Gamma, T_{X_1}(\bar{F})) \to H^1(\Gamma, T_X(\bar{F})).$$

On vérifie que deux classes c et $c' \in C(X_1)$ ont même image par δ_C si et seulement si $\tau(c)$ et $\tau(c')$ ont même image par δ_{H^1}. Mais alors les fibres de δ_C ont même nombre d'éléments que les fibres de la restriction $\delta_{H^1}|\text{Im}\,(\tau)$. Comme cette application est un morphisme de groupes, toutes ses fibres ont même nombre d'éléments, ce qui achève la preuve de (2).

Alors

$$\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(h)\psi(\langle Y', \eta^{-1}(Z')\rangle_h)$$
$$\sum_{\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_1} w(\tilde{Z}_1)^{-1}\hat{\imath}^{H_1}(\tilde{Y}_1, \tilde{Z}_1)\Delta_{G_1,H_1}(\tilde{Z}_1, Z_1),$$

i.e.

(3) $\tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(h)\gamma_\psi(h_1)^{-1}\psi(\langle Y', \eta^{-1}(Z')\rangle_h)\tilde{D}_{G_1,H_1}(Y_1, Z_1)$.

Par définition de $\langle\ ,\ \rangle_h$, $\langle Y', \eta^{-1}(Z')\rangle_h = \langle \eta(Y'), Z'\rangle_g$. Comme les restrictions de $\langle\ ,\ \rangle_{g_1}$ à $g_{1,\text{der}}$ et de $\langle\ ,\ \rangle_g$ à g_{der} s'identifient par l'isomorphisme β, on a, avec une notation évidente, $\gamma_\psi(g)\gamma_\psi(g_1)^{-1} = \gamma_\psi(z)\gamma_\psi(z_1)^{-1}$. De même, $\gamma_\psi(h)\gamma_\psi(h_1)^{-1} = \gamma_\psi(h')\gamma_\psi(h_1')^{-1} = \gamma_\psi(z)\gamma_\psi(z_1)^{-1}$. En comparant les égalités (1) et (3), on voit alors que l'égalité $D_{G,H}(Y,Z) = \tilde{D}_{G,H}(Y,Z)$ résulte de l'égalité $D_{G_1,H_1}(Y_1,Z_1) = \tilde{D}_{G_1,H_1}(Y_1,Z_1)$. Cela démontre la proposition. □

5. Restriction des scalaires

5.1. On fixe pour tout le paragraphe 5 des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$, un extension finie F' de F, un groupe réductif connexe G'^* défini sur F' et quasi-déployé et l'on suppose que G^* est isomorphe à $\mathrm{Res}_{F'/F} G'^*$. On va construire des données $E' = (G', G'^*, \varphi', H', s', \xi') \in \mathcal{E}(F')$.

On note $\Gamma' = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F')$. Pour tout groupe X muni d'une action de Γ', on note IX l'ensemble des fonctions $a \colon \Gamma \to X$ telles que $a(\sigma'\sigma) = \sigma'(a(\sigma))$ pour tous $\sigma \in \Gamma, \sigma' \in \Gamma'$. Si $a_1, a_2 \in I(X)$, on définit $a_1 a_2$ par $(a_1 a_2)(\sigma) = a_1(\sigma) a_2(\sigma)$. Si $a \in I(X)$ et $\tau \in \Gamma$, on définit $\tau(a)$ par $(\tau(a))(\sigma) = a(\sigma\tau)$. Alors IX est un groupe muni d'une action de Γ. Pour $\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma$, on note X_γ le sous-groupe de IX formé des a tels que $a(\sigma) = 1$ si $\sigma \notin \gamma$. C'est un sous-groupe distingué de IX, X_γ commute à $X_{\gamma'}$ si $\gamma \neq \gamma'$ et $IX = \Pi_{\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma} X_\gamma$. Pour $a \in IX$, on écrira $a = \Pi_{\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma} a_\gamma$ conformément à cette décomposition. Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma$, on a $\sigma(X_\gamma) = X_{\gamma\sigma^{-1}}$. Le groupe X_γ est isomorphe à X, non canoniquement en général. Toutefois, pour $a \in TX$, posons $\delta(a) = a(1)$. Alors la restriction de δ à X_1 identifie canoniquement X_1 à X. Si $X = M'(\bar{F})$, où M' est un groupe algébrique linéaire défini sur F', chaque X_γ est le groupe des points sur $\bar{F}$ d'un tel groupe défini sur $\bar{F}$ et IX s'identifie à $M(\bar{F})$ où $M = \mathrm{Res}_{F'/F} M'$.

On identifie $G^*(\bar{F})$ à $IG'^*(\bar{F})$.

5.2. Pour tout $\gamma \in \Gamma' \backslash \Gamma, \varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_\gamma)$ est un sous-groupe algébrique distingué de $G(\bar{F})$. Soient $\sigma \in \Gamma$ et $u_\sigma \in G^*(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$. Alors $\sigma_G \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ (\mathrm{Ad}\, u_\sigma^{-1}) \circ \sigma_{G^*}$, donc

$$\sigma_G \circ \varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_\gamma) = \varphi^{-1} \circ (\mathrm{Ad}\, u_\sigma^{-1})(G'^*(\bar{F})_{\gamma\sigma^{-1}}).$$

Comme $G'^*(\bar{F})_{\gamma\sigma^{-1}}$ est distingué dans $G^*(\bar{F})$, on obtient

(1) $\sigma_G \circ \varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_\gamma) = \varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_{\gamma\sigma^{-1}})$.

En particulier, $\varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_1)$ est stable par Γ' et il existe un unique groupe algébrique linéaire G' défini sur F' tel que $\varphi^{-1}(G'^*(\bar{F})_1) = G'(\bar{F})$. D'après (1), $G(\bar{F})$ est le produit commutatif des groupes $\sigma_G(G'(\bar{F}))$ quand σ décrit un système de représentants de Γ/Γ'. On en déduit:

- G' est réductif connexe;
- $IG'(\bar{F})$ s'identifie à $G(\bar{F})$: à $a \in IG'(\bar{F})$, on associe $\prod \sigma_G^{-1} \circ a(\sigma)$, où σ parcourt un système représentants de $\Gamma' \backslash \Gamma$.

On définit $\varphi' \colon G'(\bar{F}) \to G'^*(\bar{F})$ par $\varphi' = \delta \circ \varphi$. On vérifie que φ' est une torseur intérieur.

5.3. Fixons une paire Γ'-stable $(\mathbb{B}', \mathbb{T}')$ de G'^*. Il existe une unique paire Γ-stable $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ de G^* telle que $\mathbb{B}(\bar{F}) = I\mathbb{B}'(\bar{F}), \mathbb{T}(\bar{F}) = I\mathbb{T}'(\bar{F})$. De la construction des L-groupes résulte alors une identification $I\hat{G}' = \hat{G}$.

Comme $\xi(\hat{H}) = Z_{\hat{G}}(\xi(s))^\circ$, on a $\xi(\hat{H}) = \Pi_{\gamma\in\Gamma'\backslash\Gamma} Z_{\hat{G}_\gamma}(\xi(s)_\gamma)^\circ$. Pour $\gamma \in \Gamma'\backslash\Gamma$, posons $\hat{H}'_\gamma = \xi^{-1}(Z_{\hat{G}_\gamma}(\xi(s)_\gamma)^\circ)$, et plus simplement $\hat{H}' = \hat{H}'_1$. Soient $\sigma \in \Gamma$ et $\hat{x}_\sigma \in \hat{G}$ tel que $\xi \circ \sigma_{\hat{H}} = (\mathrm{Ad}\,\hat{x}_\sigma) \circ \sigma_{\hat{G}} \circ \xi$. Soient $\gamma \in \Gamma'\backslash\Gamma$ et $y \in \hat{H}'_\gamma$. On a

(1) $\xi \circ \sigma_{\hat{H}}(y) = (\mathrm{Ad}\,(\hat{x}_\sigma)_{\gamma\sigma^{-1}}) \circ \delta_{\hat{G}} \circ \xi(y) \in \hat{G}'_{\gamma\sigma^{-1}}$,

car $\sigma_{\hat{G}} \circ \xi(y) \in \hat{G}'_{\gamma\sigma^{-1}}$. En particulier $\sigma_{\hat{H}}(y) \in \xi^{-1}(\hat{G}'_{\gamma\sigma^{-1}} \cap \xi(\hat{H})) = \hat{H}'_{\gamma\sigma^{-1}}$. D'où l'égalité $\sigma_{\hat{H}}(\hat{H}'_\gamma) = \hat{H}'_{\gamma\sigma^{-1}}$. On en déduit comme en 5.2 que $\hat{H}$ s'identifie à $I\hat{H}'$.

Fixons une paire Γ-stable $(\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de $\hat{H}$ et un scindage Γ-stable $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de $\hat{H}$ relatif à cette paire. Posons $\hat{\mathbb{B}}_{H'} = \hat{\mathbb{B}}_H \cap \hat{H}', \hat{\mathbb{T}}_{H'} = \hat{\mathbb{T}}_H \cap \hat{H}', \Delta' = \{\alpha \in \Delta; X_\alpha \in \hat{h}'\}$. Alors $(\hat{\mathbb{B}}_{H'}, \hat{\mathbb{T}}_{H'})$ est une paire Γ'-stable pour $\hat{H}'$ et $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta'}$ est un scindage Γ'-stable de $\hat{H}'$. Il en résulte l'existence d'un unique groupe réductif connexe H' défini sur F', quasi-déployé, tel que $\hat{H}'$ soit le groupe dual de H'. De plus, $H(\bar{F})$ s'identifie à $IH'(\bar{F})$.

Définissons $\xi' \colon \hat{H}' \to \hat{G}'$ par $\xi' = \delta \circ \xi$. Pour $\gamma = 1$ et $\sigma' \in \Gamma'$, la relation (1) implique

(2) $\xi' \circ \sigma'_{\hat{H}'} = (\mathrm{Ad}\,\delta(\hat{x}_{\sigma'})) \circ \sigma'_{\hat{G}'}$.

Posons $s' = \xi^{-1}(\xi(s)_1)$. C'est un élément de $Z(\hat{H}')$ et $\xi'(\hat{H}') = Z_{\hat{G}'}(\xi'(s'))^\circ$. Comme (H, s, ξ) sont des données endoscopiques, il existe $\hat{z} \in Z(\hat{G})$ tel que $\xi \circ \sigma_{\hat{H}}(s) = \xi(s)\sigma_{\hat{G}}(\hat{z})\hat{z}^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Fixons un tel $\hat{z}$. Alors $\delta(\hat{z}) \in Z(\hat{G}')$ et $\xi' \circ \delta'_{\hat{H}'}(s') = \xi'(s')\sigma'_{\hat{G}'} \circ \delta(\hat{z})\delta(\hat{z})^{-1}$ pour tout $\sigma' \in \Gamma'$. D'où

(3) l'image de s' dans $Z(\hat{H}')/\xi'^{-1}(Z(\hat{G}'))$ est fixe par Γ' et son image dans $H^1(\Gamma', Z(\hat{G}'))$ est nulle.

Il résulte de (2) et (3) que (H', s', ξ') sont des données endoscopiques pour G'^*. Donc $E' = (G', G'^*, \varphi', H', s', \xi') \in \mathcal{E}(F')$.

5.4. Les algèbres de Lie $h(\bar{F}), g^*(\bar{F}), g(\bar{F})$ s'identifient respectivement à $Ih'(\bar{F})$, $Ig'^*(\bar{F}), Ig'(\bar{F})$. Leurs ensembles de points rationnels $h(F), g^*(F), g(F)$ s'identifient respectivement à $h'(F'), g'^*(F'), g'(F')$ par l'application δ. Il est clair que $h_{\mathrm{reg}}(F), g^*_{\mathrm{reg}}(F), g_{\mathrm{reg}}(F)$ s'identifient respectivement à $h'_{\mathrm{reg}}(F'), g'^*_{\mathrm{reg}}(F')$, $g'_{\mathrm{reg}}(F')$. Fixons des paires Γ-, resp. Γ'-stables $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ de H, resp. $(\mathbb{B}_{H'}, \mathbb{T}_{H'})$ de H' de sorte que $\mathbb{B}_H(\bar{F}) = I\mathbb{B}_{H'}(\bar{F}), \mathbb{T}_H(\bar{F}) = I\mathbb{T}_{H'}(\bar{F})$. Notons $\eta \colon \mathbb{T}_H(\bar{F}) \to \mathbb{T}(\bar{F})$ et $\eta' : \mathbb{T}_{H'}(\bar{F}) \to \mathbb{T}'(\bar{F})$ les isomorphismes déduits de ξ et ξ'. Pour $y \in \mathbb{T}_{H'}(\bar{F})_1$, on a $\eta' \circ \delta(y) = \delta \circ \eta(y)$. On a

(1) soient $Y \in h_{\mathrm{reg}}(F), X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. Alors il existe un diagramme $D(Y, X; F)$ si et seulement s'il existe un diagramme $D(\delta(Y), \delta(X); F')$.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Remarquons que $G^*_{\rm sc}(\bar F)$ et $G_{\rm sc}(\bar F)$ s'identifient respectivement à $IG'^*_{\rm sc}(\bar F)$, $IG'_{\rm sc}(\bar F)$. Si $y \in H(\bar F), x^* \in G^*_{\rm sc}(\bar F), x \in G_{\rm sc}(\bar F)$ définissent un diagramme $D(Y,X;F)$, alors $\delta(y), \delta(x^*)$ et $\delta(x)$ définissent un diagramme $D(\delta(Y),\delta(X);F')$. Réciproquement, soient $y' \in H'(\bar F), x'^* \in G'^*_{\rm sc}(\bar F), x \in G'_{\rm sc}(\bar F)$ définissant un diagramme $D(\delta(Y),\delta(X);F')$. Fixons un système de représentants $\{\sigma_i; i = 1,\dots,n\}$ de $\Gamma'\backslash\Gamma$, tel que $\sigma_1 = 1$. On définit $y \in H(\bar F) = IH'(\bar F)$ par $y(\sigma'\sigma_i) = \sigma'(y')$ pour tous $\sigma' \in \Gamma', i \in \{1,\dots,n\}$. En utilisant l'égalité $T_Y(\bar F) = IT_{\delta(Y)}(\bar F)$, on vérifie que $yT_Y y^{-1} = \mathbb{T}_H$. Comme G^* est quasi-déployé, il existe $\underline{x}^* \in G^*_{\rm sc}(\bar F)$ tel que l'application $(\operatorname{Ad}\underline{x}^*)\circ\eta\circ(\operatorname{Ad} y) \colon T_Y \to G^*$ soit définie sur F. Fixons un tel $\underline{x}^*$, notons $\underline{X}^*$ l'image de Y par l'application précédente. Notons d'autre part $X'^* \in g'^*(F')$ l'image de $\delta(Y)$ par $(\operatorname{Ad} x'^*)\circ\eta'\circ(\operatorname{Ad} y')$. Alors $X'* = (\operatorname{Ad} u'^*)\circ\delta(\underline{X}^*)$, où $u'* = x'^*\delta(\underline{x}^*)^{-1}$. En particulier, $\delta(\underline{X}^*)$ est régulier, donc aussi $\underline{X}^*$ puisque $\underline{X}^* \in g^*(F)$. Comme $X'^*, \delta(\underline{X}^*) \in g'^*(F')$, on a $\sigma'(u'^*)^{-1}u'^* \in T_{\delta(\underline{X}^*)}(\bar F)$ pour tout $\sigma' \in \Gamma'$. Définissons $u^* \in G^*_{\rm sc}(\bar F)$ pour $u^*(\sigma'\sigma_i) = \sigma'(u'^*)$ par tous $\sigma' \in \Gamma', i \in \{1,\dots,n\}$. On vérifie que $\sigma(u^*)^{-1}u^* \in T_{\underline{X}^*}(\bar F)$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Posons $x^* = u^*\underline{x}^*$. Alors l'application $(\operatorname{Ad} x^*)\circ\eta\circ(\operatorname{Ad} y) \colon T_Y \to G^*$ est encore définie sur F. Maintenant, si l'on note X^* l'image de Y par cette application, on a $\delta(X^*) = X'^*$. Idem, il existe $\underline{x} \in G_{\rm sc}(\bar F)$ tel que $\varphi\circ(\operatorname{Ad}\underline{x}^{-1}) \colon T_X \to G^*$ soit définie sur F. En modifiant $\underline{x}$ comme ci-dessus, on le remplace par un x tel que $\varphi\circ(\operatorname{Ad} x^{-1})(X) = X^*$. Alors y, x^* et x définissent un diagramme $D(Y,X;F)$. □

On peut remplacer g par g^* dans l'assertion (1). Il en résulte que $Y \in h_{G^*-\rm reg}(F)$ si et seulement si $\delta(Y) \in h'_{G'^*-\rm reg}(F')$.

LEMME. *Il existe $c \neq 0$ tel que pour tous $Y \in h_{G^*-\rm reg}(F), X \in g_{\rm reg}(F)$, on ait*

$$\Delta_{G,H}(Y,X) = c\Delta_{G',H'}(\delta(Y),\delta(X)).$$

Soient T' un tore défini sur $F', T = \operatorname{Res}_{F'/F}T'$, de sorte que $T(\bar F) = IT'(\bar F)$. A un cocycle $\sigma \mapsto \tau(\sigma)$ de Γ dans $T(\bar F)$, associons le cocycle $\sigma' \mapsto \delta\circ\tau(\sigma')$ de Γ' dans $T'(\bar F)$. Par passage au quotient, cette application définit un isomorphisme $r\colon H^1(\Gamma, T(\bar F)) \to H^1(\Gamma', T'(\bar F))$. Introduisons les tores duaux $\hat T$ et $\hat T'$. Alors $\hat T = I\hat T'$ et l'application δ identifie $\hat T^\Gamma$ à $\hat T'^{\Gamma'}$. D'où un isomorphisme $\hat r\colon \pi_0(\hat T^\Gamma) \to \pi_0(\hat T'^{\Gamma'})$. On vérifie sur la définition des accouplements que pour $\tau \in H^1(\Gamma, T(\bar F))$ et $\kappa \in \pi_0(\hat T^\Gamma)$,

$$\langle r(\tau), \hat r(\kappa)\rangle = \langle \tau, \kappa\rangle.$$

Si T' est un sous-tore de G'^* ou H', l'ensemble des racines $\Sigma(T)$ de T dans g'^* ou h' se décompose de façon naturelle en union disjointe:

$$\Sigma(T) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma'\backslash\Gamma} \Sigma(T)_\gamma.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Pour $\sigma\in\Gamma$ et $\gamma\in\Gamma'\backslash\Gamma$, on a $\sigma(\Sigma(T)_\gamma)=\Sigma(T)_{\gamma\sigma^{-1}}$. L'ensemble $\Sigma(T)_1$ s'identifie par à $\Sigma(T')$. On en déduit une identification entre les orbites de Γ dans $\Sigma(T)$ et celles de Γ' dans $\Sigma(T')$. Une orbite de Γ dans $\Sigma(T)$ est symétrique si et seulement si l'orbite image de Γ' dans $\Sigma(T')$ l'est. Si $\alpha\in\Sigma(T)_1$ appartient à une orbite symétrique on a les égalités $F_\alpha=F'_{\delta(\alpha)}$, $F_{\pm\alpha}=F'_{\pm\delta(\alpha)}$. Si l'on choisit des a-données $(a_\alpha)_{\alpha\in\Sigma(T)}$ pour T, on choisira pour a-données pour T' la famille $(a_{\alpha'})_{\alpha'\in\Sigma(T')}$ telle que $a_\alpha=a_{\delta(\alpha)}$ pour $\alpha\in\Sigma(T)_1$.

Notons Δ, resp. Δ', l'ensemble des racines simples de $\mathbb{T}$, resp. $\mathbb{T}'$, relatif à $\mathbb{B}$, resp. $\mathbb{B}'$. On a encore

$$\Delta=\bigcup_{\gamma\in\Gamma'\backslash\Gamma}\Delta_\gamma,$$

et Δ_1 s'identifie à Δ'. Si l'on choisit un scindage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ de G^*, on choisira pour scindage de G'^* la famille $(X'_{\alpha'})_{\alpha'\in\Delta'}$ telle que $X'_{\delta(\alpha)}=\delta(X_\alpha)$ pour $\alpha\in\Delta_1$. Considérons les applications

$$n\colon W^{G^*_{\mathrm{sc}}}\to \mathrm{Norm}_{G^*_{\mathrm{sc}}(\bar F)}(\mathbb{T}),$$

$$n'\colon W^{G'^*_{\mathrm{sc}}}\to \mathrm{Norm}_{G'^*_{\mathrm{sc}}}(\bar F)(\mathbb{T}'),$$

relatives à ces scindages (cf. [LS1] 2.1). On a alors l'égalité $\delta\circ n=n'\circ\delta$. En utilisant toutes ces propriétés et les définitions 2.3, la vérification du lemme n'est plus qu'un simple calcul. □

5.5. PROPOSITION. *Supposons la Conjecture* 1.2 *vraie pour les données* $E'\in\mathcal{E}(F')$. *Alors elle l'est pour les données* $E\in\mathcal{E}(F)$.

On fixe un caractère $\psi: F\to\mathbb{C}^\times$ et une forme $\langle\ ,\ \rangle_{g'}$ sur $g'(F')$ vérifiant les conditions habituelles. On choisit pour caractère $\psi': F'\to\mathbb{C}^\times$ le caractère $\psi'=\psi\circ\mathrm{trace}_{F'/F}$ et pour forme $\langle\ ,\ \rangle_g$ sur $g(F)$ la forme $\mathrm{trace}_{F'/F}\circ\langle\ ,\ \rangle_{g'}\circ(\delta\times\delta)$. Alors $\gamma_\psi(g)=\gamma_{\psi'}(g')$ et, pour $X,Z\in g(F)$,

$$\hat\imath^G(X,Z)=\hat\imath^{G'}(\delta(X),\delta(Z))$$

pourvu que les mesures sur les tores soient choisies de façon cohérente. On a des relations analogues pour les groupes H et H'. Il résulte du Lemme 5.4 que pour $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $Z\in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a les égalités

$$D_{G,H}(Y,Z)=cD_{G',H'}(\delta(Y),\delta(Z)),\qquad \tilde D_{G,H}(Y,Z)=c\tilde D_{G',H'}(\delta(Y),\delta(Z)).$$

D'où la proposition. □

6. Réduction au cas elliptique

6.1. Pour tout le paragraphe 6, on fixe des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. On dit que E est alliptique si (H, s, ξ) l'est, i.e. si $\xi([Z(\hat{H})^\Gamma]^\circ) \subset Z(\hat{G})$ (cf. [K1] 7.3). Soit $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. On dit que Y est G^*-elliptique si Y est l'image d'un élément elliptique de $g^*_{\mathrm{reg}}(F)$.

LEMME. *Soit $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. Alors Y est G^*-elliptique si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) *E est elliptique;*
(ii) *Y est elliptique dans $h_{\mathrm{reg}}(F)$.*

Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$, resp. $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}}), (\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$, $(\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de G^*, resp. $\hat{G}, H, \hat{H}$. Fixons $X^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$ dont Y soit l'image et $y \in H(\bar{F}), x^* \in G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ définissant un diagramme $D(Y, X^*; F)$. Introduisons le tore complexe $\hat{T}_Y$ dual de T_Y et l'isomorphisme $\hat{i}_y : \hat{T}_Y \to \hat{\mathbb{T}}_H$ dual de Ad y. L'isomorphisme $\hat{i}_y^{-1}$ n'est pas invariant par Γ mais sa restriction à $Z(\hat{H})$ l'est. On a donc l'inclusion

(1) $[Z(\hat{H})^\Gamma]^\circ \subset \hat{i}_y((\hat{T}_Y^\Gamma)^\circ)$.

Je dis que

(2) Y est elliptique dans $h_{\mathrm{reg}}(F)$ si et seulement si l'inclusion (1) est une égalité.

En effet Y est elliptique dans $h_{\mathrm{reg}}(F)$ si et seulement si on a l'égalité

$$(X^*(H) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\Gamma = (X^*(T_Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\Gamma.$$

Identifions $X^*(T_Y)$ à $X_*(\hat{T}_Y)$. D'après [K1] 1.8.2, le sous-espace $X^*(H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ de $X^*(T_Y) \otimes_{\mathbb{Z}}$ s'identifie à l'image de $X_*(Z(\hat{H})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ dans $X_*(\hat{T}_Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ via le plongement $Z(\hat{H}) \to \hat{\mathbb{T}}_H$ et l'isomorphisme $\hat{i}_{y,*}^{-1}$, où $\hat{i}_{y,*}$ est déduit de $\hat{i}_y$ par fonctorialité. Ces identifications sont invariantes par Γ. Alors Y est elliptique dans $h_{\mathrm{reg}}(F)$ si et seulement si on a l'égalité

$$(X_*(Z(\hat{H})) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\Gamma = \hat{i}_{y,*}[(X_*(\hat{T}_Y) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^\Gamma].$$

Mais cette égalité est équivalente au fait que l'inclusion (1) soit une égalité. Cela démontre (2).

On a l'égalité

(3) $\xi \circ \hat{i}_y((\hat{T}_Y^\Gamma)^\circ) = \hat{i}_{x^*}^{-1}((\hat{T}_{X^*}^\Gamma)^\circ)$

et les inclusions

(4) $[Z(\hat{G})^\Gamma]^\circ \subset \xi([Z(\hat{H})^\Gamma]^\circ) \subset \xi \circ \hat{i}_y([\hat{T}_Y^\Gamma]^\circ)$.

La condition (i), resp. (ii), de l'énoncé est équivalente à dire que la première inclusion de (4), resp. la seconde, est une égalité. La réunion de (i) et (ii) est donc

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

équivalente à l'égalité des termes extrêmes de (4). D'après (3) et (2) appliqué à X^* dans $g^*_{\mathrm{reg}}(F)$, c'est aussi équivalent à l'ellipticité de X^* dans $g^*_{\mathrm{reg}}(F)$. $\square$

6.2. Fixons une paire Γ-stable $(\mathbb{B},\mathbb{T})$ de G^*, un sous-groupe parabolique $\mathbb{P}$ de G, défini sur F et minimal et un sous-groupe de Lévi $\mathbb{M}$ de $\mathbb{P}$, défini sur F. Fixons aussi un élément $x_0^* \in G^*(\bar{F})$ tel que, en posant $\varphi_0 = (\mathrm{Ad}\, x_0^*) \circ \varphi$ et $(\mathbb{P}^*,\mathbb{M}^*) = (\varphi_0(\mathbb{P}),\varphi_0(\mathbb{M}))$, le couple $(\mathbb{P}^*,\mathbb{M}^*)$ soit standard, i.e. $\mathbb{P}^* \supset \mathbb{B}$ et $\mathbb{M}^* \supset \mathbb{T}$.

Remarque. $\mathbb{M}^*$ et $\mathbb{P}^*$ sont définis sur F; pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $u_\sigma \in \mathbb{M}^*(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi_0) \circ \varphi_0^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$.

Pour $\sigma \in \Gamma$, il existe en tout cas $u_\sigma \in G^*(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi_0) \circ \varphi_0^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$. Alors $\sigma(\mathbb{M}^*) = u_\sigma \mathbb{M}^* u_\sigma^{-1}, \sigma(\mathbb{P}^*) = u_\sigma \mathbb{P}^* u_\sigma^{-1}$. Les couples $(\mathbb{P}^*,\mathbb{M}^*)$ et $(\sigma(\mathbb{P}^*),\sigma(\mathbb{M}^*))$ sont donc conjugués. Etant tous deux standards, ils sont égaux. Alors $u_\sigma \in \mathbb{M}^*(\bar{F})$. $\square$

6.3. Fixons une paire Γ-stable $(\hat{\mathbb{B}},\hat{\mathbb{T}})$ de $\hat{G}$. Posons $\hat{A} = \xi([Z(\hat{H})^\Gamma]^\circ)$. C'est un sous-tore de $\hat{G}$. Notons Σ l'ensemble de ses racines dans $\hat{g}, \hat{m}_1$ le centralisateur de $\hat{A}$ dans $\hat{g}$ et, pour tout $\alpha \in \Sigma, \hat{g}_\alpha$ le sous-espace de $\hat{g}$ propre pour l'action de $\hat{A}$ associé à α. Fixons $\mu \in X_*(\hat{A})$ tel que $\langle\alpha,\mu\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$. Posons $\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma; \langle\alpha,\mu\rangle > 0\}$,

$$\hat{p}_1 = \hat{m}_1 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Sigma^+} \hat{g}_\alpha\right).$$

Soient $\hat{M}_1$ et $\hat{P}_1$ les sous-groupes connexes de $\hat{G}$ d'algèbres de Lie $\hat{m}_1$ et $\hat{P}_1$. Fixons $\hat{x} \in \hat{G}$ tel que, en posant $\hat{P} = \hat{x}\hat{P}_1\hat{x}^{-1}, \hat{M} = \hat{x}\hat{M}_1\hat{x}^{-1}$, le couple $(\hat{P},\hat{M})$ soit standard. On a

(1) $\hat{M}$ et $\hat{P}$ sont stables par Γ.

Pour tout $\sigma \in \Gamma$, soit $\hat{x}_\sigma \in \hat{G}$ tel que $\sigma_{\hat{G}} \circ \xi \circ \sigma_{\hat{H}}^{-1} = (\mathrm{Ad}\, \hat{x}_\sigma) \circ \xi$. Par définition, $(Z(\hat{H})^\Gamma)^\circ$ est formé de points fixes pour $\sigma_{\hat{H}}$. Alors, pour tout $\hat{a} \in \hat{A}, \sigma_{\hat{G}}(\hat{a}) = \hat{x}_\sigma \hat{a} \hat{x}_\sigma^{-1}$. D'où $\sigma_{\hat{G}}(\hat{M}_1) = \hat{x}_\sigma \hat{M}_1 \hat{x}_\sigma^{-1}, \sigma_{\hat{G}}(\hat{P}_1) = \hat{x}_\sigma \hat{P}_1 \hat{x}_\sigma^{-1}$. Il en résulte que les couples $(\sigma_{\hat{G}}(\hat{P}),\sigma_{\hat{G}}(\hat{M}))$ et $(\hat{P},\hat{M})$ sont conjugués. Etant tous deux standards, ils sont égaux. $\square$

Notons M^* le sous-groupe de Lévi standard de G^* associé à $\hat{M}$. Il est défini sur F. L'application $(\mathrm{Ad}\, \hat{x}) \circ \xi$ est à valeurs dans $\hat{M}$. Notons-la ξ_M. On a

(2) (H, s, ξ_M) sont des données endoscopiques elliptiques pour M^*.

On vérifie aisément que

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(i) $\xi_M(\hat{M}) = Z_{\hat{M}}(\xi_M(s))^\circ$;

(ii) l'image de s dans $Z(\hat{H})/\xi_M^{-1}(Z(\hat{M}))$ est fixe par Γ et son image naturelle dans $H^1(\Gamma, Z(\hat{M}))$ est nulle.

On a

(iii) pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $\hat{y}_\sigma \in \hat{M}$ tel que $\sigma_{\hat{M}} \circ \xi_M \circ \sigma_{\hat{H}}^{-1} = (\mathrm{Ad}\,\hat{y}_\sigma) \circ \xi_M$.

On pose $\hat{y}_\sigma = \sigma_{\hat{G}}(\hat{x})\hat{x}_\sigma\hat{x}^{-1}$, où $\hat{x}_\sigma$ est défini dans la preuve de (1). On voit comme dans cette preuve que $\mathrm{Ad}\,\hat{y}_\sigma$ conserve le couple $(\hat{P}, \hat{M})$, donc $\hat{y}_\sigma \in \hat{M}$.

Cela montre que (H, s, ξ_M) sont des données endoscopiques pour M^*. Le fait qu'elles soient elliptiques, i.e. que $\xi_M([Z(\hat{H})^\Gamma]^\circ) \subset Z(\hat{M})$ est évident par construction. □

Nous dirons que M^* relève de G si $M^* \supset \mathbb{M}^*$. Dans ce cas, on pose $M = \varphi_0^{-1}(M^*)$ et on définit $\varphi_M : M \to M^*$ comme étant la restriction de φ_0 à M. Il résulte de la remarque 6.2 que M est défini sur F et que φ_M est un torseur intérieur. Alors les données $E_M(M, M^*, \varphi_M, H, s, \xi_M)$ appartiennent à $\mathcal{E}(F)$.

Nos constructions dépendent de choix de paires $(\mathbb{B}, \mathbb{T}), (\mathbb{P}, \mathbb{M}), (\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$ et d'éléments $x_0^*, \mu, \hat{x}$. Fixons d'autres choix $(\mathbb{B}', \mathbb{T}')$, etc..., $x_0^{\prime *}, \mu', \hat{x}'$, affectons d'un $'$ les objets définis à l'aide de ces nouveaux choix.

LEMME. *$M^{\prime *}$ relève de G si et seulement si M^* relève de G. Si c'est le cas, les données E'_M et E_M sont équivalentes.*

On peut faire varier les données séparément, dans la mesure du possible. Considérons d'abord le cas

(a) seuls les termes $(\mathbb{B}', \mathbb{T}'), (\mathbb{P}', \mathbb{M}), x_0^{\prime *}$ sont différents de $(\mathbb{B}, \mathbb{T}), (\mathbb{P}, \mathbb{M}), x_0^*$. Il existe $y^* \in G^*(F)$ et $y \in G(F)$ tels que

$$\mathbb{B}' = y^*\mathbb{B}y^{*-1}, \qquad \mathbb{T}' = y^*\mathbb{T}y^{*-1}, \qquad \mathbb{P}' = y\mathbb{P}y^{-1}, \qquad \mathbb{M}' = y\mathbb{M}y^{-1}.$$

Fixons de tels éléments. Par définition de la correspondance entre Lévi standards de G^* et $\hat{G}$, on a $M^{\prime *} = y^*M^*y^{*-1}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\prime *} &= x_0^{\prime *}\varphi(\mathbb{P}')x_0^{\prime *-1} = x_0^{\prime *}\varphi(y)\varphi(\mathbb{P})\varphi(y)^{-1}x_0^{\prime *-1} \\ &= x_0^{\prime *}\varphi(y)x_0^{*-1}\mathbb{P}^*x_0^*\varphi(y)^{-1}x_0^{\prime *-1}. \end{aligned}$$

Idem en remplaçant $\mathbb{P}$ etc.. par $\mathbb{M}$ etc... Les couples $(\mathbb{P}^{\prime *}, \mathbb{M}^{\prime *})$ et $(y^*\mathbb{P}^*y^{*-1}, y^*\mathbb{M}^* y^{*-1})$ sont donc conjugués. Etant tous deux standards pour $(\mathbb{B}', \mathbb{T}')$, il sont égaux. Donc $M^{\prime *}$ contient $\mathbb{M}^{\prime *}$ si et seulement si M^* contient $\mathbb{M}^*$. De plus

(3) $y^*x_0^*\varphi(y)^{-1}x_0^{\prime *-1} \in \mathbb{M}^{\prime *}(F)$,

$$M' = \varphi_0^{\prime -1}(M^{\prime *}) = \varphi^{-1}(x_0^{\prime *-1}M^{\prime *}x_0^{\prime *}) = \varphi^{-1}(\varphi(y)x_0^{*-1}y^{*-1}$$

$$M^{\prime *}y^*x_0^*\varphi(y)^{-1} = y\varphi_0^{-1}(M*)y^{-1} = yMy^{-1}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Les isomorphismes $\mathrm{Ad}\, y : M \to M', \mathrm{Ad}\, y^* : M^* \to M'^*$ et les identités de $H, \hat{H}, \hat{M}$ définissent une équivalence entre nos données (cf. 2.1): il suffit de vérifier qu'il existe $x^* \in M^*(\bar{F})$ tel que $\varphi'_{M'} \circ (\mathrm{Ad}\, y) = (\mathrm{Ad}\, y^* x^*) \circ \varphi_M$; on prend $x^* = y^{*-1} x_0'^* \varphi(y) x_0^{*-1}$ qui appartient bien à $M^*(\bar{F})$ d'après (3). D'où le lemme sous l'hypothèse (a).

Considérons maintenant le cas

(b) seuls les termes $(\hat{\mathbb{B}}', \hat{\mathbb{T}}')$ et $\hat{x}'$ sont différents de $(\hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{T}})$ et $\hat{x}$.

Il existe $\hat{y} \in \hat{G}$ tel que $\hat{\mathbb{B}}' = \hat{y}\hat{\mathbb{B}}\hat{y}^{-1}, \hat{\mathbb{T}}' = \hat{y}\hat{\mathbb{T}}\hat{y}^{-1}$. Fixons un tel $\hat{y}$. Les couples

$$(\hat{y}\hat{P}\hat{y}^{-1}, \hat{y}\hat{M}\hat{y}^{-1}) = (\hat{y}\hat{x}\hat{P}_1\hat{x}^{-1}\hat{y}^{-1}, \hat{y}\hat{x}\hat{M}_1\hat{x}^{-1}\hat{y}^{-1})$$

et

$$(\hat{P}', \hat{M}') = (\hat{x}'\hat{P}_1\hat{x}'^{-1}, \hat{x}'\hat{M}_1\hat{x}'^{-1})$$

sont conjugués et standards pour $(\hat{\mathbb{B}}', \hat{\mathbb{T}}')$. Ils sont donc égaux. De plus $\hat{x}\hat{x}'^{-1}\hat{y} \in \hat{M}$. Par définition de la correspondance entre Lévi standards de G^* et $\hat{G}$, on a $M = M'$. Alors l'isomorphisme $\mathrm{Ad}\, \hat{y} : \hat{M} \to \hat{M}'$ et les identités de $M, M^*, H, \hat{H}$ définissent une équivalence entre nos données: il suffit de vérifier qu'il existe $\hat{z} \in \hat{M}$ tel que $\xi'_M = (\mathrm{Ad}\, \hat{y}\hat{z}) \circ \xi_M$; on prend $\hat{z} = \hat{y}^{-1}\hat{x}'\hat{x}^{-1}$. D'où le lemme sous l'hypothèse (b).

Considérons maintenant le cas:

(c) seuls les termes μ' et $\hat{x}'$ différent de μ et $\hat{x}$.

On a $\hat{M}'_1 = \hat{M}_1$, donc $\hat{x}'\hat{x}^{-1}\hat{M}\hat{x}\hat{x}'^{-1} = \hat{M}'$. D'après le cas (b) déjà traité, on peut multiplier $\hat{x}'$ par un élément de $\hat{M}'$ de sorte que

$$\hat{x}'\hat{x}^{-1}\hat{\mathbb{T}}\hat{x}\hat{x}'^{-1} = \hat{\mathbb{T}}, \hat{x}'\hat{x}^{-1}(\hat{M} \cap \hat{\mathbb{B}})\hat{x}\hat{x}'^{-1} = \hat{M}' \cap \hat{\mathbb{B}}.$$

Alors $\hat{x}'\hat{x}^{-1}$ définit un élément $\hat{w}$ de $W^{\hat{G}}$. Je dis que

(4) $\hat{w} \in (W^{\hat{G}})^{\Gamma}$.

En reprenant la démonstration de (1), pour $\sigma \in \Gamma$, le terme $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x})\hat{x}_\sigma\hat{x}^{-1}$ conjugue les couples standards $(\hat{P}, \hat{M})$ et $(\sigma_{\hat{G}}(\hat{P}), \sigma_{\hat{G}}(\hat{M}))$. Comme on l'a dit en (1), ces couples sont donc égaux et maintenant $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x})\hat{x}_\sigma\hat{x}^{-1} \in \hat{M}$. Idem $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x}')\hat{x}_\sigma\hat{x}'^{-1} \in \hat{M}'$. Il en résulte que $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x}'\hat{x}^{-1}) \in \hat{x}'\hat{x}^{-1}\hat{M}$. Comme les deux termes $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x}'\hat{x}^{-1})$ et $\hat{x}'\hat{x}^{-1}$ envoient $\hat{M} \cap \hat{\mathbb{B}}$ sur $\hat{M}' \cap \hat{\mathbb{B}}$ et conservent $\hat{\mathbb{T}}$, on a en fait $\sigma_{\hat{G}}(\hat{x}'\hat{x}^{-1}) \in \hat{x}'\hat{x}^{-1}\hat{\mathbb{T}}$, d'où (4).

Les groupes $(W^{\hat{G}})^{\Gamma}$ et $W(G^*, \mathbb{T})$ sont en bijection naturelle. Soit $y^* \in \mathrm{Norm}_{G^*(F)}(\mathbb{T})$ dont l'image dans $W(G^*, \mathbb{T})$ corresponde à $\hat{w}$. Alors $M'^* = y^* M^* y^{*-1}$ et $y^*(M^* \cap \mathbb{B})y^{*-1} = M'^* \cap \mathbb{B}$. Supposons $M^* \supset \mathbb{M}^*$. En vertu de l'égalité précédente, $y^*\mathbb{M}^* y^{*-1}$ est encore un Lévi standard, défini sur F. Soit $\mathbb{P}'^*$ le sous-groupe parabolique de G^* de Lévi $\mathbb{M}^*$ tel que $y^*\mathbb{P}'^* y^{*-1}$ soit standard. Comme $y^* \in G^*(F)$ et $y^*\mathbb{P}'^* y^{*-1}$ est défini sur $F, \mathbb{P}'^*$ l'est aussi. Posons $\mathbb{P}' = \varphi_0^{-1}(\mathbb{P}'^*)$.

Il résulte de la Remarque 6.2 que $\mathbb{P}'$ est encore défini sur F. Alors $(\mathbb{P}, \mathbb{M})$ et $(\mathbb{P}', \mathbb{M})$ sont deux couples minimaux définis sur F. Il existe donc $y \in G(F)$ tel que $y\mathbb{M}y^{-1} = \mathbb{M}, y\mathbb{P}y^{-1} = \mathbb{P}'$. Fixons un tel y. Alors $y^*\varphi_0(y)$ conjugue le couple $(\mathbb{P}^*, \mathbb{M}^*)$ en $(y^*\mathbb{P}'^*y^{*-1}, y^*\mathbb{M}^*y^{*-1})$. Comme ce sont des couples standards, ils sont égaux et $y^*\varphi_0(y) \in \mathbb{M}^*(\bar{F})$. De l'égalité $\mathbb{M}^* = y^*\mathbb{M}^*y^{*-1}$ résulte que $M'* \supset \mathbb{M}^*$. En inversant les rôles de M^* et M'^*, on obtient la première assertion du lemme. On a $M' = \varphi_0^{-1}(M'^*) = \varphi_0^{-1}(y^*)M\varphi_0(y^*) = y^{-1}My$. Alors les isomorphismes $\mathrm{Ad}\, y^{-1} : M \to M'$, $\mathrm{Ad}\, y^* : M^* \to M'^*$, $\mathrm{Ad}\, \hat{x}'\hat{x}^{-1} : \hat{M} \to \hat{M}'$ et les identités de H et $\hat{H}$ définissent une équivalence entre nos données: il suffit de vérifier qu'il existe $x^* \in M^*(\bar{F})$ tel que $\varphi'_{M'} \circ (\mathrm{Ad}\, y^{-1}) = (\mathrm{Ad}\, y^*x^*) \circ \varphi_M$ et $\hat{z} \in \hat{M}$ tel que $(\mathrm{Ad}\, \hat{x}') \circ \xi = (\mathrm{Ad}\, \hat{x}'\hat{x}^{-1}\hat{z}\hat{x}) \circ \xi$; on prend $\hat{z} = 1$ et $x^* = y^{*-1}\varphi_0(y)^{-1}$.

Cela achève la preuve du lemme. □

Remarques. (5) Quand M^* ne relève pas de G, les données (M'^*, H, s, ξ'_M) et (M^*, H, s, ξ_M) sont équivalentes en un sens évident.

(6) On démontrerait de façon analogue qu'en remplaçant $(G, G^*, \varphi, H, s, \xi)$ par des données équivalentes $(G', G'^*, \varphi', H', s', \xi')$, les données obtenues $(M', M'^*, \varphi'_{M'}, H', s', \xi'_{M'})$ sont équivalentes à $(M, M^*, \varphi_M, H, s, \xi_M)$ (en supposant par exemple que M^* relève de G).

(7) On dira que E est consistante si M^* relève de G. C'est loisible d'après la première assertion du lemme.

6.4. On a défini en 6.2 et 6.3 des objets $M^*, \xi_M, x_0^*, \hat{x}$ et éventuellement M et φ_M. Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ de H et $(\hat{\mathbb{B}}_H, \hat{\mathbb{T}}_H)$ de $\hat{H}$. Supposons que $\xi(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}, \xi(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}}$. Quitte à multiplier $\hat{x}$ par un élément de $\hat{M}$, on peut supposer $\xi_M(\hat{\mathbb{T}}_H) = \hat{\mathbb{T}}, \xi_M(\hat{\mathbb{B}}_H) \subset \hat{\mathbb{B}} \cap \hat{M}$. Alors $\hat{x}$ définit un élément de $W^{\hat{G}}$. Notons w l'élément de W^{G^*} qui correspond à son inverse. Alors, si l'on note $\eta_M : \mathbb{T}_H \to \mathbb{T}$ l'isomorphisme déduit de ξ_M, on a $\eta = w \circ \eta_M$. Nous noterons désormais w un élément de $\mathrm{Norm}_{G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})}(\mathbb{T})$ qui se projette sur le w précédent et x_0^* un élément de $G^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ qui se projette sur le x_0^* précédent. Nous aurons à considérer des diagrammes relatifs aux données E et d'autres relatifs à E_M, dans le cas, par exemple, où E est consistante. Pour plus de précision, on affectera d'un indice M les seconds. On pose $m^*_{G^*-\mathrm{reg}} = m^* \cap g^*_{\mathrm{reg}}, m_{G-\mathrm{reg}} = m \cap g_{\mathrm{reg}}$.

Supposons que E soit consistante, soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X \in m_{G-\mathrm{reg}}(F)$ et $y \in H(\bar{F}), x^* \in M^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F}), x \in M_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ définissant un diagramme $D_M(Y, X; F)$. Remarquons que M^*_{sc} et M_{sc} s'identifient à des sous-groupes de G^*_{sc} et G_{sc}. Les données $y \in H(\bar{F}), x^*w \in G^*_{\mathrm{sc}}(F)$ et $x\varphi^{-1}(x_0^{*-1}) \in G_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ définissent alors un diagramme $D(Y, X; F)$. Inversement, on a:

LEMME. *Soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, supposons qu'il existe un diagramme $D(Y, X; F)$. Alors*

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(i) *E est consistante*;

(ii) *il existe $Z \in m_{G-\text{reg}}(F)$, conjugué à X par un élément de $G(F)$, tel qu'il existe un diagramme $D_M(Y, Z; F)$. La classe de conjugaison par $M(F)$ de Z est uniquement déterminée.*

Soient $y \in H(\bar{F}), x^* \in G^*_{\text{sc}}(\bar{F}), x \in G_{\text{sc}}(\bar{F})$ définissant un diagramme $D(Y, X; F)$. On sait qu'il existe $Z^* \in m^*_{\text{reg}}(F)$ tel qu'il existe un diagramme $D_M(Y, Z^*; F)$. Fixons un tel Z^* et $y_1 \in H(\bar{F})$ et $x^*_1 \in M^*_{\text{sc}}(\bar{F})$ définissant un tel diagramme. Les applications

(1) $(\operatorname{Ad} x) \circ \varphi^{-1} \circ (\operatorname{Ad} x^*) \circ \eta \circ (\operatorname{Ad} y) \colon T_Y \to T_X$,

(2) $(\operatorname{Ad} x^*_1) \circ \eta_M \circ (\operatorname{Ad} y_1) \colon T_Y \to T_{Z^*}$,

sont définies sur F. Comme y et y_1 conjuguent tous deux T_Y en $\mathbb{T}_H$, il existe $w_0 \in w^H$ tel que $y = w_0 y_1$. Il existe $w_1 \in W^{G^*}$ tel que $w_1 \circ \eta = \eta \circ w_0$. Notons plutôt w_1 un représentant dans $\operatorname{Norm}_{G^*_{\text{reg}}}(\bar{F})(\mathbb{T})$ du w_1 précédent. En composant l'inverse de l'application (2) avec l'application (1), on obtient que

$$\varphi^{-1} \circ (\operatorname{Ad} z^*) \colon T_{Z^*} \to T_X$$

est définie sur F, où

$$z^* = \varphi(x) x^* w_1 w x^{*-1}_1.$$

Pour $\sigma \in \Gamma$, soit $u_\sigma \in G^*_{\text{sc}}(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ad} u_\sigma$. La propriété précédente implique que $z^{*-1} u^{-1}_\sigma \sigma_{G^*}(z^*) \in T_{Z^*,\text{sc}}(\bar{F})$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Posons alors

$$P_1 = \varphi^{-1}(z^* P^* z^{*-1}), \qquad M_1 = \varphi^{-1}(z^* M^* z^{*-1}).$$

La relation ci-dessus et le fait que $T_{Z^*} \subset M^*$ impliquent que P_1 et M_1 sont définis sur F. Fixons $z \in G_{\text{sc}}(F)$ tel que, en posant

$$P = z P_1 z^{-1}, \qquad M = z M_1 z^{-1},$$

le couple (P, M) soit standard. Alors les couples

$$(P^*, M^*) = (z^{*-1} \varphi(z^{-1}) \varphi(P) \varphi(z) z^*, z^{*-1} \varphi(z^{-1}) \varphi(M) \varphi(z) z^*)$$

et

$$(x^*_0 \varphi(P) x^{*-1}_0, x^*_0 \varphi(M) x^{*-1}_0)$$

sont conjugués et ils sont tous deux standards. Ils sont donc égaux. Alors $M^* = x^*_0 \varphi(M) x^{*-1}_0 \supset x^*_0 \varphi(\mathbb{M}) x^{*-1}_0 = \mathbb{M}^*$, et M^* relève de G. Le groupe que l'on a noté M est bien le groupe défini en 6.2. Posons

$$x_1 = z \varphi^{-1}(z^* x^*_0).$$

Le fait que les deux couples ci-dessus sont égaux implique que $x_1 \in M_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$. Posons $Z = (\mathrm{Ad}\, z)(X)$. Alors $Z \in m_{G-\mathrm{reg}}(F)$. On vérifie que l'application

$$(\mathrm{Ad}\, x_1) \circ \varphi_M^{-1} \colon T_{Z^*} \to T_Z$$

n'est autre que $(\mathrm{Ad}\, z) \circ \varphi^{-1} \circ (\mathrm{Ad}\, z^*)$. Elle est donc définie sur F, i.e. les données y_1, x_1^* et x_1 définissent un diagramme $D_M(Y, Z; F)$. Cela démontre la première partie de (ii).

Considérons l'ensemble des $Z \in m_{\mathrm{reg}}(F)$ tels que
(3) Z est conjugué à X par un élément de $G(F)$;
(4) il existe un diagramme $D_M(Y, Z; F)$.
Soient Z_1, Z_2 dans cet ensemble. D'après (4), il existe $y \in M(\bar{F})$ tel que $Z_1 = (\mathrm{Ad}\, y)(Z_2)$. D'après (3), il existe $x \in G(F)$ tel que $Z_1 = (\mathrm{Ad}\, x)(Z_2)$. Fixons de tels x, y. Alors la conjugaison par xy^{-1} fixe Z_1 donc $xy^{-1} \in T_{Z_1}(\bar{F}) \subset M(\bar{F})$, d'où $x \in M(\bar{F}) \cap G(F) = M(F)$. Cela achève la preuve du lemme. □

Remarque. Si E est consistante, il existe $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$ tels que Y soit une image de X. Il suffit de prendre Y elliptique dans $h(F)$: il est alors M^*-elliptique (pour les données E_M) d'après le lemme 6.1 et tout tore elliptique de M^* se transfère à M ainsi qu'il résulte de [K2] 10.2. la réciproque est vraie d'après le lemme ci-dessus. Les définitions données en 1.4 et en 6.3 des données consistantes sont donc équivalentes.

6.5. LEMME. *Supposons E consistante. Alors il existe $c \neq 0$ tel que pour tous $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), Z \in m_{G-\mathrm{reg}}(F)$ tels qu'il existe un diagramme $D_M(Y, Z; F)$, on ait l'égalité*

$$\Delta_{G,H}(Y, Z) = c\Delta_{M,H}(Y, Z).$$

Fixons deux couples $(Y, Z), (\bar{Y}, \bar{Z})$ avec $Y, \bar{Y} \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), Z, \bar{Z} \in m_{G-\mathrm{reg}}(F)$. Supposons données $y \in H(\bar{F}), x^* \in M^*_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ et $x \in M_{\mathrm{sc}}(\bar{F})$ définissant un diagramme $D_M(Y, Z; F)$ et de même $\bar{y}, \bar{x}^*, \bar{x}$ définissant un diagramme $D_M(\bar{Y}, \bar{Z}; F)$. On a déjà dit que les données $y, x^*w, x\varphi^{-1}(x_0^{*-1})$ définissaient un diagramme $D(Y, Z; F)$. Idem, $\bar{y}$ etc... Remarquons que l'on a une injection $M^*_{\mathrm{sc}} \to G^*_{\mathrm{sc}}$. Si l'on note $T_{Z^*, G^*_{\mathrm{sc}}}$ et $T_{Z^*, M^*_{\mathrm{sc}}}$ les images réciproques de T_{Z^*} dans G^*_{sc} et M^*_{sc} (où Z^* est défini en 2.2), on a une injection

(1) $T_{Z^*, M^*_{\mathrm{sc}}} \to T_{Z^*, G^*_{\mathrm{sc}}}$.

On fixe un scindage de G^*, attaché à $\mathbb{B}$, et des a-données pour les ensembles de racines de T_{Z^*} et $T_{\bar{Z}^*}$ dans g^*. Ils définissent naturellement un scindage de M^* et des a-données pour les ensembles de racines de T_{Z^*} et $T_{\bar{Z}^*}$ dans m^*. Calculons les facteurs de transfert à l'aide de ces données. Pour alléger les notations, on affectera simplement d'un $'$ les objets relatifs aux donnés E_M. Dualement à l'injection (1), on a une surjection $\hat{T}_{Z^*}/Z(\hat{G}) \to \hat{T}_{Z^*}/Z(\hat{M})$, d'où une application

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(2) $K(T_{Z^*}/F) \to K'(T_{Z^*}/F)$.

Celle-ci est surjective. En effet $K(T_{Z^*}/F)$ n'est autre que l'image de $\hat{T}^{\Gamma}_{Z^*} Z(\hat{G})/Z(\hat{G})$ dans $\pi_0([\hat{T}_{Z^*}/Z(\hat{G})]^{\Gamma})$. Idem pour $K'(T_{Z^*}/F)$. Il suffit alors d'utiliser le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\hat{T}^{\Gamma}_{Z^*} Z(\hat{G})/Z(\hat{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{T}^{\Gamma}_{Z^*} Z(\hat{M})/Z(\hat{M}) \arrow[d] \\
\pi_0([\hat{T}_{Z^*}/Z(\hat{G})]^{\Gamma}) \arrow[r] & \pi_0([\hat{T}_{Z^*}/Z(\hat{M})]^{\Gamma})
\end{tikzcd}$$

et la surjectivité de la flèche du haut. Si l'on note, comme en 2.2, $\hat{i}_{x^*}$ l'isomorphisme $\hat{\mathbb{T}} \to \hat{T}_{Z^*}$ dual de $\mathrm{Ad}\, x^*$, il est clair que $\hat{i}_{x^*} \circ \xi_M = \hat{i}_{x^* w} \circ \xi$, donc κ'_Y est l'image de κ_Y par la flèche (2). Pour calculer le cocycle τ de 2.3, on doit utiliser, selon 2.2, l'élément $x^* w^{-1}$ qui conjugue $\mathbb{T}$ en T_{Z^*}. Mais d'après [LS1] 2.3.3, on peut aussi bien utiliser l'élément x^*. Il est clair que pour tout $\sigma \in \Gamma, x^* n_\sigma \sigma(x^{*-1})$ est l'image par l'injection (1) du terme analogue $x^* n'_\sigma \sigma(x^{*-1})$. D'autre part, si $\alpha \in \Sigma(T_{Z^*})$ vérifie $\alpha > 0$ et $\sigma^{-1}(\alpha) < 0$ pour $x^* \mathbb{B} x^{*-1}, \alpha$ est forcément une racine dans m^*. En effet, notons P^* le parabolique standard de G^* de Lévi M^* et u^* l'algèbre de Lie de son radical unipotent. Alors u^* est stable par Γ et les racines qui y interviennent sont toutes positives. Elles ne sont donc pas inversées par σ^{-1}. Idem pour leurs opposées. Une racine inversée est donc nécessairement dans m^*. Mais alors il est clair que a_σ est l'image de a'_σ par la flèche (1). Finalement τ est l'image de τ' par (1). Les flèches (1) et (2) étant duales, on obtient l'égalité

$$\Delta_{\mathrm{I}}(Y, Z) = \Delta'_{\mathrm{I}}(Y, Z).$$

Pour la même raison que ci-dessus, une racine $\alpha \in \Sigma(T_{Z^*})$ ne peut être symétrique que si elle intervient dans m^*. On voit alors que

$$\sum_{\text{hors } H}^{\text{sym}} (T_{Z^*}) = \sum_{\text{hors } H}^{\text{sym}} (T_{Z^*})',$$

d'où

$$\Delta_{\mathrm{II}}(Y, Z) = \Delta'_{\mathrm{II}}(Y, Z).$$

L'égalité des facteurs Δ_{III} est plus délicate. Introduisons les groupes U et $\hat{U}$ de 2.2 et les groupes analogues U' et $\hat{U}'$ relatifs aux données E_M. Notons N^*, resp. $\hat{N}$, l'image réciproque de M^* dans G^*_{sc}, resp. $\hat{M}$ dans $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$. Les groupes dérivés de N^*, resp. $\hat{N}$, s'identifient à M^*_{sc}, resp. $\hat{M}_{\mathrm{sc}}$. Comme $\hat{\mathbb{T}} \subset \hat{M}$, on a une identification

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(3) $\hat{\mathbb{T}}_{\hat{G}_{\rm sc}} = [\hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \times Z(\hat{N})^\circ]/\{(z, z^{-1}); z \in \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ\}$.

Il en est de même pour les tores $\hat{T}_{Z^*}$ et $\hat{T}_{\bar{Z}^*}$. De plus, comme tous ces tores sont conjugués dans $\hat{M}$, on a

$$\hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ = \hat{T}_{Z^*, \hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ = \hat{T}_{\bar{Z}^*, \hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ.$$

On a

(4) les tores $Z(N^*)^\circ / Z(N^*)^\circ \cap Z(G^*_{\rm sc})$ et $Z(\hat{N})^\circ / \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ$ sont duaux.

En effet, notons Δ l'ensemble des racines simples de $\mathbb{T}$ associé à $\mathbb{B}, \Pi$ la base de $X_*(\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ duale de Δ, Δ^M l'ensemble des racines dans M et Π^M le sous-ensemble de Π correspondant. Le tore $Z(N^*)^\circ / Z(N^*)^\circ \cap Z(G^*_{\rm sc})$ s'identifie au centre connexe $Z(M^*/Z(G^*))^\circ$ de l'image de M^* dans le groupe adjoint de G^*. Son groupe de caractères a donc pour base $\Pi - \Pi^M$. Le tore $Z(\hat{N})^\circ / \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ$ est égal à $\hat{\mathbb{T}}_{\hat{G}_{\rm sc}} / \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}}$. Son groupe des caractères a pour base $\Delta - \Delta^M$. D'où (4).

Notons aussi:

(5) $Z(M^*_{\rm sc}) = \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(N^*)^\circ Z(G^*_{\rm sc})$.

L'inclusion du membre de droite dans $Z(M^*_{\rm sc})$ est claire. Pour l'inclusion opposée, il s'agit de montrer que $Z(M^*_{\rm sc}) \subset Z(N^*)^\circ Z(G^*_{\rm sc})$. L'image dans le groupe adjoint de G^* de $Z(M^*_{\rm sc})$ est incluse dans $Z(M^*/Z(G^*))$. Or ce centre est connexe, comme l'est le centre de tout Lévi d'un groupe adjoint. Comme on l'a dit plus haut, ce centre est l'image de $Z(N^*)^\circ$. D,où l'inclusion cherchée.

Cela étant, on définit des applications

$$\delta_1 \colon Z(N^*)^\circ / Z(N^*)^\circ \cap Z(G^*_{\rm sc}) \to U$$

$$\hat{\delta}_1 \colon \hat{U} \to Z(\hat{N})^\circ / \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N}).$$

L'application δ_1 est l'injection antidiagonale. Soient $(\hat{t}, \hat{\bar{t}}) \in \hat{T}_{Z^*, \hat{G}_{\rm sc}} \times \hat{T}_{\bar{Z}^*, \hat{G}_{\rm sc}}$ et $\hat{u}$ l'image de $(\hat{t}, \hat{\bar{t}})$ dans $\hat{U}$. Notons $\mu(\hat{t})$ et $\mu(\hat{\bar{t}})$ les images de $\hat{t}$ et $\hat{\bar{t}}$ dans $Z(\hat{N})^\circ / \hat{\mathbb{T}}_{\hat{M}_{\rm sc}} \cap Z(\hat{N})^\circ$ via les analogues de la flèche (3). On pose $\hat{\delta}_1(\hat{u}) = \mu(\hat{t})\mu(\hat{\bar{t}})^{-1}$.

Les applications δ_1 et $\hat{\delta}_1$ sont duales. Notons U'' le conoyau de δ_1 et $\hat{U}''$ le noyau de $\hat{\delta}_1$ qui sont donc en dualité. On définit des applications

$$\delta_2 \colon U' \to U'', \qquad \hat{\delta}_2 \colon \hat{U}'' \to \hat{U}'.$$

Notons que

$$U'' = (T_{Z^*, G^*_{\rm sc}} \times T_{\bar{Z}^*, G^*_{\rm sc}}) / \{(z^{-1}, z); z \in Z(N^*)^\circ Z(G^*_{\rm sc})\}.$$

Compte tenu de (5), la définition de δ_2 est naturelle. Pour $\hat{\delta}_2$, soient $(\hat{t}, \hat{\bar{t}}) \in \hat{T}_{Z^*, \hat{G}_{\rm sc}} \times \hat{T}_{\bar{Z}^*, \hat{G}_{\rm sc}}$ dont l'image dans $\hat{U}$ appartienne à $\hat{U}''$. On peut trouver $z \in$

$Z(\hat{N})^\circ, \hat{t}_1 \in \hat{T}_{Z^*,\hat{M}_{\rm sc}}$ et $\hat{\bar{t}}_1 \in \hat{T}_{\bar{Z}^*,\hat{M}_{\rm sc}}$ tels que $\hat{t}$, resp. $\hat{\bar{t}}$, s'identifie à l'image de $(\hat{t}_1, z)$, resp. $(\hat{\bar{t}}_1, z)$, via l'isomorphisme analogue de (3). Alors $(\hat{t}_1, \hat{\bar{t}}_1)$ a une image naturelle dans $\hat{U}'$ qui ne dépend pas des choix et ne dépend que de l'image $\hat{u}''$ de $(\hat{t}, \hat{\bar{t}})$ dans $\hat{U}''$. On définit $\hat{\delta}_2(\hat{u}'')$ comme étant cette image de $(\hat{t}_1, \hat{\bar{t}}_1)$ dans $\hat{U}'$. Les applications δ_2 et $\hat{\delta}_2$ sont duales.

On déduit de ces applications des applications

$$\begin{tikzcd} \pi_0(\hat{U}''^\Gamma) \arrow[r, "\hat{\gamma}_1"] \arrow[d, "\hat{\gamma}_2"] & \pi_0(\hat{U}^\Gamma) \\ \pi_0(\hat{U}'^\Gamma) & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} H^1(\Gamma, U(\bar{F})) \arrow[r, "\gamma_1"] & H^1(\Gamma, U''(\bar{F})) \\ & H^1(\Gamma, U'(\bar{F})). \arrow[u, "\gamma_2"] \end{tikzcd}$$

Les applications $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ sont transposées de γ_1 et γ_2.

Avec les notations de 2.3, on a

(6) il existe $s_{U''} \in \pi_0(\hat{U}''^\Gamma)$ tel que $\hat{\gamma}_1(s_{U''}) = s_U, \quad \hat{\gamma}_2(s_{U''}) = s_{U'}$.

En effet, soit $\tilde{s} \in \hat{T}_{\hat{G}_{\rm sc}}$ ayant même image que $\xi(s)$ dans $\hat{T}/Z(\hat{G})$. Soient $\tilde{s}_1 \in \hat{T}_{\hat{M}_{\rm sc}}$ et $z \in Z(\hat{N})^\circ$ tels que $\tilde{s}$ s'identifie à l'image de $(\tilde{s}_1, z)$ via l'isomorphisme (3). Notons $\hat{x}$ un relèvement dans $\hat{G}_{\rm sc}$ du $\hat{x}$ que l'on a fixé au début du paragraphe 6.4. Alors $\tilde{s}' = \hat{x}\tilde{s}_1\hat{x}^{-1}$ est un relèvement dans $\hat{\Gamma}_{\hat{M}_{\rm sc}}$ de l'image de $\xi_M(s)$ dans $\hat{\Gamma}/Z(\hat{M})$. On en déduit que $\hat{i}_{x^*}(\tilde{s})$, resp. $\hat{i}_{\bar{x}^*}(\tilde{s})$, est l'image, via l'isomorphisme analogue à (3), de $(\hat{i}'_{x^*w}(\check{s}'), z)$, resp. $(\hat{i}'_{\bar{x}^*w}(\tilde{s}'), z)$. Donc le couple $(\hat{i}_{x^*}(\tilde{s}), \hat{i}_{\bar{x}^*}(\tilde{s}))$ appartient à $\hat{U}''$ et son image par $\hat{\delta}_2$ est $(\hat{\imath}'_{x^*w}(\tilde{s}'), \hat{\imath}'_{x^*w}(\tilde{s}'))$. Comme l'image par l'injection $\hat{U}'' \to \hat{U}$ de $(\hat{i}_{x^*}(\tilde{s}), \hat{i}_{\bar{x}^*}(\tilde{s}))$ est invariante par Γ, le couple lui-même appartient à $\hat{U}''^\Gamma$. Son image dans $\pi_0(\hat{U}''^\Gamma)$ répond à la question.

On a aussi:

(7) $\gamma_1(\mathrm{inv}(Y, Z; \bar{Y}, \bar{Z})) = \gamma_2(\mathrm{inv}'(Y, Z; \bar{Y}, \bar{Z}))$.

Pour $\sigma \in \Gamma$, soit $u'_\sigma \in M^*_{\rm sc}(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi_0) \circ \varphi_0^{-1} = \mathrm{Ad}\, u'_\sigma$. Posons $u_\sigma = \sigma(x_0^{*-1}) u'_\sigma x_0^*$. Comme $\varphi_0 = (\mathrm{Ad}\, x_0^*) \circ \varphi$, on a $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Ad}\, u_\sigma$. Posons pour simplifier $x_1 = x\varphi^{-1}(x_0^{*-1})$, $\bar{x}_1 = \bar{x}\varphi^{-1}(x_0^{*-1})$. Par définition, $\mathrm{inv}(Y, Z; \bar{Y}, \bar{Z})$, resp. $\mathrm{inv}'(Y, Z; \bar{Y}, \bar{Z})$, est la classe du cocycle

$$\sigma \mapsto \text{image dans } U(\bar{F}) \text{ de } (u_\sigma \varphi(\sigma(x_1^{-1})x_1), \varphi(\bar{x}_1^{-1}\sigma(\bar{x}_1))u_\sigma^{-1}),$$

resp. $\sigma \mapsto$ image dans $U'(\bar{F})$ de $(u'_\sigma \varphi_0(\sigma(x^{-1})x), \varphi_0(\bar{x}^{-1}\sigma(\bar{x}))u'^{-1}_\sigma)$.

Mais on vérifie que

$$u_\sigma \varphi(\sigma(x_1^{-1})x_1) = u'_\sigma \varphi_0(\sigma(x^{-1})x), \qquad \varphi(\bar{x}_1^{-1}\sigma(\bar{x}_1))u_\sigma^{-1} = \varphi_0(\bar{x}^{-1}\sigma(\bar{x}))u'^{-1}_\sigma.$$

D'où (7).

Il résulte de (6) et (7) que

$$\langle \mathrm{inv}(Y,Z;\bar{Y},\bar{Z}),s_U\rangle = \langle \gamma_1(\mathrm{inv}(Y,Z;\bar{Y},\bar{Z})),s_{U''}\rangle = \langle \mathrm{inv}'(Y,Z;\bar{Y},\bar{Z}),s_{U'}\rangle,$$

i.e.

$$\Delta_{\mathrm{III}}(Y,Z;\bar{Y},\bar{Z}) = \Delta'_{\mathrm{III}}(Y,Z;\bar{Y},\bar{Z}).$$

Cela achève la preuve du lemme. □

6.6. Supposons E consistante. Fixons une forme $\langle\ ,\ \rangle_g$ sur $g(F)$ et un caractère ψ vérifiant les conditions habituelles. Fixons aussi des mesures sur $T(F)$ si $T\in\mathcal{T}^G$ ou $T\in\mathcal{T}^H$ vérifiant les conditions de 2.5. La restriction de $\langle\ ,\ \rangle_g$ à $m(F)$ est non dégénérée. On choisit pour forme bilinéaire sur $m(F)$ cette restriction, que l'on note $\langle\ ,\ \rangle_m$. Si $T\in\mathcal{T}^M$, alors $T\in\mathcal{T}^G$ et $T(F)$ est muni d'une mesure. On définit la fonction $\hat{i}^M$ relative à ces choix.

LEMME. *Soient $X\in m_{G-\mathrm{reg}}(F), Z\in g_{\mathrm{reg}}(F)$. Alors on a l'égalité*

$$\hat{i}^G(X,Z) = \sum_{Z'}\hat{i}^M(X,Z')$$

où Z' parcourt l'ensemble des éléments de $m(F)$ conjugués à Z par un élément de $G(F)$, modulo conjugaison par $M(F)$.

Choisissons un sous-groupe parabolique P de G, défini sur F, de Lévi M et un sous-groupe compact maximal K de $G(F)$ tel que $G(F)=P(F)K$. Notons U le radical unipotent de P. On choisit des mesures sur $G(F), M(F), U(F)$ et K de sorte que pour toute $f\in C_c^\infty(G(F))$, on ait l'égalité

$$\int_{G(F)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{M(F)\times U(F)\times K} f(ynk)\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}n\,\mathrm{d}y.$$

On munit $u(F)$ de la mesure telle que dans un voisinage assez petit ω de 0 dans $u(F)$, l'exponentielle de ω dans $U(F)$ préserve les mesures.

Pour $f\in C_c^\infty(g(F))$, définissons $f^P\in C_c^\infty(m(F))$ par

$$f^P(Y) = \int_{K\times u(F)} f((\mathrm{Ad}\,k)(Y+N))\,\mathrm{d}N\,\mathrm{d}k$$

pour tout $Y\in m(F)$. On vérifie les propriétés:

- pour tout $Y\in m(F)\cap g_{\mathrm{reg}}(F), J(Y,f)=J(Y,f^P)$;
- $(\hat{f})^P = (f^P)\hat{}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Pour $Z \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ et $T \in \mathcal{T}^M$, posons

$$A_T(Z) = \{x \in T_Z(F)\backslash G(F); x^{-1}T_Z x = T\}.$$

Le groupe $W(M,T)$ agit sur $A_T(Z)$ à droite. On a

(1) quand T décrit un système de représentants de $\mathcal{T}^M/M(F)$ et x un système de représentants de $A_T(Z)/W(M,T)$, alors $(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(z)$ décrit un système de représentants, modulo conjugaison par $M(F)$, de l'ensemble des éléments de $m(F)$ conjugués à Z par un élément de $G(F)$.

Soient X, Z comme dans l'énoncé. Fixons un voisinage ouvert compact ω de Z dans $t_Z(F)$ tel que

- $\omega \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$;
- $\hat{i}^G(X,.)$ est constant sur ω;
- Pour tout $T \in \mathcal{T}^M$ et $x \in A_T(Z), \hat{i}^M(X,.)$ est constant sur $(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(\omega)$;
- les ensembles $(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(\omega)$, pour tous $T \in \mathcal{T}^M$ et $x \in A_T(Z)$, sont deux à deux disjoints.

Choisissons $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ telle que pour tout $Z' \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$,

$$J(Z',f) = \begin{cases} 1, & \text{s'il existe } x \in G(F) \text{ tel que } (\mathrm{Ad}\, x)(Z') \in \omega; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

(2) $J(X,\hat{f}) = \mathrm{mes}(\omega)\hat{i}^G(X,Z)$.

Mais

$$J(X,\hat{f}) = J(X,\hat{f}^P)$$
$$= \sum_{T\in\mathcal{T}^M/M(F)} |W(M,T)|^{-1} \int_{t(F)} J(Z',f^P)\hat{i}^M(X,Z')\,\mathrm{d}Z'.$$

Pour $T \in \mathcal{T}^M$, l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\int_{t(F)} J(Z',f)\hat{i}^M(X,Z')\,\mathrm{d}Z'$$
$$= \sum_{X\in A_T(Z)} \int_{(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(\omega)} J(Z',f)\hat{i}^M(X,Z')\,\mathrm{d}Z',$$
$$= \mathrm{mes}(\omega) \sum_{x\in A_T(Z)} \hat{i}^M(X,(\mathrm{Ad}\, x^{-1})(Z)).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

D'où

$$J(X,\hat{f}) = \mathrm{mes}(\omega) \sum_{T\in\mathcal{T}^M/M(F)} \sum_{x\in A_T(Z)/W(M,T)} \hat{\imath}^M(X,(\mathrm{Ad}\,x^{-1})(Z)).$$

En comparant avec (2) et en tenant compte de (1), on obtient l'énoncé. □

6.7. LEMME. *Supposons E consistante. Alors il existe $c \neq 0$ tel que pour tous $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), Z \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on ait les égalités*

$$D_{G,H}(Y,Z) = c\sum_{Z'} D_{M,H}(Y,Z'), \qquad \tilde{D}_{G,H}(Y,Z) = c\sum_{Z'} \tilde{D}_{M,H}(Y,Z')$$

où l'on somme sur les $Z' \in m(F)$ conjugués à Z par un élément de $G(F)$, modulo conjugaison par $M(F)$.

D'après les Lemmes 6.4 et 6.5, pour tous $Y' \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F), X' \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a l'égalité

$$\Delta_{G,H}(Y',X') = c\sum_{X''} \Delta_{M,H}(Y',X''), \tag{1}$$

où X'' parcourt les éléments de $m(F)$ conjugués à X' par un élément de $G(F)$, modulo conjugaison par $M(F)$.

On vérifie que les formes quadratiques sur $h(F)$ déduites de $\langle\ ,\ \rangle_g$ et de $\langle\ ,\ \rangle_m$ sont égales. Il n'intervient donc qu'une seule fonction $\hat{\imath}^H$ et une seule constante $\gamma_\psi(h)$.

Considérons l'expression définissant $\tilde{D}_{G,H}(Y,Z)$ (cf. 1.1). Il intervient un terme $\Delta_{G,H}(Z',Z)$. Remplaçons-le par le membre de droite de l'égalité (1), appliquée à $Y' = Z', X' = Z$. On obtient alors la deuxième égalité de l'énoncé.

Considérons l'expression définissant $D_{G,H}(Y,Z)$. Remplaçons le terme $\Delta_{G,H}(Y,X)$ par le membre de droite de l'égalité (1), appliquée à $Y' = Y, X' = X$. On obtient:

$$D_{G,H}(Y,Z) = c\gamma_\psi(g)\sum_{X} \Delta_{M,H}(Y,X)\hat{\imath}^G(X,Z), \tag{2}$$

oũ X parcourt $m_{G-\mathrm{reg}}(F)$ modulo conjugaison par $M(F)$. Comme $\langle\ ,\ \rangle_g$ est la somme de $\langle\ ,\ \rangle_m$ et d'une forme quadratique déployée, on a $\gamma_\psi(g) = \gamma_\psi(m)$. Il reste à utiliser le Lemme 6.6 pour déduire de (2) la première égalité de l'énoncé. □

6.8. PROPOSITION. *Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées:*

(a) *E n'est pas consistante;*
(b) *E est consistante et la Conjecture 1.2 est vraie pour les données E_M. Alors la Conjecture 1.2 est vraie pour les données E.*

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Sous l'hypothèse (b), l'assertion résulte du Lemme 6.7. Si E n'est pas consistante, le facteur de transfert est identiquement nul, les fonctions $D_{G,H}$ et $\tilde{D}_{G,H}$ aussi. □

7. Le cas non ramifié

7.1. On dit qu'un groupe réductif connexe défini sur F est non ramifié s'il est quasi-déployé et se déploye sur une extension non ramifiée de F. Soient $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. On suppose dans tout le paragraphe 7:

- φ est trivial, i.e. il existe $x^* \in G^*(\bar{F})$ tel que $(\mathrm{Ad}\, x^*) \circ \varphi$ soit défini sur F;
- G est non ramifié.

Dans ce cas, l'immeuble de Bruhat–Tits de G possède des sommets hyperspéciaux (cf. [T] 1.10.2). Fixons un tel sommet s. Notons $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F. Soit $G_\mathfrak{o}$ le groupe lisse sur $\mathfrak{o}$ associé à s ([T] 3.4.1). En particulier $G_\mathfrak{o} \underset{\mathfrak{o}}{\times} F = G$ et, si l'on pose $K = G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o})$, K est le sous-groupe des éléments de $G(F)$ qui fixent s. Notons $g_\mathfrak{o}$ l'algèbre de Lie de $G_\mathfrak{o}$ sur $\mathfrak{o}$. Alors $g_\mathfrak{o}(\mathfrak{o})$ s'identifie à une sous-$\mathfrak{o}$-algèbre de $g(F)$ que l'on appelle une sous-algèbre hyperspéciale. Notons-la k et notons $1_k \in C_c^\infty(g(F))$ la fonction caractéristique de k.

7.2. Notons F^{nr} le complété de la plus grande extension non ramifiée de F, $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$ son anneau des entiers, $\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$, Γ^{nr} le groupe de Galois de F^{nr}/F. Soit $T \in \mathcal{T}^G$ un tore non ramifié, i.e. déployé sur une extension non ramifiée. Tout élément de $X_*(T)$ ou $X^*(T)$ est défini sur F^{nr}. Le tore T a une structure canonique sur $\mathfrak{o}$, pour laquelle

$$T(\mathfrak{o}) = \left(X_*(T) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}\right)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}.$$

Ce groupe est le sous-groupe compact maximal de $T(F)$. On a l'égalité

$$t(F^{\mathrm{nr}}) = X_*(T) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} F^{\mathrm{nr}}.$$

Tout caractère $\chi \in X^*(T)$ définit donc une forme linéaire $\chi^{\mathrm{nr}}\colon t(F^{\mathrm{nr}}) \to F^{\mathrm{nr}}$. Si $X \in t(F^{\mathrm{nr}})$ on dit que X est entier si $\chi^{\mathrm{nr}}(X) \in \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$ pour tout $\chi \in X^*(T)$. D'autre part, le groupe de Weyl de T se réalise dans $G(F^{\mathrm{nr}})$, i.e. l'injection naturelle

$$\mathrm{Norm}_{G(F^{\mathrm{nr}})}(T)/T(F^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{Norm}_{G(\bar{F})}(T)/T(\bar{F})$$

est bijective. Notons W_T ce groupe. Si $X \in t(F^{\mathrm{nr}})$ est entier, on dit que X est de réduction régulière si pour tout $w \in W_T - \{1\}$, il existe χ tel que $\chi^{\mathrm{nr}}(w(X) - X) \notin \mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$.

LEMME. *Soit $X \in \mathfrak{t}(F)$ un élément entier de réduction régulière. Il existe alors $X' \in k$ stablement conjugué à X. La classe de conjugaison sous K de X' est uniquement déterminée. On a l'égalité*

$$J(X', 1_k) = \text{mes}(K)\text{mes}(T(\mathfrak{o}))^{-1}.$$

Soit A un tore déployé maximal de G tel que le sommet s appartienne à l'appartement associé à A. Soit $\mathbb{T}$ le commutant de A dans G. C'est un sous-tore maximal de G, non ramifié. Il résulte de la construction du groupe $G_\mathfrak{o}$ que

(1) $\text{Norm}_{G(F^{\text{nr}})}(\mathbb{T}) = \text{Norm}_{G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})}(\mathbb{T})\mathbb{T}(F^{\text{nr}})$;
(2) $\mathbb{T}(F^{\text{nr}}) \cap G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}}) = \mathbb{T}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$;
(3) $\mathfrak{t}(F^{\text{nr}}) \cap \mathfrak{g}_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}}) = \mathfrak{t}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$.

Les tores T et $\mathbb{T}$ sont déployés sur F^{nr}. Soit $x \in G(F^{\text{nr}})$ tel que $T = x\mathbb{T}x^{-1}$. Notons f le Frobenius de F^{nr}. Comme T et $\mathbb{T}$ sont définis sur $F, f(x^{-1})x \in \text{Norm}_{G(F^{\text{nr}})}(\mathbb{T})$. Appliquons (1). Soient $n \in \text{Norm}_{G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})}(\mathbb{T})$ et $z \in \mathbb{T}(F^{\text{nr}})$ tels que $f(x^{-1})x = nz$. Comme $G_\mathfrak{o}$ est connexe, il existe $y \in G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$ tel que $n = f(y)y^{-1}$. Fixons un tel y, posons $T' = y^{-1}\mathbb{T}y$. Alors T' est défini sur F. Posons $x' = xy$. Alors $T = x'T'x'^{-1}$. Or $f(x'^{-1})x' = y^{-1}zy \in T'(F^{\text{nr}})$. Donc T' est stablement conjugué à T et, en posant $X' = (\text{Ad}\, x'^{-1})(X), X'$ appartient à $\mathfrak{t}'(F)$ et est stablement conjugué à X. Posons $Y = (\text{Ad}\, y)(X')$. Alors $Y \in \mathfrak{t}(F^{\text{nr}})$. Comme Y est conjugué à X par un élément de $G(F^{\text{nr}})$, Y est encore entier, i.e. $Y \in \mathfrak{t}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. D'après (3), $Y \in \mathfrak{g}_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$ et comme $y \in G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$, on a aussi $X' \in \mathfrak{g}_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. Comme X' est défini sur F, on a donc $X' \in k$. Cela démontre la première assertion du lemme.

La deuxième se démontre comme en [K2] 7.1.

On en déduit immédiatement

$$J(X', 1_k) = \text{mes}(T'(F)\backslash T'(F)K) = \text{mes}(K)\text{mes}(T'(F) \cap K)^{-1}.$$

Comme T' et $\mathbb{T}$ sont conjugués par un élément de $G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$, il résulte de (2) que $T'(F^{\text{nr}}) \cap G_\mathfrak{o}(\mathfrak{o}^{\text{nr}}) = T'(\mathfrak{o}^{\text{nr}})$. En prenant les points rationnels, on obtient $T'(F) \cap K = T'(\mathfrak{o})$. Nos mesures étant invariantes par conjugaison stable, $\text{mes}(T'(\mathfrak{o})) = \text{mes}(T(\mathfrak{o}))$, ce qui achève la preuve. □

7.3. On dit que les données endoscopiques (H, s, ξ) de G^* sont non ramifiées si H est non ramifié.

Remarques. (1) Si H est non ramifié, on peut prolonger ξ en un plongement ${}^L\xi : {}^LH \to {}^LG$ de sorte que l'application composée $\Gamma \to {}^LH \to {}^LG \to \hat{G}$ se factorise par $\text{Gal}(F'/F)$ où F' est une extension finie non ramifiée de F. On retrouve alors la définition de [H2] I.6.

(2) L'hypothèse H non ramifié implique l'hypothèse G^* non ramifié que l'on a faite au début du paragraphe 7. Plus généralement, si M est un groupe réductif

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

connexe quasi-déployé sur F, notons $F[M]$ la plus petite extension de F qui déploye M. Si $(\mathbb{B},\mathbb{T})$ est une paire Γ-stable de M, $F[M]$ est le corps des points fixes du noyau de l'action de Γ sur $X_*(\mathbb{T})$. Si (H,s,ξ) sont des données endoscopiques pour G^*, on a alors:

$$F[G^*]\subset F[H].$$

Fixons des paires Γ-stables $(\hat{\mathbb{B}}_H,\hat{\mathbb{T}}_H),(\hat{\mathbb{B}},\hat{\mathbb{T}})$ pour $\hat{H}$ et $\hat{G}$. Supposons $\xi(\hat{\mathbb{T}}_H)=\hat{\mathbb{T}}$. Soit $\sigma\in\Gamma$ agissant trivialement sur $\hat{\mathbb{T}}_H$. Soit $\hat{x}_\sigma\in\hat{G}$ tel que $\sigma_{\hat{G}}\circ\xi\circ\sigma_{\hat{H}}^{-1}=(\mathrm{Ad}\,\hat{x}_\sigma)\circ\xi$. Alors $\sigma_{\hat{G}}^{-1}\circ(\mathrm{Ad}\,\hat{x}_\sigma)$ agit trivialement sur $\hat{\mathbb{T}}$, donc conserve $\hat{\mathbb{B}}$. Mais $\sigma_{\hat{G}}$ conserve aussi $\hat{\mathbb{B}}$, donc $\mathrm{Ad}\,\hat{x}_\sigma$ conserve $\hat{\mathbb{B}}$ et $\hat{x}_\sigma\in\hat{\mathbb{T}}$. Mais alors $\sigma_{\hat{G}}$ agit trivialement sur $\hat{\mathbb{T}}$. L'assertion en résulte. □

7.4. LEMME. *Supposons G_{der} simplement connexe. Si (H,s,ξ) est ramifié, $J^{G,H}(Y,1_k)=0$ pour tout $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$.*

La preuve est identique à celle de [K2]7.5. Comme en 7.2, soit A un tore déployé maximal de G tel que le sommet s appartienne à l'appartement associé à A. Soit $\mathbb{T}$ le commutant de A dans G. Pour $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, on construit comme Kottwitz un tore C et un groupe G_1, définis sur F et non ramifiés, une suite exacte

$$1\to G\to G_1\to C\to 1 \tag{1}$$

et un élément $c\in C(\mathfrak{o})$ vérifiant la propriété suivante. Soit $x_1\in G_1(F)$ d'image c dans $C(F)$. Notons f_1 la fonction sur $g(F)$ telle que $f_1(X)=1_k((\mathrm{Ad}\,x_1)(X))$ pour tout $X\in g(F)$ (remarquons que G_1 agit sur G par conjugaison). Alors on a l'égalité

$$J^{G,H}(Y,f_1)=\delta J^{G,H}(Y,l_k), \tag{2}$$

où $\delta\neq 1$.

Notons $\mathbb{T}_1$ le centralisateur de l'image de $\mathbb{T}$ dans G_1 et A_1 le plus grand sous-tore déployé de $\mathbb{T}_1$. On a la suite exacte

$$1\to\mathbb{T}\to\mathbb{T}_1\to C\to 1.$$

Comme il s'agit de tores non ramifiés, l'application $\mathbb{T}_1(\mathfrak{o})\to C(\mathfrak{o})$ est surjective. On peut supposer que $x_1\in\mathbb{T}_1(\mathfrak{o})$. On déduit de la suite (1) un plongement de l'immeuble de G dans celui de G_1, $G(F)$-équivariant. L'appartement de A se plonge dans celui de A_1. Comme $\mathbb{T}_1(\mathfrak{o})$ agit trivialement sur ce dernier, il fixe s. Il en est de même si l'on remplace F par une extension non ramifiée. Donc $\mathbb{T}_1(\mathfrak{o})$ normalise K. Alors $\mathrm{Ad}\,x_1$ normalise k donc $f_1=1_k$. La relation (2) implique alors l'assertion du lemme. □

7.5. Supposons (H, s, ξ) non ramifié. Notons plus précisément k_g la sous-algèbre k que l'on a fixée. Fixons de même une sous-$\mathfrak{o}$-algèbre hyperspéciale k_h de $h(F)$. On pose alors la:

CONJECTURE *('lemme fondamental pour les algèbres de Lie'). Il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, on ait l'égalité*

$$J^{\mathrm{st}}(Y, 1_{k_h}) = cJ^{G,H}(Y, 1_{k_g}).$$

Remarque. La validité de cette assertion ne dépend pas des choix de k_g et k_h.

Notons de nouveau $k = k_g$. Il suffit de prouver que si k' est une autre sous-$\mathfrak{o}$-algèbre hyperspéciale de $g(F)$, il existe $c \neq 0$ tel que pour tout $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$,

$$J^{G,H}(Y, 1_{k'}) = cJ^{G,H}(Y, 1_k).$$

On applique ensuite cette assertion aux couples (G, H) et (H, H).

Introduisons le groupe adjoint G_{ad}. D'après [T]2.5, il existe $x \in G_{\mathrm{ad}}(F)$ tel que $k' = (\mathrm{Ad}\, x)(k)$. Pour tout $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on a alors

$$J(X, 1_{k'}) = J((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X), 1_k).$$

Pour $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, on obtient

$$\begin{aligned} J^{G,H}(Y, 1_{k'}) &= \sum_X \Delta_{G,H}(Y, X) J(X, 1_{k'}) \\ &= \sum_X \Delta_{G,H}(Y, (\mathrm{Ad}\, x)(X)) J(X, 1_k). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe c tel que pour tous $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on ait

$$\Delta_{G,H}(Y, (\mathrm{Ad}\, x)(X)) = c\Delta_{G,H}(Y, X).$$

Or l'isomorphisme $\mathrm{Ad}\, x\colon\, G \to G$ et les identités de $G^*, H, \hat{G}, \hat{H}$ définissent une auto-équivalence des données E. L'assertion résulte alors de 2.4. □

7.6. PROPOSITION. *Supposons que $G = \mathrm{SL}(n)$ et que la caractéristique résiduelle p de F vérifie $p > n$. Alors la Conjecture 7.5 est vraie.*

Soient $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et F' une extension finie de F déployant T_Y. On peut supposer F' modérément ramifiée sur F. Notons $\mathfrak{o}'$ l'anneau d'entiers de F'. On a $t_Y(F') = X_*(T_Y) \otimes_{\mathbb{Z}} F'$. Disons que Y est entier si $\chi(Y) \in \mathfrak{o}'$ pour tout $\chi \in X^*(T_Y)$. Si Y n'est pas entier, aucun conjugué stable de Y n'appartient à k_h. De même, si $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$ a pour image Y, X ne peut pas appartenir à k_g. Les deux membres de la formule à démontrer sont nuls. Supposons Y entier. D'après [W2]

Proposition 5.4 et d'après le fait que $\Delta_{G,H}$ est invariant par homothétie de rapport carré, il existe un ensemble fini $J \subset \mathbb{Z}$ et, pour tout $j \in J$, des nombres complexes $c_j^{\text{st}}(Y), c_j^{G,H}(Y)$, de sorte que pour tout $\mu \in \mathfrak{o} \cap F^{\times 2}$ (où $F^{\times 2}$ est l'ensemble des carrés de $F^{\times}$), on ait

$$J^{\text{st}}(\mu Y, 1_{k_h}) = \sum_{j \in J} |\mu|_F^j c_j^{\text{st}}(Y),$$

$$J^{G,H}(\mu Y, 1_{k_g}) = \sum_{j \in J} |\mu|_F^j c_j^{G,H}(Y).$$

Il suffit donc de prouver l'existence de c, indépendant de Y, tel que pour tout $\mu \in \mathfrak{o} \cap F^{\times 2}$, de valuation assez grande, on ait l'égalité

$$J^{\text{st}}(\mu Y, 1_{k_h}) = cJ^{G,H}(\mu Y, 1_{k_g}).$$

Fixons comme en [W2] III.6, une exponentielle tronquée à l'ordre 2, notée e, de l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $h(F)$ sur l'ensemble des éléments topologiquement unipotents de $H(F)$ (il faut supposer $n \geqslant 2$ pour disposer d'une telle exponentielle tronquée ...). Notons K_G le groupe noté K en 7.1, K_H son analogue pour H et $1_{K_G}, 1_{K_H}$ leurs fonctions caractéristiques dans $G(F)$, resp. $H(F)$. Si $\mu \in \mathfrak{o}$ est de valuation $\geqslant 1$, on a les égalités

$$J^{\text{st}}(\mu Y, 1_{k_h}) = J^{\text{st}}(e(\mu Y), 1_{K_H}),$$

$$J^{G,H}(\mu Y, 1_{k_g}) = J^{G,H}(e(\mu Y), 1_{K_G}),$$

où les membres de droite sont les intégrales usuelles 'au niveau' des groupes. Comme $p > n$, on sait qu'il existe c tel que pour tout $y \in H(F)$, image d'un élément fortement régulier de $G(F)$, on ait l'égalité

$$J^{\text{st}}(y, 1_{K_H}) = cJ^{G,H}(y, 1_{K_G})$$

(cf. [W3]). Cela achève la démonstration. □

8. Des propositions locales

8.1. On fixe pour tout le paragraphe 8 des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$ et ψ et $\langle\ ,\ \rangle_g$ comme en 1.1.

Soit $X^* \in g^*_{\text{reg}}(F)$. Notons $g(X^*; F)$ l'ensemble des $X \in g(F)$ tels qu'il existe $x^* \in G^*(\bar{F})$ de sorte que $X^* = (\text{Ad}\, x^*) \circ \varphi(X)$. Rappelons que l'on a défini un groupe $K(T_{X^*}/F)$. Notons $K(T_{X^*}/F)^D$ son dual. Pour $X, X' \in g(X^*; F)$, on définit inv $(X^*; X, X') \in K(T_{X^*}/F)^D$ de la façon suivante. Choisissons $x^*, x'^* \in G^*_{\text{sc}}(\bar{F})$ tels que

$$(\operatorname{Ad} x^*) \circ \varphi(X) = X^*, \qquad (\operatorname{Ad} x'^*) \circ \varphi(X') = X^*.$$

Pour $\sigma \in \Gamma$, posons

$$v(\sigma) = x'^* \varphi \circ \sigma_G \circ \varphi^{-1}(x'^{*-1} x^*) x^{*-1}.$$

Alors $v(\sigma) \in T_{X^*,\text{sc}}(\bar{F})$ et v est un cocycle de Γ dans $T_{X^*,\text{sc}}(\bar{F})$. Le groupe $H^1(\Gamma, T_{X^*,\text{sc}}(\bar{F}))$ s'identifie au dual de $\pi_0([\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G})]^\Gamma)$, lequel s'envoie naturellement dans $K(T_{X^*}/F)^D$. On note inv $(X^*; X, X')$ l'image de v par ces applications. Elle ne dépend pas des choix et ne dépend que des classes de conjugaison sous $G(F)$ de X et X'.

Soit $\kappa \in K(T_{X^*}/F)$. On appellera κ-fonction au dessus de X^* une fonction $\theta\colon g(X^*; F) \to \mathbb{C}$ telle que

- θ est invariante par conjugaison par $G(F)$;
- si $X, X' \in g(X^*; F), \theta(X) = \langle \kappa, \text{inv}(X^*; X, X') \rangle \theta(X')$.

Pour une telle fonction θ et pour $f \in C_c^\infty(g(F))$, on pose

$$J^\theta(X^*, f) = \sum_X \theta(X) J(X, f),$$

où X parcourt $g(X^*; F)$ modulo conjugaison par $G(F)$.

Dans le cas particulier où $G = G^*$ et $\varphi = \text{id}$, la fonction θ définie par

$$\theta(X) = \langle \kappa, \text{inv}(X^*; X, X^*) \rangle$$

pour $X \in g(X^*; F)$ est une κ-fonction au-dessus de X^* et on posera simplement $J^\kappa(X^*, f) = J^\theta(X^*, f)$.

8.2. Soient $X^* \in g^*_{\text{reg}}(F), \kappa \in K(T_{X^*}/F), \mathcal{Y}$ un sous-ensemble fini de $h_{G^*-\text{reg}}(F)$. Notons $\mathcal{Y}_0$ le sous-ensemble des $Y \in \mathcal{Y}$ tels que

- il existe un diagramme $D(Y, X^*; F)$;
- le terme κ_Y associé (cf. 2.2) est égal à κ.

PROPOSITION. *Supposons $g(X^*; F) \neq \emptyset$. Alors il existe des fonctions $f \in C_c^\infty(g(F))$ et $f^H \in C_c^\infty(h(F))$ vérifiant les conditions suivantes.*

(i) *Si $X \in$ Supp (f), il existe $x^* \in G^*(F)$ tel que $(\operatorname{Ad} x^*) \circ \varphi(X) \in t_{X^*}(F) \cap g^*_{\text{reg}}(F)$; si $Y \in$ Supp (f^H), alors Y est l'image d'un élément de $t_{X^*}(F) \cap g^*_{\text{reg}}(F)$.*

(ii) *Pour tout $Y \in h_{G^*-\text{reg}}(F)$,*

$$J^{\text{st}}(Y, f^H) = J^{G,H}(Y, f).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(iii) *Soient* $Z^* \in \mathfrak{g}^*_{\text{reg}}(F), \tau \in K(T_{Z^*}/F), \theta$ *une* τ*-fonction au-dessus de* Z^*. *Supposons que les couples* (T_{X^*}, κ) *et* (T_{Z^*}, τ) *ne sont pas stablement conjugués. Alors*

$$J^\theta(Z^*, f) = 0.$$

(iv) *Soient* $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F), \tau \in K(T_Y/F)$. *Supposons* $\tau \neq 1$. *Alors* $J^\tau(Y, f^H) = 0$.

(v) *Soient* $\tau \in K(T_{X^*}/F)$ *et* θ *une* τ*-fonction au-dessus de* X^*, *non nulle. Alors*

$$J^\theta(X^*, \hat{f}) \begin{cases} \neq 0, & \textit{si} \quad \tau = \kappa; \\ = 0, & \textit{si} \quad \tau \neq \kappa. \end{cases}$$

(vi) *Soient* $Y \in \mathcal{Y}, \tau \in K(T_Y/F)$. *On a les égalités*

$J^\tau(Y, \hat{f}^H) = 0$ *si* $Y \notin \mathcal{Y}_0$ *ou si* $\tau \neq 1$;

$$J^{G,H}(Y, \hat{f}) = 0 \textit{ si } Y \notin \mathcal{Y}_0;$$

$J^\tau(Y, \hat{f}^H) = \gamma_\psi(\mathfrak{g})\gamma_\psi(\mathfrak{h})^{-1} J^{G,H}(Y, \hat{f}) \neq 0$ *si* $Y \in \mathcal{Y}_0$ *et* $\tau = 1$.

Remarque typographique: $\hat{f}^H$ est la transformée de Fourier de f^H.

La preuve occupe les paragraphes 8.3 à 8.9.

8.3. On fixe des systèmes de représentants $\mathcal{T}_0^G$, resp. $\mathcal{T}_0^H$, de l'ensemble des sous-tores maximaux de G, resp. H, définis sur F, à conjugaison près par $G(F)$, resp. $H(F)$. Notons $\mathcal{Y}'$ l'ensemble des $Y' \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}(F)$ tels que $T_{Y'} \in \mathcal{T}_0^H$ et Y' est conjugué à un élément de $\mathcal{Y}$ par un élément de $H(F)$. La proposition ci-dessus est équivalente à la même proposition où l'on remplace $\mathcal{Y}$ par $\mathcal{Y}'$. En oubliant $\mathcal{Y}'$, on peut donc supposer que pour tout $Y \in \mathcal{Y}, T_Y \in \mathcal{T}_0^H$.

Si $T, T' \in \mathcal{T}^G$, notons $I(T, T')$ l'ensemble des isomorphismes de T sur T' qui sont définis sur F et de la forme $\text{Ad}\, x$ pour un $x \in G(\bar{F})$. Rappelons que l'on note $W(G, T') = \text{Norm}_{G(F)}(T')/T'(F)$. Le groupe $W(G, T')$ agit à gauche sur $I(T, T')$. Fixons un ensemble de représentants $I_0(T, T')$ de $W(G, T')\backslash I(T, T')$. Pour $Z \in \mathfrak{t}(F) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, l'ensemble $\{i(Z); i \in I_0(T, T'), T' \in \mathcal{T}_0^G\}$ est un ensemble de repésentants des éléments de $\mathfrak{g}(F)$ stablement conjugués à Z modulo conjugaison par $G(F)$. Donc si f est une fonction sur la classe stable de Z invariante par conjugaison par $G(F)$, la somme

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G, T')|^{-1} \sum_{i \in I(T, T')} f(i(Z))$$

est égale à

$$\sum_{Z'} f(Z')$$

sommé sur la classe stable de Z modulo conjugaison par $G(F)$. On pose

$$w^G(T) = \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G, T')|^{-1} |I(T, T')|.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Des considérations analogues s'appliquent au groupe H.

Si $T \in \mathcal{T}^G$ et $T^* \in \mathcal{T}^{G^*}$, on note $I(T,T^*)$ l'ensemble des isomorphismes de T sur T^* qui sont définis sur F et de la forme $(\mathrm{Ad}\, x^*) \circ \varphi$ pour un $x^* \in G^*(\bar{F})$. Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B},\mathbb{T})$ de G^* et $(\mathbb{B}_H,\mathbb{T}_H)$ de H. On a un isomorphisme (sur $\bar{F}$) $\eta : \mathbb{T}_H \to \mathbb{T}$. Si $T \in \mathcal{T}^G$ et $T' \in \mathcal{T}^H$, on note $I(T,T')$ l'ensemble des isomorphismes de T sur T' qui sont définis sur F et de la forme $(\mathrm{Ad}\, y) \circ \eta^{-1} \circ (\mathrm{Ad}\, x^*) \circ \varphi$ pour un $y \in H(\bar{F})$ tel que $y\mathbb{T}_H y^{-1} = T'$ et un $x^* \in G^*(\bar{F})$ tel que $(\mathrm{Ad}\, x^*) \circ \varphi(T) = \mathbb{T}$. Si $T^* \in \mathcal{T}^{G^*}$ et $T' \in \mathcal{T}^H$, on définit $I(T^*,T')$ de façon analogue. Dans ce dernier cas, un élément $i \in I(T^*,T')$ définit un élément $\kappa[i] \in K(T^*/F)$ (cf. 2.2, définition de κ_Y).

D'après l'hypothèse $g(X^*;F) \neq \emptyset$, il existe $T \in \mathcal{T}_0^G$ tel que $I(T,T_{X^*}) \neq \emptyset$. On fixe un tel T et $i_T \in I(T,T_{X^*})$. On pose $X = i_T^{-1}(X^*)$. Pour $T' \in \mathcal{T}^H$ et $i \in I(T,T')$, on pose $\kappa[i] = \kappa[i \circ i_T^{-1}]$. Pour $T' \in T^G$ et $i \in I(T,T')$, la fonction

$$t(F) \cap g_{\mathrm{reg}}(F) \to K(T_{X^*}/F)^D$$

$$Z \mapsto \mathrm{inv}(i_T(Z); i(Z), Z)$$

est constante. On note $\mathrm{inv}(i)$ sa valeur.

Pour $T' \in \mathcal{T}^G$ et $Z, Z' \in t'(F)$, on note $\gamma_\psi(Z,Z')$ la constante de Weil associée à la forme quadratique $Z'' \mapsto \langle [Z'',Z],[Z',Z''] \rangle_g$ sur $g(F)/t'(F)$.

Pour $Z, Z' \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on pose

$$\hat{a}^G(Z,Z') = \sum_x \gamma_\psi((\mathrm{Ad}\, x)(Z), Z')\psi(\langle (\mathrm{Ad}\, x)(Z), Z' \rangle_g)$$

où on somme sur les $x \in T_{Z'}(F)\backslash G(F)$ tels que $(\mathrm{Ad}\, x)(Z) \in t_{Z'}(F)$. On définit de même $\hat{a}^H(Y,Y')$ pour $Y, Y' \in h_{\mathrm{reg}}(F)$.

On suppose, ainsi qu'il est loisible, que les mesures sur les tores sont fixées comme en 4.4.

8.4. Pour $T' \in \mathcal{T}_0^G \cup \mathcal{T}_0^H$, posons

$$\mathcal{X}_{T'} = \{i(X); i \in I(T,T')\} \cup \{i^{-1}(Y); Y \in \mathcal{Y}, i \in I(T',T_Y)\}.$$

Fixons $Z_0 \in t(F) \cap g_{\mathrm{reg}}(F)$ tel que si $X' \in \mathcal{X}_T - \{X\}$, on ait $\langle X' - X, Z_0 \rangle_g \neq 0$. D'après [W1] proposition VIII.1, il existe un entier N tel que si $\mu \in F^\times$ vérifie $v_F(\mu) < -N$ (où v_F est la valuation usuelle de F), on ait

(1) pour tous $T', T'' \in \mathcal{T}_0^G, X' \in \mathcal{X}_{T'}, i'' \in I(T,T'')$,

$$\hat{i}^G(X', i''(\mu Z_0)) = \hat{a}^G(X', i''(\mu Z_0));$$

(2) pour tous $T', T'' \in \mathcal{T}_0^H, Y' \in \mathcal{X}_{T'}, i'' \in I(T,T'')$,

$$\hat{i}^H(Y', i''(\mu Z_0)) = \hat{a}^H(Y', i''(\mu Z_0)).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Soit ϖ une uniformisante de $\mathfrak{o}$. Fixons un entier $r \geqslant 1$ tel que

(3) $1 + \varpi^r \mathfrak{o} \subset F^{\times 2}$;

- les ensembles $i((1+\varpi^r\mathfrak{o})Z_0)$, pour $T' \in \mathcal{T}_0^G$ et $i \in I(T,T')$, sont deux à deux disjoints
- les ensembles $i((1+\varpi^r\mathfrak{o})Z_0)$, pour $T' \in \mathcal{T}_0^H$ et $i \in I(T,T')$, sont deux à deux disjoints

Il existe un entier N tel que si $\mu \in F^\times$ vérifie $v_F(\mu) < -N$, on ait

(4) pour tout $X' \in \mathcal{X}_T - \{X\}$, le caractère $\lambda \mapsto \psi(\varpi^r \mu\lambda\langle X' - X, Z_0\rangle_g)$ est non trivial sur $\mathfrak{o}$.

On fixe N tel que (1), (2) et (4) soient vérifiés et $\mu \in F^\times$ tel que $v_F(\mu) < -N$. Posons $\omega_0 = \mu(1+\varpi^r\mathfrak{o})Z_0$. Notons d la droite portée par Z_0, fixons un supplémentaire s de d dans t. Si $Z \in t(F)$, on note Z_d sa composante dans $d(F)$, relativement à la décomposition $t(F) = d(F) \oplus s(F)$. Soit ω_s un voisinage ouvert compact de 0 dans $s(F)$, posons $\omega = \omega_0 \oplus \omega_s$. Les fonctions intervenant dans (5), (6) et (9) ci-dessous sont localement constantes. Si ω_s est assez petit, on a donc

- $\omega \subset g_{\text{reg}}(F)$;

(5) pour tous $T', T'' \in \mathcal{T}_0^G, X' \in \mathcal{X}_{T'}, i'' \in I(T,T''), Z \in \omega$,

$$\hat{i}^G(X', i''(Z)) = \hat{a}^G(X', i''(Z)) = \hat{a}^G(X', i''(Z_d));$$

(6) pour tous $T', T'' \in \mathcal{T}_0^H, Y' \in \mathcal{X}_{T'}, i'' \in I(T,T''), Z \in \omega$,

$$\hat{i}^H(Y', i''(Z)) = \hat{a}^H(Y', i''(Z)) = \hat{a}^H(Y', i''(Z_d));$$

(7) les ensembles $i(\omega)$, pour $T' \in \mathcal{T}_0^G$ et $i \in I(T,T')$, sont deux à deux disjoints;
(8) les ensembles $i(\omega)$, pour $T' \in \mathcal{T}_0^H$ et $i \in I(T,T')$, sont deux à deux disjoints;
(9) pour tous $T' \in \mathcal{T}_0^H, i' \in I(T,T')$, la fonction

$$Z \mapsto \Delta_{G,H}(i'(Z), Z)$$

est constante sur ω.

On suppose ces propriétés vérifiées. Dans la situation de (9), on note $\Delta_{G,H}(i')$ la valeur constante de la fonction.

8.5. On définit une fonction f_ω sur ω par

$$f_\omega(Z) = \psi(-\langle X, Z_d\rangle_g)$$

pour tout $Z \in \omega$. Pour tout $T' \in \mathcal{T}_0^G$, resp. $\mathcal{T}_0^H$, et tout $i \in I(Y,T')$, on fixe un fonction $f_i \in C_c^\infty(g(F))$, resp. $C_c^\infty(h(F))$, telle que

(1) tout élément de $\mathrm{Supp}(f_i)$ est conjugué à un élément de $i(\omega)$ par un élément de $G(F)$, resp. $H(F)$;

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(2) pour tout $Z \in \omega$, $J(i(Z), f_i) = f_\omega(Z)$.
On pose

$$f = \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T')|^{-1} \sum_{i \in I(T,T')} \langle \kappa, \mathrm{inv}(i)\rangle^{-1} f_i,$$

$$f^H = w^G(T) \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T')^{-1} |W(H,T')|^{-1} \sum_{i \in I(T,T'); \kappa[i]=\kappa} \Delta_{G,H}(i)_{f_i}.$$

On va montrer que ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé. Le (i) est immédiat.

8.6. Soient Z^*, τ et θ comme en (iii) (on suppose $g(Z^*; F) \neq \emptyset$, sinon (iii) est trivial). D'après les considérations de 8.3, on a l'égalité

$$J^\theta(Z^*, f) = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T_1)|^{-1} \sum_{i_1 \in I(T_1, T_{Z^*})} \theta \circ i_1^{-1}(Z^*) J(i_1^{-1}(Z^*), f),$$

(1) $J^\theta(Z^*, f) = \sum_{T_1,T_2 \in \mathcal{T}_0^G} \sum_{i_1 \in I(T_1,T_{Z^*})} \sum_{i_2 \in I(T,T_2)} |W(G,T_1)|^{-1}$ $|W(G,T_2)|^{-1} \theta \circ i_1^{-1}(Z^*) \langle \kappa, \mathrm{inv}(i_2)\rangle^{-1} J(i_1^{-1}(Z^*), f_{i_2})$.
D'après 8.5 (1), $J(i_1^{-1}(Z^*), f_{i_2}) \neq 0$ seulement si $T_1 = T_2$ et s'il existe $w \in W(G,T_1)$ tel que $i_1^{-1}(Z^*) \in w i_2(\omega)$. Dans ce cas $j = i_1 w i_2 \in I(T, T_{Z^*})$ et $Z^* \in j(\omega)$. D'où

(2) $J^\theta(Z^*, f) = 0$ s'il n'existe pas de $j \in I(T, T_{Z^*})$ tel que $Z^* \in j(\omega)$.

Supposons qu'un tel j existe. Il est alors unique d'après 8.4 (7). Les sommes dans l'expression (1) se réduisent à des sommes sur $T' \in \mathcal{T}_0^G, i \in I(T,T'), w \in W(G,T')$: on pose $T_1 = T_2 = T', i_2 = i, i_1 = j i^{-1} w^{-1}$. On a alors

$$J(i_1^{-1}(Z^*), f_{i_2}) = f_\omega \circ j^{-1}(Z^*)$$

d'après 8.5 (2),

$$\theta \circ i_1^{-1}(Z^*) = \theta \circ i j^{-1}(Z^*)$$

d'après l'invariance de θ par conjugaison par $G(F)$. Le terme w n'intervient plus et la somme en w fait apparaitre un facteur $|W(G,T')|$. D'où

$$J^\theta(Z^*, f) = f_\omega \circ j^{-1}(Z^*) \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T')|^{-1}$$

$$\sum_{i \in I(T,T')} \theta \circ i j^{-1}(Z^*) \langle \kappa, \mathrm{inv}(i)\rangle^{-1}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Posons $Z'^{*}=i_Tj^{-1}(Z^*)$. L'isomorphisme i_Tj^{-1} envoie T_{Z^*} sur T_{X^*}. Il est défini sur F. On en déduit par fonctorialité un isomorphisme

$$\alpha\colon K(T_{Z^*}/F)\to K(T_{X^*}/F).$$

Notons α^D son transposé. Pour $Z,Z'\in g(Z^*;F)=g(Z'^{*};F)$, on vérifie l'égalité

$$\alpha^D(\mathrm{inv}(Z^*;Z,Z'))=\mathrm{inv}(Z'^{*};Z,Z').$$

Donc θ est une $\alpha(\tau)$-fonction au-dessus de Z'^{*}. Pour $T'\in\mathcal{T}_0^G$ et $i\in I(T,T')$, on a alors

$$\begin{aligned}\theta\circ ij^{-1}(Z^*) &= \theta\circ j^{-1}(Z^*)\langle\alpha(\tau);\mathrm{inv}(Z'^{*};ij^{-1}(Z^*),j^{-1}(Z^*))\rangle,\\ &= \theta\circ j^{-1}(Z^*)\langle\alpha(\tau);\mathrm{inv}(i)\rangle.\end{aligned}$$

D'où

$$J^\theta(Z^*,f)=f_\omega\circ j^{-1}(Z^*)\theta\circ j^{-1}(Z^*)\sum_{T'\in\mathcal{T}_0^G}|W(G,T')|^{-1}$$
$$\sum_{i\in I(T,T')}\langle\alpha(\tau)\kappa^{-1},\mathrm{inv}(i)\rangle.$$

Comme en 8.3, la somme ci-dessus est égale à

$$\sum_{\delta\in K(T_{X^*}/F)^D}\langle\alpha(\tau)\kappa^{-1},\delta\rangle.$$

Elle est nulle si $\alpha(\tau)\neq\kappa$, égale à $w^G(T)$ si $\alpha(\tau)=\kappa$. D'où

$$J^\theta(Z^*,f)=\begin{cases}0, & \text{si } \alpha(\tau)\neq\kappa,\\ w^G(T)f_\omega\circ j^{-1}(Z^*)\theta\circ j^{-1}(Z^*), & \text{si } \alpha(\tau)=\kappa.\end{cases}$$

Mais si $\alpha(\tau)=\kappa$, les couples (T_{Z^*},τ) et (T_{X^*},κ) sont stablement conjugués (par i_Tj^{-1} qui est de la forme Ad x^* pour un $x^*\in G^*(\bar F)$). On obtient l'assertion (iii) de la proposition.

Soit $Y\in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. Supposons $T_Y\in\mathcal{T}_0^H$. Fixons $Z^*\in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$ tel qu'il existe un diagramme $D(Y,Z^*;F)$. Soit $\kappa_Y\in K(T_{Z^*}/F)$ l'élément associé à Y. Si $g(Z^*;F)=\emptyset$, $J^{G,H}(Y,f)=0$. Si $g(Z^*;F)\neq\emptyset$, la fonction $X\mapsto\Delta_{G,H}(Y,X)$ est une κ_Y-fonction au-dessus de Z^*. On peut appliquer les calculs ci-dessus à $J^{G,H}(Y,f)$. Notons que si j existe, le composé de j et de l'isomorphisme $T_{Z^*}\to$

T_Y déduit du diagramme est un isomorphisme $i \in I(T, T_Y)$. Alors $\alpha(\kappa_Y) = \kappa[i]$ et $\Delta_{G,H}(Y, j^{-1}(Z^*)) = \Delta_{G,H}(i)$. D'où

$$(3)\ J^{G,H}(Y, f) = \begin{cases} w^G(T) f_\omega(Z) \Delta_{G,H}(i), \\ \text{s'il existe } i \in I(T, T_Y) \text{ et } Z \in \omega \text{ tels que } \kappa[i] = \kappa \text{ et } i(Z) = Y; \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

8.7. Soit $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. Supposons $T_Y \in \mathcal{T}_0^H$. On a l'égalité

(1) $J(Y, f^H) = w^G(T) \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T')^{-1} |W(H, T')|^{-1} \sum_{i' \in I(T,T');\kappa[i']=\kappa} \Delta_{G,H}(i') J(Y, f_{i'})$.

D'après 8.5 (1), $J^H(Y, f_{i'}) \neq 0$ seulement si $T' = T_Y$ et il existe $w \in W(H, T')$ tel que $Y \in wi'(\omega)$. Notons que $\kappa[wi'] = \kappa[i']$. En posant $i = wi'$, on obtient

(2) $J(Y, f^H) = 0$, s'il n'existe pas de $i \in I(T, T_Y)$ et de $Z \in \omega$ tels que $\kappa[i] = \kappa$ et $i(Z) = Y$.

Supposons qu'il existe un tel couple (i, Z) qui est alors unique. Les sommes dans l'expression (1) se réduisent en des sommes sur $T' = T_Y$ et $w \in W(G, T')$: on pose $i' = w^{-1}i$. On a alors $\Delta_{G,H}(i') = \Delta_{G,H}(i)$, $J(Y, f_{i'}) = f_\omega(Z)$. D'où

(3) $J(Y, f^H) = w^G(T) w^H(T_Y)^{-1} f_\omega(Z) \Delta_{G,H}(i)$, s'il existe $i \in I(T, T_Y)$ et $Z \in \omega$ tels que $\kappa[i] = \kappa$ et $i(Z) = Y$.

Si $Y' \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ est stablement conjugué à Y, il résulte de (2) et (3) que $J(Y', f^H) = J(Y, f^H)$. L'assertion (iv) de l'énoncé en résulte. De plus $J^{\mathrm{st}}(Y, f^H) = w^H(T_Y) J(Y, f^H)$. En comparant les formules (2) et (3) ci-dessus avec la formule (3) de 8.6, on obtient l'assertion (ii) de la proposition.

8.8. Soient $Z^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F), \tau \in K(T_{Z^*}/F)$ et θ une τ-fonction au-dessus de X^*. On suppose l'une des deux conditions suivantes vérifiées:

(1) $Z^* = X^*$;

(2) il existe $Y \in \mathcal{Y}$ et $i \in I(T_{Z^*}, T_Y)$ tels que $i(Z^*) = Y$ et Y n'est pas une image de X.

Comme en 8.6, on a

(3) $J^\theta(Z^*, \hat{f}) = \sum_{T_1, T_2 \in \mathcal{T}_0^G} \sum_{i_1 \in I(T_1, T_{Z^*})} \sum_{i_2 \in I(T, T_2)} |W(G, T_1)|^{-1} |W(G, T_2)|^{-1}$ $\theta \circ i_1^{-1}(Z^*) \langle \kappa, \mathrm{inv}(i_2) \rangle^{-1} J(i_1^{-1}(Z^*), \hat{f}_{i_2})$.

Fixons T_1, T_2, i_1, i_2. On a

$$J(i_1^{-1}(Z^*), \hat{f}_{i_2}) = \sum_{T_3 \in \mathcal{T}_0^G} |W(G, T_3)|^{-1} \int_{t_3(F)} \hat{\imath}^G(i_1^{-1}(Z^*), Z) J(Z, f_{i_2}) \, \mathrm{d}Z.$$

Le terme $J(Z, f_{i_2})$ est non nul seulement si $T_2 = T_3$ et il existe $w \in W(G, T_2)$ tel que $Z \in wi_2(\omega)$. D'après 8.4 (7) et puisque nos fonctions sont invariantes par conjugaison, on obtient

$$J(i_1^{-1}(Z^*), \hat{f}_{i_2}) = \int_\omega \hat{\imath}^G(i_1^{-1}(Z^*), i_2(Z)) f_\omega(Z) \, \mathrm{d}Z.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Décomposons la mesure sur ω en produit d'une mesure sur ω_s et d'une mesure sur ω_0. D'après la définition de f_ω et 8.4 (5), la fonction à intégrer ne dépend que de Z_d. En appliquant 8.4 (5), on obtient

$$J(i_1^{-1}(Z^*),\hat{f}_{i_2}) = \text{mes}(\omega_s)\int_{\omega_0}\hat{a}^G(i_1^{-1}(Z^*),i_2(Z))f_\omega(Z)\,\mathrm{d}Z.$$

Par définition de $\hat{a}^G$, l'expression est nulle si $T_1 \neq T_2$. Supposons $T_1 = T_2$. Alors pour $Z \in \omega_0$, on a

$$\hat{a}^G(i_1^{-1}(Z^*),i_2(Z)) = \sum_{w\in W(G,T_1)}\gamma_\psi(wi_1^{-1}(Z^*),i_2(Z))\psi(\langle wi_1^{-1}(Z^*),i_2(Z)\rangle_g).$$

D'après [W1] VIII.8 (6),

$$\gamma_\psi(wi_1^{-1}(Z^*),i_2(Z)) = \gamma_\psi(i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*),Z).$$

En utilisant 8.4 (3), obtient

$$\gamma_\psi(wi_1^{-1}(Z^*),i_2(Z)) = \gamma_\psi(i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*),\mu Z_0).$$

La forme $\langle\ ,\ \rangle_g$ étant invariante par $G(F)$ l'est aussi par $G(\bar{F})$, par prolongement algébrique. Donc

$$\psi(\langle wi_1^{-1}(Z^*),i_2(Z)\rangle_g) = \psi(\langle i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*),Z\rangle_g).$$

En utilisant la définition de f_ω, on obtient

$$J(i_1^{-1}(Z^*),\hat{f}_{i_2}) = \text{mes}(\omega_s)\sum_{w\in W(G,T_1)}\gamma_\psi(i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*),\mu Z_0)$$
$$\times\int_{\omega_0}\psi(\langle i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*)-X,Z\rangle_g)\,\mathrm{d}Z.$$

D'après 8.4 (4), l'intégrale ci-dessus est nulle sauf si $i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*) = X$. Dans ce cas elle vaut mes(ω_0). Notons que si $i_2^{-1}wi_1^{-1}(Z^*) = X$ et Y est une image de Z^*, alors Y est aussi une image de X. Cette condition ne peut donc pas être réalisée sous l'hypothèse (2). On a donc

(4) $J^\theta(Z^*,\hat{f}) = 0$ sous l'hypothèse (2).

Supposons désormais $Z^* = X^*$. La condition $i_2^{-1}wi_1^{-1}(X^*) = X$ est équivalente à $i_1w^{-1}i_2 = i_T$ et l'on obtient

$$J(i_1^{-1}(X^*),\hat{f}_{i_2}) = \begin{cases}\text{mes}\,(\omega)\gamma_\psi(X,\mu Z_0), & \text{si } T_1 = T_2 \text{ et } i_1 \in i_Ti_2^{-1}W(G,T_1),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Reportons cette valeur dans l'expression (3). Les sommes se réduisent en des sommes sur $T' \in \mathcal{T}_0^G, i \in I(T,T'), w \in W(G,T')$: on pose $T_1 = T_2 = T', i_2 = i, i_1 = i_T i^{-1} w$. Comme δ est invariante par conjugaison, le terme w n'intervient plus, il sort un facteur $|W(G,T')|$ et l'on obtient

$$J^\theta(X^*, \hat{f}) = \text{mes}(\omega)\gamma_\psi(X, \mu Z_0) \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T')|^{-1}$$

$$\sum_{i \in I(T,T')} \theta \circ i(X) \langle \kappa, \text{inv}(i) \rangle^{-1}.$$

On a $\theta \circ i(X) = \langle \tau, \text{inv}(X^*; i(X), X) \rangle \theta(X) = \langle \tau, \text{inv}(i) \rangle \theta(X)$, d'où

$$J^\theta(X^*, \hat{f}) = \text{mes}(\omega)\gamma_\psi(X, \mu Z_0)\theta(X) \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T')|^{-1}$$

$$\sum_{i \in I(T,T')} \langle \tau\kappa^{-1}, \text{inv}(i) \rangle^{-1}.$$

Cette somme se calcule comme en 8.6 et l'on obtient

$$(5)\ J^\theta(X^*, \hat{f}) = \begin{cases} w^G(T)\ \text{mes}\ (\omega)\gamma_\psi(X, \mu Z_0)\theta(X), & \text{si } \tau = \kappa, \\ 0, & \text{si } \tau \neq \kappa. \end{cases}$$

Le (v) de la proposition en résulte.

Soit $Y \in \mathcal{Y}$. Comme en 8.6, on peut utiliser les formules ci-dessus pour calculer $J^{G,H}(Y, \hat{f})$. Les formules (4) et (5) conduisent à l'égalité

$$(6)\ J^{G,H}(Y, \hat{f}) = \begin{cases} 0, & \text{si } Y \notin \mathcal{Y}_0, \\ w^G(T)\ \text{mes}\ (\omega)\gamma_\psi(X, \mu Z_0)\Delta_{G,H}(Y, X), & \text{si } Y \in \mathcal{Y}_0. \end{cases}$$

8.9. Soit $Y \in h_{G^*-\text{reg}}(F)$. Supposons $T_Y \in \mathcal{T}_0^H$ et Y stablement conjugué à un élément de $\mathcal{Y}$. On a

(1) $J(Y, \hat{f}^H) = w^G(T) \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T_1)^{-1} |W(H,T_1)|^{-1} \sum_{i_1 \in I(T,T_1)}$; $\kappa[i_1] = \kappa\Delta_{G,H}(i_1) J(Y, \hat{f}_{i_1})$.

Fixons T_1 et i_1. On a

$$J(Y, \hat{f}_{i_1}) = \sum_{T_2 \in \mathcal{T}_0^H} |W(H,T_2)|^{-1} \int_{t_2(F)} \hat{\imath}^H(Y,Z) J(Z, f_{i_1})\, \mathrm{d}Z.$$

En utilisant 8.4 (6) et (8), le même calcul qu'en 8.8 conduit à l'égalité

$$J(Y, \hat{f}_{i_1}) = \text{mes}(\omega_s) \int_{\omega_0} \hat{a}^H(Y, i_1(Z)) f_\omega(Z)\, \mathrm{d}Z.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Par définition de $\hat{a}^H$, l'expression est nulle si $T_1 \neq T_Y$. Supposons $T_1 = T_Y$. Pour $Z \in \omega_0$, on a alors

$$\hat{a}^H(Y, i_1(Z)) = \sum_{w \in W(H,T_1)} \gamma_\psi(w(Y), i_1(Z))\psi(\langle w(Y), i_1(Z)\rangle_h).$$

On a

$$\gamma_\psi(w(Y), i_1(Z)) = \gamma_\psi(Y, w^{-1}i_1(\mu Z_0)).$$

Par définition de la forme $\langle\ ,\ \rangle_h$, on a

$$\psi(\langle w(Y), i_1(Z)\rangle_h) = \psi(\langle i_1^{-1}w(Y), Z\rangle_g).$$

En utilisant la définition de f_ω, on obtient

$$J(Y, \hat{f}_{i_1}) = \mathrm{mes}(\omega_s) \sum_{w \in W(H,T_1)} \gamma_\psi(Y, w^{-1}i_1(\mu Z_0)) \int_{\omega_0} \psi(\langle i_1^{-1}w(Y) - X, Z\rangle_g)\, \mathrm{d}Z.$$

D'après l'hypothèse sur Y et 8.4 (4), l'intégrale est nulle sauf si $i_1^{-1}w(Y) = X$. Dans ce cas, elle vaut $\mathrm{mes}(\omega_0)$. Si Y n'est pas une image de X, la relation $i_1^{-1}w(Y) = X$ n'est jamais vérifiée. Si Y est une image de X, soit i_Y l'unique élément de $I(T, T_Y)$ tel que $i_Y(X) = Y$. L'existence de w tel que $i_1^{-1}w(Y) = X$ est équivalente à $i_1 \in W(H, T_Y)i_Y$ et alors $w = i_1 i_Y^{-1}$. On obtient

$$J(Y, \hat{f}_{i_1}) = \begin{cases} \mathrm{mes}(\omega)\gamma_\psi(Y, i_Y(\mu Z_0)), & \text{si } Y \text{ est une image de} \\ & X, T_1 = T_Y \text{ et } i_1 \in W(H, T_Y)i_Y, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Reportons cette égalité dans (1). Notons que si $i_1 \in W(H, T_Y)i_Y$, on a $\Delta_{G,H}(i_1) = \Delta_{G,H}(i_Y)$ et $\kappa[i_1] = \kappa[i_Y]$. On obtient

$$J(Y, \hat{f}^H) = \begin{cases} \mathrm{mes}\,(\omega)w^G(T)w^H(T_Y)^{-1}\gamma_\psi(Y, i_Y(\mu Z_0))\Delta_{G,H}(i_Y), \\ \text{si } Y \text{ est une image de } X \text{ et } \kappa[i_Y] = \kappa \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

En vertu de [W1]VIII.8 (6), cette expression est invariante par conjugaison stable. Si $Y \in \mathcal{Y}$ et $\tau \in K(T_Y/F) - \{1\}$, on obtient donc

$$J^\tau(Y, \hat{f}^H) = 0.$$

On obtient aussi

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H) = \begin{cases} \mathrm{mes}(\omega)w^G(T)\gamma_\psi(Y, i_Y(\mu Z))\Delta_{G,H}(i_Y), & \text{si } Y \in \mathcal{Y}_0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Pour achever la preuve de (vi) et de la proposition, on compare cette expression à la formule (6) de 8.8. Il reste à prouver que pour $Y \in \mathcal{Y}_0$,

$$\gamma_\psi(Y, i_Y(\mu Z_0))\Delta_{G,H}(i_Y) = \gamma_\psi(g)\gamma_\psi(h)^{-1}\gamma_\psi(X, \mu Z_0)\Delta_{G,H}(Y, X).$$

Rappelons que $\Delta_{G,H}(i_Y) = \Delta_{G,H}(i_Y(\mu Z_0), \mu Z_0)$, cf. 8.4 (9). L'égalité ci-dessus a été prouvée en [W1]VIII.8, égalité précédant (8). $\square$

8.10. Soient maintenant $\mathcal{Y}$ un sous-ensemble fini de $h_{G^*-\text{reg}}(F)$ et $Z \in g_{\text{reg}}(F)$. Utilisons les notations de 8.3. Posons $T = T_Z$ et fixons un voisinage ω de Z dans $t(F)$ tel que

- $\omega \subset g_{\text{reg}}(F)$;

(1) les ensembles $i(\omega)$ pour $i \in I(T, T)$ sont deux à deux disjoints;

(2) pour tous $T' \in \mathcal{T}_0^G, Y \in \mathcal{Y}, i \in I(T', T_Y)$, la fonction $Z' \mapsto \hat{i}^G(i^{-1}(Y), Z')$ est constante sur ω;

(3) pour tous $T', T'' \in \mathcal{T}_0^H, Y \in \mathcal{Y}, i'' \in I(T_Y, T''), i' \in I(T, T')$, la fonction $Z' \mapsto \hat{i}^H(i''(Y), i'(Z'))$ est constante sur ω;

- pour tous $T' \in \mathcal{T}_0^H, i \in I(T, T')$, la fonction $Z' \mapsto \Delta_{G,H}(i(Z'), Z')$ est constante sur ω.

On note $\Delta_{G,H}(i)$ cette valeur constante.

Fixons une fonction $f \in C_c^\infty(g(F))$ telle que tout élément de Supp(f) soit conjugué à un élément de ω par un élément de $G(F)$ et, si $Z' \in \omega, J(Z', f) = 1$. Pour tous $T' \in \mathcal{T}_0^H, i \in I(T, T')$, soit $f_i \in C_c^\infty(h(F))$ une fonction telle que tout élément de Supp(f_i) soit conjugué à un élément de $i(\omega)$ par un élément de $H(F)$ et, si $Z' \in \omega, J(i(Z'), f_i) = 1$. Posons

$$f^H = \sum_{T' \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T')^{-1}|W(H, T')|^{-1} \sum_{i \in I(T, T')} \Delta_{G,H}(i) f_i.$$

PROPOSITION. (i) *Pour tout* $Y \in h_{G^*-\text{reg}}(F)$*, on a l'égalité*

$$J^{\text{st}}(Y, f^H) = J^{G,H}(Y, f).$$

(ii) *Pour tout* $Y \in \mathcal{Y}$*, on a les égalités*

$$J^{G,H}(Y, \hat{f}) = \gamma_\psi(g)^{-1}\text{mes}(\omega) D_{G,H}(Y, Z),$$

$$J^{\text{st}}(Y, \hat{f}^H) = \gamma_\psi(h)^{-1}\text{mes}(\omega)\tilde{D}_{G,H}(Y, Z).$$

On suppose, ainsi qu'il est loisible, que les mesures sur les tores sont normalisées comme en 4.4. Soit $Y \in h_{G^*-\text{reg}}(F)$. Supposons, ainsi qu'il est loisible, que $T_Y \in \mathcal{T}_0^H$. On a l'égalité

(4) $J^{G,H}(Y,f)$

$$= \sum_{T'\in\mathcal{T}_0^G} |W(G,T')|^{-1} \sum_{i\in I(T',T_Y)} \Delta_{G,H}(Y,i^{-1}(Y))J(i^{-1}(Y),f).$$

Le terme $J(i^{-1}(Y),f)$ est non nul seulement si $T'=T$ et il existe $w\in W(G,T)$ tel que $i^{-1}(Y)\in w(\omega)$. Dans ce cas $i_Y=iw$ appartient à $I(T,T_Y)$ et $Y\in i_Y(\omega)$. Si un tel i_Y existe, il est unique d'après (1). Supposons qu'il existe. Les sommes dans l'expression (4) se réduisent à une somme sur $T'=T$ et $w\in W(G,T)$; on pose $i=i_Yw^{-1}$. On a alors $\Delta_{G,H}(Y,i^{-1}(Y))=\Delta_{G,H}(i_Y)$, $J(i^{-1}(Y),f)=1$. D'où

(5) $$J^{G,H}(Y,f)=\begin{cases}\Delta_{G,H}(i_Y), & \text{s'il existe } i_Y\in I(T,T_Y) \text{ tel que } Y\in i_Y(\omega),\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a

$$J(Y,f^H)=\sum_{T'\in\mathcal{T}_0^H} w^H(T')^{-1}|W(H,T')|^{-1}\sum_{i\in(T,T')}\Delta_{G,H}(i)J(Y,f_i).$$

Or $J(Y,f_i)$ est non nul seulement si $T'=T_Y$ et il existe $w\in W(H,T')$ tel que $Y\in wi(\omega)$. Un calcul analogue à celui ci-dessus conduit à l'égalité

$$J(Y,f^H)=\begin{cases}\Delta_{G,H}(i_Y)w^H(T_Y)^{-1}, & \text{s'il existe } i_Y\in I(T,T_Y)\\ \text{tel que } Y\in i_Y(\omega), & \\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Cette expression est invariante par conjugaison stable. Donc $J^{\mathrm{st}}(Y,f^H)=w^H(T_Y)$ $J(Y,f^H)$. En comparant avec (5), on obtient l'assertion (i) de l'énoncé.

Soit $Y\in\mathcal{Y}$. On peut encore supposer que $T_Y\in\mathcal{T}_0^H$. On a l'égalité

$$J^{G,H}(Y,\hat{f})=\sum_{T_1\in\mathcal{T}_0^G}|W(G,T_1)|^{-1}\sum_{i_1\in I(T_1,T_Y)}\Delta_{G,H}(Y,i_1^{-1}(Y))J(i_1^{-1}(Y),\hat{f}).$$

Fixons T_1 et i_1. On a

$$J(i_1^{-1}(Y),\hat{f})=\sum_{T_2\in\mathcal{T}_0^G}|W(G,T_2)|^{-1}\int_{t_2(F)}\hat{i}^G(i_1^{-1}(Y),Z')J(Z',f)\,\mathrm{d}Z'.$$

Supposons, comme il est loisible, que $T\in\mathcal{T}_0^G$. Le terme $J(Z',f)$ est non nul si et seulement si $T_2=T$ et il existe $w\in W(G,T)$ tel que $Z'\in w(\omega)$. Dans ce cas $\hat{i}^G(i_1^{-1}(Y),Z')=\hat{i}^G(i_1^{-1}(Y),Z)$ d'après (2). On obtient

$$J(i_1^{-1}(Y),\hat{f})=\mathrm{mes}(\omega)\hat{i}^G(i_1^{-1}(Y),Z).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

D'où

$$\begin{aligned} J^{G,H}(Y,\hat{f}) &= \text{mes}(\omega) \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_0^G} |W(G,T_1)|^{-1} \sum_{i_1 \in I(T_1,T_Y)} \\ &\qquad \Delta_{G,H}(Y, i_1^{-1}(Y)) \hat{i}^G(i_1^{-1}(Y), Z), \\ &= \text{mes}(\omega) \sum_X \Delta_{G,H}(Y,X) \hat{i}^G(X,Z), \end{aligned}$$

où X parcourt $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison par $G(F)$. On obtient la première égalité de (ii).

Soit $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ stablement conjugué à un élément de $\mathcal{Y}$. Supposons $T_Y \in \mathcal{T}_0^H$. On a

$$J(Y,\hat{f}^H) = \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T_1)^{-1} |W(H,T_1)|^{-1} \sum_{i_1 \in I(T,T_1)} \Delta_{G,H}(i_1) J(Y, \hat{f}_{i_1}).$$

Fixons T_1 et i_1. On a

$$J(Y,\hat{f}^{i_1}) = \sum_{T_2 \in \mathcal{T}_0^H} |W(H,T_2)|^{-1} \int_{\mathfrak{t}_2(F)} \hat{i}^H(Y,Z') J(Z', f_{i_1})\, \mathrm{d}Z'.$$

Le terme $J(Z', f_{i_1})$ est non nul si et seulement si $T_2 = T_1$ et il existe $w \in W(H,T_1)$ tel que $Z' \in w i_1(\omega)$. Dans ce cas $\hat{i}^H(Y,Z') = \hat{i}^H(Y, i_1(Z))$ d'après (3). On obtient

$$J(Y,\hat{f}_{i_1}) = \text{mes}(\omega) \hat{i}^H(Y, i_1(Z)),$$

d'où

$$\begin{aligned} J(Y,\hat{f}^H) &= \text{mes}(\omega) \sum_{T_1 \in \mathcal{T}_0^H} w^H(T_1)^{-1} |W(H,T_1)|^{-1} \sum_{i_1 \in I(T,T_1)} \\ &\qquad \Delta_{G,H}(i_1) \hat{i}^H(Y, i_1(Z)), \\ &= \text{mes}(\omega) \sum_{Z'} w(Z')^{-1} \Delta_{G,H}(Z',Z) \hat{i}^H(Y,Z'), \end{aligned}$$

où Z' parcourt $\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison par $H(F)$. On calcule $J^{\text{st}}(Y,\hat{f}^H)$ en remplaçant Y par Y' et en sommant en Y' sur la classe stable de Y modulo conjugaison par $H(F)$. On obtient la deuxième égalité de (ii). □

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

9. Le cas complexe

9.1. Dans le paragraphe 9, le corps de base n'est plus un corps local non archimédien, c'est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On peut néanmoins poser des définitions analogues à celles des paragraphes 1 et 2. Soient donc $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$. La notion de conjugaison stable se confond avec celle de conjugaison. D'autre part un facteur de transfert $\Delta_{G,H}(Y, X)$ vaut 0 si Y n'est pas une image de X, une constante non nulle si Y est une image de X.

9.2. Fixons un sous-groupe de Borel $\mathbb{B}_G$ de G, un sous-tore maximal $\mathbb{T}_G$ de $\mathbb{B}_G$ et un sous-groupe compact maximal K_G de $G(\mathbb{C})$, en 'bonne position' relativement à $\mathbb{T}_G$. Notons $\mathbb{U}_G$ le radical unipotent de $\mathbb{B}_G$. Fixons des mesures de Haar sur $\mathbb{U}_G(\mathbb{C})$ et K_G de sorte que pour toute $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{C}))$,

$$\int_{G(\mathbb{C})} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{K_G \times \mathbb{U}_G(\mathbb{C}) \times \mathbb{T}_G(\mathbb{C})} f(tuk)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}k.$$

Munissons $\mathfrak{u}_G(\mathbb{C})$ de la mesure pour laquelle l'exponentielle de $\mathfrak{u}_G(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{U}_G(\mathbb{C})$ préserve les mesures.

Pour tout espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$, notons $\mathcal{S}(V)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur V. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$, on définit une fonction $f_{\mathbb{B}_G}$ sur $\mathfrak{t}_G(\mathbb{C})$ par

$$f_{\mathbb{B}_G}(X) = \int_{K_G \times \mathfrak{u}_G(\mathbb{C})} f((\mathrm{Ad}\,k)(X + N))\,\mathrm{d}N\,\mathrm{d}k.$$

L'intégrale est absolument convergente et $f_{\mathbb{B}_G} \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))$. La fonction $f_{\mathbb{B}_G}$ est invariante par le groupe de Weyl W^G.

LEMME. *L'application*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C})) \to J(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))^{W^G}$$

$$f \mapsto f_{\mathbb{B}_G}$$

est surjective.

Cf [B]. □

Pour tout $X \in \mathfrak{g}_{\text{reg}}(\mathbb{C})$ et toute $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{C}))$, l'intégrale définissant $J(X, f)$ est absolument convergente. Pour $X \in \mathfrak{t}_G(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{g}_{\text{reg}}(\mathbb{C})$, on a l'égalité

$$J(X, f) = f_{\mathbb{B}_G}(X).$$

Cela décrit entièrement $J(., f)$ puisque tout élément de $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(\mathbb{C})$ est conjugué à un élément de $\mathfrak{t}_G(\mathbb{C})$.

Notons enfin la relation

$$(f_{\mathbb{B}_G})\hat{}\; = (\hat{f})_{\mathbb{B}_G},$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

pour toute $f \in \mathcal{S}(g(\mathbb{C}))$, où, pour $f' \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))$, $\hat{f}$, est définie de façon évidente.

9.3. Fixons des objets $\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H, K_H$ relatifs à H, analogues de $\mathbb{B}_G, \mathbb{T}_G, K_G$. Posons $\mathbb{B} = \varphi(\mathbb{B}_G), \mathbb{T} = \varphi(\mathbb{T}_G)$. Rappelons que l'on a un isomorphisme $\eta : \mathfrak{t}_H \to \mathfrak{t}$. L'application $f \mapsto f \circ \varphi^{-1} \circ \eta$ définit un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))$ sur $\mathcal{S}(\mathfrak{t}_H(\mathbb{C}))$. Pour tout $w \in W^H$, il existe $w' \in W^G$ tel que $w' \circ \varphi^{-1} \circ \eta = \varphi^{-1} \circ \eta \circ w$. On en déduit que si $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))^{W^G}$, alors $f \circ \varphi^{-1} \circ \eta \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_H(\mathbb{C}))^{W^H}$.

LEMME. *Soit $f \in \mathcal{S}(g(\mathbb{C}))$. Alors*

(i) *il existe $f^H \in \mathcal{S}(h(\mathbb{C}))$ telle que*

$$J(Y, f^H) = J^{G,H}(Y, f)$$

pour tout $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$;

(ii) *pour toute telle f^H, on a l'égalité*

$$J(Y, \hat{f}^H) = J^{G,H}(Y, \hat{f})$$

pour tout $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(\mathbb{C})$.

L'égalité du (i) est équivalente à l'égalité $(f^H)_{\mathbb{B}_H} = f_{\mathbb{B}_G} \circ \varphi^{-1} \circ \eta$. D'où l'existence de f^H. D'après la définition de $\langle\ ,\ \rangle_h$, on a l'égalité

$$\hat{f}' \circ \varphi^{-1} \circ \eta = (f' \circ \varphi^{-1} \circ \eta)\hat{}$$

pour toute $f' \in \mathcal{S}(\mathfrak{t}_G(\mathbb{C}))$. Alors l'égalité du (i) est encore équivalente à

$$(f^H)_{\hat{\mathbb{B}}_H} = (f_{\mathbb{B}_G})\hat{} \circ \varphi^{-1} \circ \eta,$$

elle-même équivalente à l'égalité du (ii). □

10. Utilisation d'une formule des traces stable simple

10.1. Dans le paragraphe 10, le corps de base k est un corps de nombres totalement imaginaire (i.e. tous ses complétés archimédiens sont égaux à $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{A}$ son anneau des adèles, $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de k. On note V l'ensemble des places de k, V_∞, resp. V_f, le sous-ensemble des places archimédiennes, resp. finies. On fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, on note Γ le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. Pour tout $v \in V$, on fixe une place $\bar{v}$ de $\bar{k}$ divisant v. Pour toute extension finie k' de k incluse dans $\bar{k}$, on note k'_v le complété de k' pour la place de k' déduite de $\bar{v}$ par restriction à k'. On note $\bar{k}_v$ la réunion des ces complétés k'_v. Alors $\bar{k}_v$ est une clôture algébrique de k_v. Notons Γ_v le sous-groupe des éléments de Γ qui fixent $\bar{v}$. Alors Γ_v s'identifie au groupe de Galois de $\bar{k}_v/k_v$.

Pour tout groupe réductif connexe M défini sur k et tout $v \in V$, on note M_v le groupe sur k_v obtenu par extension des scalaires.

Pour tout tel groupe M, on munit $M(\mathbb{A})$ de la mesure de Tamagawa (cf. [Oe]). Notons $X^*(M)_k$ le groupe des caractères rationnels de M définis sur k. On note $M(\mathbb{A})^1$ le groupe des $x \in M(\mathbb{A})$ tels que $|\chi(x)|_{\mathbb{A}} = 1$ pour tout $\chi \in X^*(M)_k$, où $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ est la valeur absolue usuelle sur le groupe des idèles de k. On munit le groupe $\mathrm{Hom}(X^*(M)_k, \mathbb{R}_+^\times)$ de la mesure déduite de la mesure usuelle sur $\mathbb{R}_+^\times$ (i.e. $x^{-1}\,\mathrm{d}x$, où $\mathrm{d}x$ donne la mesure 1 à un intervalle de longueur 1). Le quotient $M(\mathbb{A})^1\backslash M(\mathbb{A})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(X^*(M)_k, \mathbb{R}_+^\times)$. On munit $M(\mathbb{A})^1$ de la mesure pour laquelle cette identification préserve les mesures. On note $\tau(M)$ la mesure du quotient $M(k)\backslash M(\mathbb{A})^1$. Elle est finie. Soit T un sous-tore maximal de M défini sur k. L'application naturelle

$$M(\mathbb{A})^1 \cap T(\mathbb{A})\backslash M(\mathbb{A})^1 \to T(\mathbb{A})\backslash M(\mathbb{A})$$

est bijective. On munit $M(\mathbb{A})^1 \cap T(\mathbb{A})$ de la mesure pour laquelle cette bijection préserve les mesures. On vérifie qu'alors

$$\mathrm{mes}(T(k)\backslash(M(\mathbb{A})^1 \cap T(\mathbb{A}))) = \tau(T).$$

Si $v \in V$ et T est un tore défini sur k_v, on munit $T(k_v)$ de la mesure suivante:

- si $v \in V_f$, on impose que la mesure du sous-groupe compact maximal de $T(k_v)$ vaille 1;
- si $v \in V_\infty$, on identifie $T(k_v)$ à $\mathrm{Hom}(X^*(T), \mathbb{C}^\times)$ que l'on munit de la mesure déduite d'une mesure fixée sur $\mathbb{C}^\times$.

Si T est un tore défini sur k, le produit des mesures précédentes sur les $T_v(k_v)$ définit une mesure sur $T(\mathbb{A})$. On note $c(T)$ le quotient de cette mesure par la mesure de Tamagawa.

Si M est un groupe réductif connexe défini sur k qui n'est pas explicitement supposé être un tore et si $v \in V$, on munit $M_v(k_v)$ d'une mesure de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

- si $v \in V_f$ et M_v est non ramifié, la mesure d'un sous-groupe compact hyperspécial de $M_v(k_v)$ vaut 1;
- le produit des mesures sur $M_v(k_v)$ pour tout $v \in V$ est la mesure de Tamagawa de $M(\mathbb{A})$.

10.2. Soient G et G^* deux groupes réductifs connexes définis sur k. On suppose G^* quasi-déployé. Soit $\varphi\colon\ G \to G^*$ un torseur intérieur. On note G^*_{der} le groupe dérivé de G^*. On suppose G^*_{der} simplement connexe. Pour tout $v \in V$, ces données définissent des données analogues G_v, G_v^*, φ_v. Notons que les groupes complexes $\hat{G}_v$ et $\hat{G}$ sont égaux, l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ sur $\hat{G}_v$ s'identifiant à celle de Γ_v sur $\hat{G}$.

Soit $X^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(k)$. On définit encore un groupe $K(T_{X^*}/k)$ (Cf. [K1] 7.7). Pour toute place $v \in V$, il y a une application naturelle $K(T_{X^*}/k) \to K(T_{X^*,v}/k_v)$. Notons $g(X^*; \mathbb{A})$ l'ensemble des $X = (X_v)_{v\in V} \in g(\mathbb{A})$ tels que pour tout $v \in$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

$V, \varphi_v(X_v)$ est conjugué à X^* par un élément de $G^*(\bar{k}_v)$. Pour tout $X \in g(X^*; \mathbb{A})$, il existe une extension k' de k, finie et galoisienne, de sorte que, en notant $\mathbb{A}'$ son anneau d'adèles, on ait

(1) φ est défini sur k';
(2) pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $u_\sigma \in G^*_{\text{der}}(k')$ tel que $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ad} u_\sigma$;
(3) T_{X^*} est déployé sur k';
(4) il existe $x^* \in G^*_{\text{der}}(\mathbb{A}')$ tel que $(\operatorname{Ad} x^*) \circ \varphi(X) = X^*$.

En effet, il est clair qu'il existe une telle extension vérifiant les trois premières conditions. Fixons en une que l'on note k_1. Fixons un ensemble fini S de places finies de k_1 tel que si l'on note $\mathfrak{o}_1^S$ l'anneau des éléments de k_1 entiers hors de S, G^* et G^*_{der} soient définis sur $\mathfrak{o}_1^S$. On fixe de telles structures sur $\mathfrak{o}_1^S$ de G^* et G^*_{der}, donc aussi de g^*. Quitte à agrandir S, on peut supposer que pour toute place finie de k_1 non dans S, on a

(5) $\varphi_v(X_v) \in g^*(\mathfrak{o}_{1,v})$;
(6) la structure de G^* sur $\mathfrak{o}_{1,v}$ est associée à un sommet hyperspécial de l'immeuble (cf.7.1);
(7) $X^* \in g^*(\mathfrak{o}_{1,v})$; c'est un élément entier de réduction régulière (cf. 7.1);
(8) $G^*_{\text{der}}(\mathfrak{o}_{1,v}) T_{X^*}(\mathfrak{o}_{1,v}) = G^*(\mathfrak{o}_{1,v})$ (cf. [K3]3.3.4; notons que T_{X^*} étant déployé sur k_1 a une structure canonique sur $\mathfrak{o}_{1,v}$).

Comme $\varphi_v(X_v)$ et X^* sont conjugués par un élément de $G^*(\bar{k}_{1,v})$, les conditions (5), (6), (7) et le Lemme 7.1 impliquent qu'ils sont conjugués par un élément de $G^*(\mathfrak{o}_{1,v})$, donc aussi par un élément de $G^*_{\text{der}}(\mathfrak{o}_{1,v})$. Cela pour toute place finie v non dans S. On peut trouver une extension k' de k_1, finie et galoisienne sur k, telle que pour toute place v de k' archimédienne ou divisant un élément de $S, \varphi_v(X_v)$ et X^* soient conjugués par un élément de $G^*_{\text{der}}(k'_v)$. Alors cette extension vérifie les conditions (1) à (4).

Fixons une telle extension, u_σ et x^* comme un (2) et (4). Posons $T_{X^*,\text{sc}} = G^*_{\text{der}} \cap T_{X^*}$. On définit un cocycle

$$\tau\colon\ \Gamma \to T_{X^*,\text{sc}}(k') \backslash T_{X^*,\text{sc}}(\mathbb{A}')$$

par $\tau(\sigma) = \sigma(x^*) u_\sigma {x^*}^{-1}$. Par la dualité de Tate-Nakayama, le groupe $H^1(\Gamma, T_{X^*,\text{sc}}(k') \backslash T_{X^*,\text{sc}}(\mathbb{A}'))$ s'identifie à $\pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^\Gamma)^D$ (rappelons que l'exposant D signifie 'dual'). On a d'autre part une application de restriction

$$\pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^\Gamma)^D \to K(T_{X^*}/k)^D.$$

Le cocycle τ définit donc un élément de $K(T_{X^*}/k)^D$ que l'on note $\operatorname{inv}(X^*, X)$. Il ne dépend pas du choix de k'.

LEMME. *Pour tous* $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(k)$ *et* $X \in \mathfrak{g}(X^*, \mathbb{A})$, *inv*$(X^*, X) = 1$ *si et seulement si* X *est conjugué à un élément de* $\mathfrak{g}(k)$ *par un élément de* $G(\mathbb{A})$.

La preuve est identique à [K2] 6.6. □

10.3. Soient (H, s, ξ) des données endoscopiques pour G^* (cf. [K1] 7.4). Remarquons que pour tout $v \in V$, ces données définissent des données endoscopiques (H_v, s, ξ) pour G^*_v. Supposons

(*) il existe $Y_1 \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(k)$ et $X^*_1 \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(k)$ tels que Y_1 soit une image de X^*_1 et $\mathfrak{g}_v(X^*_1; k_v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$.

Fixons de tels éléments et un sous-$\mathfrak{o}$-réseau $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}(k)$. Pour tout $v \in V$, soit $X_{1,v} \in \mathfrak{g}_v(X^*_1; k_v)$. Pour presque tout $v \in V_f$, les termes $X_{1,v}$ et $\mathfrak{a}_v$ vérifient les hypothèses du Lemme 7.2. Quitte à remplacer $X_{1,v}$ par un élément qui lui soit stablement conjugué, on peut donc supposer $X_{1,v} \in \mathfrak{a}_v$ pour presque tout v. Alors le terme $X_1 = (X_{1,v})_{v \in V}$ appartient à $\mathfrak{g}(X^*_1; \mathbb{A})$. Supposons qu'il en soit ainsi.

Comme dans le cas local, Y_1 définit un élément κ_{Y_1} de $K(T_{X^*_1}/k)$. Supposons que pour tout $v \in V$, la facteur de transfert Δ_{G_v,H_v} soit normalisé de sorte que

- $\Delta_{G_v,H_v}(Y_1, X_{1,v}) = 1$ pour presque toute place v;
- $\Pi_{v \in V}\Delta_{G_v,H_v}(Y_1, X_{1,v}) = \langle \kappa_{Y_1}, \mathrm{inv}(X^*_1, X_1)\rangle$.

On a alors

LEMME. *Soient* $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(k), X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(k), X = (X_v)_{v \in V} \in \mathfrak{g}(X^*; \mathbb{A})$. *Supposons que* Y *est une image de* X^*, *notons* κ_Y *l'élément de* $K(T_{X^*}/k)$ *défini par* Y. *Alors*

(i) *pour presque tout* $v \in V, \Delta_{G_v,H_v}(Y, X_v) = 1$;
(ii) $\Pi_{v \in V}\Delta_{G_v,H_v}(Y, X_v) = \langle \kappa_Y, \mathrm{inv}(X^*, X)\rangle$.

La preuve est identique à celle de [LS1] 6.4 B. □

Dans la suite, on fixe des facteurs de transfert Δ_{G_v,H_v} pour tout $v \in V$. On impose que si l'hypothèse $(*)$ est vérifiée, ces facteurs vérifient le lemme ci-dessus. On n'impose aucune condition si $(*)$ n'est pas vérifiée.

Notons $\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $\mathfrak{g}(\mathbb{A})$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$, supposons $f = \Pi_{v \in V} f_v$, où $f_v \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_v(k_v))$ pour tout $v \in V$. Soit $X^* \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(k)$. Pour $X \in \mathfrak{g}(X^*; \mathbb{A})$, on pose

$$J(X, f) = c(T_{X^*}) \prod_{v \in V} J(X_v, f_v).$$

Notons que d'après le Lemme 7.2, presque tous les termes de ce produit valent 1. Dans le cas où $X \in \mathfrak{g}(k)$, on a l'égalité

$$J(X, f) = \int_{T_X(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X))\, \mathrm{d}x.$$

Notons $g(X^*;\mathbb{A})/G(\mathbb{A})$ l'ensemble des classes de conjugaison par $G(\mathbb{A})$ dans $g(X^*;\mathbb{A})$. Pour $\kappa \in K(T_{X^*}/k)$, on pose

$$J^{\kappa}(X^*, f) = \sum_{X \in g(X^*;\mathbb{A})/G(\mathbb{A})} \langle \kappa, \mathrm{inv}(X^*, X)\rangle J(X, f).$$

D'après le Lemme 7.2, pour presque tout $v \in V_f$, il existe un unique élément $X_v \in g_v(X^*; k_v)$ modulo conjugaison par $G(k_v)$ tel que $J(X_v, f_v) \neq 0$. Les termes non nuls dans la somme ci-dessus sont donc en nombre fini.

Soit $Y \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(k)$. Supposons que Y soit une image de X^*. Posons

$$J^{G,H}(Y, f) = c(T_Y) \prod_{v \in V} J^{G_v,H_v}(Y, f_v)$$

avec la convention suivante: un produit infini, même non convergent, est nul si l'un des termes du produit est nul. Si $J^{G_v,H_v}(Y, f_v) \neq 0$ pour tout $v \in V$, alors $g(X^*;\mathbb{A}) \neq \emptyset$. Soit $X \in g(X^*;\mathbb{A})$. Alors, comme ci-dessus, pour presque tout $v \in V_f$,

$$J^{G_v,H_v}(Y, f_v) = \Delta_{G_v,H_v}(Y, X_v) J(X_v, f_v) = 1$$

d'après le Lemme 7.2 et le lemme ci-dessus. La définition de $J^{G,H}(Y, f)$ est donc loisible. D'après le lemme ci-dessus, on a l'égalité

$$J^{G,H}(Y, f) = J^{\kappa_Y}(X^*, f). \tag{2}$$

Considérons le cas où $G = G^*$ et φ est l'identité. Pour tout $v \in V$ et tout $X \in g_v^*(k_v)$, on a défini en 8.1 un élément $\mathrm{inv}(X^*; X, X^*) \in K(T_{X^*,v}/k_v)$ (ce groupe est trivial si $v \in V_\infty$). Tout élément $\kappa \in K(T_{X^*}/k)$ a une image naturelle $\kappa_v \in K(T_{X^*,v}/k_v)$. On a alors

(2) pour tous $\kappa \in K(T_{X^*}/k), X \in g(X^*;\mathbb{A})$,

$$\langle \kappa, \mathrm{inv}(X^*, X)\rangle = \prod_{v \in V} \langle \kappa_v, \mathrm{inv}(X^*; X_v, X^*)\rangle.$$

Introduisons k' et x^* comme en 10.2 (4). On définit un cocycle $\tau\colon\ \Gamma \to T_{X^*,\mathrm{sc}}(\mathbb{A}')$ par $\tau(\sigma) = \sigma(x^*) u_\sigma {x^*}^{-1}$. Alors $\mathrm{inv}(X^*, X)$ est l'image de la classe de τ par la suite d'applications

$$H^1(\Gamma, T_{X^*,\mathrm{sc}}(\mathbb{A}')) \to H^1(\Gamma, T_{X^*,\mathrm{sc}}(k')\backslash T_{X^*,\mathrm{sc}}(\mathbb{A}'))$$
$$\to \pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^{\Gamma})^D \to K(T_{X^*}/k)^D.$$

Pour tout $v \in V$, on a des applications naturelles

$$H^1(\Gamma, T_{X^*,\mathrm{sc}}(\mathbb{A}')) \to H^1(\Gamma_v, T_{X^*,\mathrm{sc},v}(\bar{k}_v)) \to \pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_v})^D.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Notons α_v leur composée. Il résulte de la Définition 8.1 que l'image par α_v de la classe de τ est $\mathrm{inv}(X^*; X_v, X^*)$. On a d'autre part une application naturelle

$$\beta_v\colon\ \pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^{\Gamma}) \to \pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^{\Gamma_v})$$

et sa transposée β_v^D. Le terme κ_v est l'image de κ par β_v. Mais il résulte de [K2] 2.5 appliqué au groupe $T_{X^*,\mathrm{sc}}$ que l'image de la classe de τ dans $\pi_0((\hat{T}_{X^*}/Z(\hat{G}))^{\Gamma})^D$ est égale à la somme sur tout $v \in V$ de ses images par $\beta_v^D \circ \alpha_v$. L'assertion (2) en résulte.

On déduit de (2) l'égalité

$$J^{\kappa}(X^*, f) = c(T_{X^*}) \prod_{v \in V} J^{\kappa_v}(X^*, f_v) \tag{2}$$

avec les notations de 8.1.

10.4. Soient $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(k)$ et u une place finie de k. Pour tout $v \in V$, notons $E_v = (G_v, G_v^*, \varphi_v, H_v, s, \xi) \in \mathcal{E}(k_v)$ les données locales déduites de E par extension des scalaires. Supposons vérifiées les hypothèses suivantes:

(1) G^*_{der} est simplement connexe;
(2) k est totalement imaginaire;
(3) pour tout $v \in V$, il existe $Y_v \in h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$ et $X_v \in g_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$ tels que Y_v soit une image de X_v;
(4) u est inerte dans $k[H]$ (la plus petite extension de k sur laquelle H se déploye, cf. 7.3);
(5) les données E_u sont elliptiques (cf. 6.1).

Supposons aussi vérifiée l'hypothèse beaucoup plus contraignante:
(lf) il existe un ensemble fini $S_0 \subset V_f$ tel que si $v \in V_f - S_0$, G_v et H_v soient non ramifiés, φ_v soit trivial et les données $E_v \in \mathcal{E}(k_v)$ vérifient la Conjecture 7.5.

Le but du paragraphe 10 est de prouver le théorème suivant.

THEOREME. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout* $w \in V_f - \{u\}$, *les données* $E_w \in \mathcal{E}(k_w)$ *vérifient la Conjecture* 1.2.

Dans la suite, on fixe $w \in V_f - \{u\}$.

10.5. Fixons un caractère continu $\psi\colon\ \mathbb{A}/k \to \mathbb{C}^{\times}$ et une forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_g$ sur $g(k)$, symétrique, non dégénérée, invariante par conjugaison par $G(k)$. Comme dans le cas local, on en déduit une telle forme $\langle\ ,\ \rangle_h$ sur $h(k)$. Fixons deux $\mathfrak{o}$-réseaux $a \subset g(k), b \subset h(k)$. Pour tout $v \in V$, on déduit de ces données des données locales $\psi_v, \langle\ ,\ \rangle_{g_v}, \langle\ ,\ \rangle_{h_v}$ et, si $v \in V_f, a_v$ et b_v. Fixons un ensemble S_0 vérifiant la condition (lf) de 10.4. Il existe un ensemble fini $S_1 \subset V$ tel que

(1) $S_0 \cup V_\infty \cup \{u, w\} \subset S_1$;
(2) si $v \in V - S_1, a_v$, resp. b_v, est autodual pour le bicaractère $\psi_v(\langle\ ,\ \rangle_{g_v})$, resp. $\psi_v(\langle\ ,\ \rangle_{h_v})$, et est une sous-$\mathfrak{o}_v$-algèbre de Lie hyperspéciale de $g_v(k_v)$, resp. $h_v(k_v)$ (cf. 7.1). On fixe un tel ensemble S_1.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

L'ensemble des classes d'équivalence de données endoscopiques (H', s', ξ') de G^* non ramifiées hors de S_1 est fini ([L] Lemme 8.12). Fixons un ensemble $\mathcal{H}$ de représentants de ces classes. Notons que (H, s, ξ) est non ramifié hors de S_1 d'après l'inclusion $S_0 \subset S_1$. On suppose que $(H, s, \xi) \in \mathcal{H}$. Notons $\mathcal{H}'$ le sous-ensemble des $(H', s', \xi') \in \mathcal{H}$ telles que $k[H'] \not\subset k[H]$. Pour tout $(H', s', \xi') \in \mathcal{H}'$, on fixe $v = v(H', s', \xi') \in V - S_1$ tel que le Frobenius associé à v dans $\mathrm{Gal}(k[H']k[H]/k)$ fixe $k[H]$ mais pas $k[H']$. Notons que H_v est déployé mais pas H'_v. On note S_2 l'ensemble des $v(H', s', \xi')$ pour $(H', s', \xi') \in \mathcal{H}'$. On pose $S = S_1 \cup S_2$.

Remarque. (H, s, ξ) vérifie l'hypothèse $(*)$ de 10.3.

Soit $v \in S_0$. D'après 10.4 (3), il existe un sous-ensemble ouvert non vide $\Omega_{1,v} \subset h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$ tel que tout point de $\Omega_{1,v}$ soit l'image d'un élément de $g_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$. Fixons un tel $\Omega_{1,v}$. Il existe $Y_1 \in h(k)$ tel que

- pour tout $v \in S_0, Y_1 \in \Omega_{1,v}$.

Fixons un tel Y_1 et $X_1^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(k)$ dont Y_1 soit l'image. On a $g_v(X_1^*; k_v) \neq \emptyset$ si $v \in S_0$ d'après la définition de $\Omega_{1,v}$. Il en est bien sûr de même si φ_v est trivial. Or φ_v est trivial si $v \in V - S_0$. Donc $g_v(X_1^*; k_v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V$, ce qui prouve la remarque. □

10.6. Fixons $Y_w \in h_{w,G^*-\mathrm{reg}}(k_w)$ et $Z_w \in g_{w,\mathrm{reg}}(k_w)$. Pour tout $v \in S - V_\infty$, fixons un sous-ensemble ouvert compact $\Omega_v \subset h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$, non vide, de sorte que

(1) si $v \neq w$, tout point de Ω_v est l'image d'un élément de $g_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$;
(2) si $v \in S_2$, tout point de Ω_v a pour centralisateur un tore déployé de H_v;
(3) tout point de Ω_u est G_u^*-elliptique;
(4) $Y_w \in \Omega_w$ et les fonctions $D_{G_w,H_w}(., Z_w)$ et $\tilde{D}_{G_w,H_w}(., Z_w)$ sont constantes sur Ω_w.

Remarque. La condition (1) est loisible d'après (3) de 10.4. La condition (3) l'est d'après (5) de 10.4 et le Lemme 6.1. La condition (2) l'est car H_v est déployé pour $v \in S_2$. La condition (1) est compatible avec (2) et (3): si $v \in S_2$, φ_v est trivial et tout point de $h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$ est l'image d'un élément de $g_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$; tout point G_u^*-elliptique est l'image d'un élément de $g_{u,\mathrm{reg}}(k_u)$ car tout sous-tore maximal elliptique de G_u^* se transfère à G_u, ainsi qu'il résulte de [K2] 10.2.

On fixe $Y_0 \in h(k)$ tel que

(5) pour tout $v \in S - V_\infty, Y_0 \in \Omega_v$;
(6) pour tout $v \in V_f - S, Y_0 \in b_v$.

L'existence de Y_0 résulte du théorème d'approximation forte. L'élément Y_0 est G^*-régulier. On fixe $X_0^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(k)$ dont Y_0 soit l'image. On note T_0^* et $T_{0,H}$ les centralisateurs de X_0^* dans G^*, resp. de Y_0 dans H. Notons que X_0^* est elliptique régulier dans $g_u^*(k_u)$ d'après (3) et (5). A fortiori, il l'est dans $g^*(k)$. D'après le

Lemme 6.1, Y_0 est lui aussi elliptique régulier dans $h_u(k_u)$, a fortiori dans $h(k)$. Les tores $T_0^*, T_{0,u}^*, T_{0,H}$ et $T_{0,H,u}$ sont donc elliptiques.

Notons $\mathcal{Y}$ un ensemble de représentants, modulo conjugaison stable, des images de X_0^* dans $h(k)$. C'est un ensemble fini. On suppose $Y_0 \in \mathcal{Y}$. Tout élément $Y \in \mathcal{Y}$ définit un élément $\kappa_Y \in K(T_0^*/k)$. On pose $\kappa_0 = \kappa_{Y_0}$ et $\mathcal{Y}_0 = \{Y \in \mathcal{Y}; \kappa_Y = \kappa_0\}$.

10.7. Pour $v \in V_f$, on fixe des fonctions $f_v \in C_c^\infty(g_v(k_v))$ et $f_v^H \in C_c^\infty(h_v(k_v))$ de la façon suivante.

Si $v \notin S$, f_v, resp. f_v^H, est la fonction caractéristique de a_v, resp. b_v.

Si $v \in (S \cap V_f) - \{w\}$, f_v et f_v^H vérifient les conditions de la Proposition 8.2 pour les données $X_0^*, \mathcal{Y}$ et $\kappa_{0,v}$, où $\kappa_{0,v}$ est l'image de κ_0 par l'application naturelle $K(T_0^*/k) \to K(T_{0,v}^*/k_v)$.

On fixe un voisinage ω de Z_w dans $T_{Z_w}(k_w)$ vérifiant les conditions de 8.10 pour notre ensemble $\mathcal{Y}$. On construit alors des fonctions f_w et f_w^H comme en 8.10.

LEMME. *Pour tout $v \in V_\infty$, il existe des fonctions $f_v \in \mathcal{S}(g_v(k_v))$ et $f_v^H \in \mathcal{S}(h_v(k_v))$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées.*

(i) *Pour tout $v \in V_\infty$ et tout $Y \in h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$, $J(Y, f_v^H) = J^{G,H}(Y, f_v)$ et $J(Y, \hat{f}_v^H) = J^{G,H}(Y, \hat{f}_v)$.*

(ii) *Pour tout $v \in V_\infty$, $J(\varphi_v^{-1}(X_0^*), \hat{f}_v) \neq 0$.*

(iii) *Soit $X^* \in g^*(k)$. Supposons que pour tout $v \in V$, $\varphi_v^{-1}(X^*)$ soit conjugué par $G_v(\bar{k}_v)$ à un élément du support de $\hat{f}_v$. Alors X^* est stablement conjugué à X_0^*.*

(iv) *Soit $Y \in h(k)$. Supposons que pour tout $v \in V$, Y soit conjugué par $H_v(\bar{k}_v)$ à un élément du support de $\hat{f}_v^H$. Alors Y est une image de X_0^*.*

Pour tout $v \in V_\infty$, fixons un sous-groupe de Borel $\mathbb{B}_v$ de G_v^* et un sous-tore maximal $\mathbb{T}_v$ de $\mathbb{B}_v$. Posons $\mathtt{t}_\infty = \Pi_{v \in V_\infty} \mathtt{t}_v(k_v)$. Soit r un $\mathfrak{o}$-réseau de $g(k)$. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble des $X = (X_v)_{v \in V_\infty} \in \mathtt{t}_\infty$ tels qu'il existe $X^* \in g^*(k)$ vérifiant:

(1) pour tout $v \in V_f, \varphi^{-1}(X^*)$ est conjugué à un élément de r_v par un élément de $G_v(\bar{k}_v)$;

(2) pour tout $v \in V_\infty, X^*$ est conjugué à X_v par un élément de $G_v^*(k_v)$. Montrons que

(3) $\mathcal{X}$ est un sous-ensemble localement fini de $\mathtt{t}_\infty$.

On réduit le problème de la façon suivante.

(4) On peut supposer que $G = G^*$ et φ est l'identité.

En effet soit k' une extension finie de k telle que φ soit défini sur k', notons $\mathfrak{o}'$ l'anneau des entiers de k' et $r' = r \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}'$. Effectuons les constructions ci-dessus sur le corps de base k', pour ce réseau r'. Affectons d'un ' les objets obtenus. Pour un choix évident de tores maximaux, on a une injection continue $j: \mathtt{t}_\infty \to \mathtt{t}'_\infty$ et $j(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}'$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{X}'$ est localement fini dans $\mathtt{t}'_\infty$. I.e. on peut supposer que φ est définie sur k. Mais alors, en remplaçant r par $\varphi^{-1}(r)$, on peut supposer que $G = G^*$ et φ est l'identité.

On pose désormais cette hypothèse. On a

(5) on peut supposer $G = GL_n$.

On fixe une représentation fidèle $\rho\colon\ G \to GL_n$, définie sur k. Notons encore ρ son application dérivée et gl_n l'algèbre de Lie de GL_n. Soit r' un sous-réseau de $gl_n(k)$ contenant $\rho(r)$. Effectuons les constructions ci-dessus pour GL_n et le réseau r', en affectant d'un ' les objets obtenus. Pour un bon choix de tores, ρ définit une injection continue de $\mathfrak{t}_\infty$ dans $\mathfrak{t}'_\infty$ et on a $\rho(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}'$. D'où l'assertion (5).

On suppose $G = GL_n$. On a

(6) on peut supposer $r = gl_n(\mathfrak{o})$.

En effet soit $\mathcal{X}'$ l'ensemble associé au réseau $gl_n(\mathfrak{o})$. Fixons $\mu \in k^\times$ tel que $\mu r \subset gl_n(\mathfrak{o})$. Alors $\mathcal{X} \subset \mu^{-1}\mathcal{X}'$, d'où la conclusion.

On suppose qu'il en est ainsi. Pour toute extension k' de k et tout $X \in gl_n(k')$, on note

$$P(X;T) = \sum_{i=0}^{n} p_i(X)T^i \in k'[T]$$

le polynôme caractéristique de X. Si k' est un corps local, l'application $X \mapsto P(X;T)$ est continue. Soit alors $X \in \mathfrak{t}_\infty$. Fixons un voisinage U de X dans $\mathfrak{t}_\infty$ tel que si $X', X'' \in U, |p_i(X'_v) - p_i(X''_v)|_v < 1$ pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ et tout $v \in V_\infty$, où bien sûr $|.|_v$ est la valeur absolue de k_v. Soient $X', X'' \in U \cap \mathcal{X}$. Fixons X'^*, X''^* vérifiant (1) et (2) relativement à X' et X''. Alors $P(X'^*;T) \in \mathfrak{o}[T]$ et $P(X'^*;T) = P(X'_v;T)$ pour tout $v \in V_\infty$. Idem en remplaçant X' et X'^* par X'' et X''^*. Mais alors, pour tout $i \in \{0,\dots,n\}, p_i(X'^*)$ et $p_i(X''^*)$ sont des éléments de $\mathfrak{o}$ vérifiant $|p_i(X'^*) - p_i(X''^*)|_v < 1$ pour tout $v \in V_\infty$. Ils sont donc égaux. On en déduit l'égalité $P(X'_v,T) = P(X''_v,T)$, pour tout $v \in V_\infty$. Comme, pour tout $v \in V_\infty$, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{t}_v(k_v)$ ayant un polynôme caractéristique donné, $U \cap \mathcal{X}$ est fini. Cela démontre (3).

Appliquons la construction à un réseau r tel que pour tout $v \in V_f$, $\mathrm{Supp}(\hat{f}_v) \subset r_v$. Notons $\mathcal{X}$ l'ensemble obtenu. Appliquons aussi la construction au groupe H et à un réseau r tel que pour tout $v \in V_f$, $\mathrm{Supp}(\hat{f}^H_v) \subset r_v$. Affectons d'un indice H les objets relatifs à H. Notons en particulier $\mathcal{X}_H \subset \mathfrak{t}_{H,\infty}$ l'ensemble obtenu. Pour toute place $v \in V_\infty$, on a un isomorphisme $\eta_v\colon\ \mathfrak{t}_{H,v} \to \mathfrak{t}_v$. Notons $\mathcal{X}'$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{t}_\infty$ tels qu'il existe $Y \in \mathcal{X}_H$ et, pour tout $v \in V_\infty, x^*_v \in G^*_v(k_v)$ tels que $X_v = (\mathrm{Ad}\, x^*_v) \circ \eta_v(Y_v)$. Il résulte de (3) que $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$ est un sous-ensemble localement fini de $\mathfrak{t}_\infty$.

Fixons $X \in \mathfrak{t}_\infty$ tel que pour tout $v \in V_\infty, X_v$ soit conjugué à X^*_0 par un élément de $G^*_v(k_v)$. Choisissons pour tout $v \in V_\infty$ un voisinage ω_v de X_v dans $\mathfrak{t}_v(k_v)$, compact, de telle sorte que

- $\omega_v \subset g^*_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$;
- en posant $\omega = \Pi_{v\in V}\, \omega_v, \omega \cap (\mathcal{X} \cup \mathcal{X}') = \{X\}$, si $X \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}', = \emptyset$ sinon;

On choisit pour tout $v \in V_\infty$ des fonctions $\phi_v \in C^\infty_c(g_v(k_v)), \phi^H_v \in C^\infty_c(h_v(k_v))$ de telle sorte que

- si $Z \in \mathrm{Supp}(\phi_v), \varphi_v(Z)$ est conjugué à un élément de ω_v par un élément de $G_v^*(k_v)$;
- si $Z \in \mathrm{Supp}(\phi_v^H)$, il existe $Z' \in \omega_v$ dont Z soit une image;
- $J(\varphi_v^{-1}(X_v), \phi_v) \neq 0$;

(7) $(\phi_v^H)_{\mathbb{B}_{H,v}} = (\phi_v \circ \varphi_v^{-1})_{\mathbb{B}_v} \circ \eta_v$ (cf. 9.2).
C'est évidemment possible.

Soit $X^* \in g^*(k)$. Supposons que pour tout $v \in V_f$, resp. $V_\infty, \varphi_v^{-1}(X^*)$ soit conjugué par $G_v(\bar{k}_v)$ à un élément de $\mathrm{Supp}(\hat{f}_v)$, resp. $\mathrm{Supp}(\phi_v)$. Il existe alors $Z \in \omega$ tel que pour tout $v \in V_\infty, Z_v$ soit conjugué à X^* par un élément de $G_v^*(k_v)$. On a $Z \in \mathcal{X}$, donc $Z = X$ et, pour tout $v \in V_\infty, X^*$ est conjugué à X_0^* par un élément de $G_v^*(k_v)$. Notons U l'ensemble des $x^* \in G^*$ tels que $(\mathrm{Ad}\, x^*)(X_0^*) = X^*$. C'est une variété algébrique définie sur k puisque $X^*, X_0^* \in g^*(k)$. Elle est non vide puisque $U(k_v) \neq \emptyset$ pour tout $v \in V_\infty$. Donc $U(\bar{k}) \neq \emptyset$, i.e. X^* est stablement conjugué à X_0^*.

Soit $Y \in h(k)$. Supposons que pour tout $v \in V_f$, resp. V_∞, Y soit conjugué par $H_v(\bar{k}_v)$ à un élément de $\mathrm{Supp}(\hat{f}_v^H)$, resp. $\mathrm{Supp}(\phi_v^H)$. Il existe alors $Z \in \omega$ tel que pour tout $v \in V_\infty, Y$ soit une image de Z_v. On a $Z \in \mathcal{X}'$, donc $Z = X$. Soit $X^* \in g^*(k)$ dont Y soit une image. Alors pour tout $v \in V_\infty, X^*$ et Z_v sont conjugués par $G_v^*(k_v)$, donc aussi X^* et X_0^*. Comme ci-dessus, X^* et X_0^* sont donc stablement conjugués et Y est une image de X_0^*.

D'après (7), on a $J(Y, \phi_v^H) = J^{G,H}(Y, \phi_v)$ pour tout $v \in V_\infty$ et tout $Y \in h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$.

Définissons f_v et f_v^H par $\hat{f}_v = \phi_v, \hat{f}_v^H = \phi_v^H$. En utilisant le Lemme 9.3, on voit que ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé. $\square$

Pour tout $v \in V_\infty$, on fixe des fonctions f_v, f_v^H vérifiant les conditions du lemme. On pose $f = \Pi_{v \in V} f_v$, $f^H = \Pi_{v \in V} f_v^H$.

10.8. Le lemme ci-dessous vaut pour tout corps de nombres k et tout groupe réductif connexe défini sur k.

LEMME. *Soit* $\phi \in \mathcal{S}(g(\mathbb{A}))$. *Supposons que si* $X \in g(k)$ *et* $x \in G(\mathbb{A})$ *sont tels que* $(\mathrm{Ad}\, x)(X) \in \mathrm{Supp}(\phi)$, *alors* X *est régulier elliptique. Alors l'intégrale*

$$\int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{X \in g(k)} |\phi((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X))|\, \mathrm{d}x$$

est convergente.

Soient P un sous-groupe parabolique de G, défini sur k et minimal, M un sous-groupe de Lévi de P défini sur k. Notons U le radical unipotent de P et A le plus grand tore déployé contenu dans le centre de M. Identifions $\mathbb{R}_+^\times$ au sous-groupe du groupe des idèles $\mathbb{A}^\times$ formé des éléments dont les composantes finies sont égales à 1 et dont les composantes archimédiennes sont toutes égales et appartiennent à

$\mathbb{R}_+^\times$. Notons A_0 le sous-groupe des $a \in A(\Pi_{v \in V_\infty} k_v)$ tels que $\chi(a) \in \mathbb{R}_+^\times$ pour tout $\chi \in X^*(A)$.

Notons Σ l'ensemble des racines de A dans g, Σ^+ le sous-ensemble des racines positives pour P. Pour tout réel $c > 0$, notons

$$A_c = \{a \in A_0 \cap G(\mathbb{A})^1; \forall\alpha \in \Sigma^+, \alpha(a) > c\}.$$

On sait qu'il existe un sous-groupe compact maximal K de $G(\mathbb{A})$, un sous-ensemble compact $\omega \subset P(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ et un $c > 0$ tels que, si l'on pose

$$\mathcal{G} = \{pak;\ p \in \omega, a \in A_c, k \in K\},$$

on ait l'égalité

$$G(\mathbb{A})^1 = G(k)\mathcal{G},$$

et qu'alors, pour toute fonction mesurable F sur $G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1$, à valeurs $\geqslant 0$, l'intégrale

$$\int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1} F(x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente si et seulement si l'intégrale

$$\int_{\mathcal{G}} F(x)\,\mathrm{d}x$$

l'est. Fixons de tels K, ω, c. Notons que l'intégrale ci-dessus est convergente s'il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tous $p \in \omega, k \in K$,

$$\int_{A_c} F(pak)\delta_P(a)^{-1}\,\mathrm{d}a \leqslant C,$$

où δ_P est le module usuel et da une mesure de Haar sur $A_0 \cap G(\mathbb{A})^1$.

On note g_0 l'algèbre de Lie de M et, pour tout $\alpha \in \Sigma$, g_α le sous-espace propre de g associé à α. Posons $\Sigma' = \Sigma \cup \{0\}$. On a l'égalité

$$g = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma'} g_\alpha.$$

Pour tout $X \in g$, on écrit $X = \sum_{\alpha\in\Sigma'} X_\alpha$ conformément à cette décomposition. Pour tout $\theta \subset \Sigma^+$, posons

$$g(\theta; k) = \{X \in g(k); \forall\alpha \in \theta, \forall\beta \in \Sigma^+ - \theta, X_{-\alpha} \neq 0 \ \text{ et } \ X_{-\beta} = 0\}.$$

Evidemment, $g(k)$ est l'union disjointe des $g(\theta; k)$ quand θ parcourt les sous-ensembles de Σ^+. Pour démontrer le lemme, il suffit de prouver que pour tout θ, il existe $C \geqslant 0$ tel que pour tous $p \in \omega$ et $k \in K$, on ait

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(1) $\int_{A_c} \sum_{X \in g(\theta;k)} |\Phi((\mathrm{Ad}\, k^{-1}a^{-1}p^{-1})(X))|\delta_P(a)^{-1}\, \mathrm{d}a \leqslant C.$

Fixons donc un sous-ensemble θ de Σ^+. Notons Δ l'ensemble des racines simples de Σ^+. On écrit toute racine $\alpha \in \Sigma^+$ sous la forme $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta} n_{\alpha,\beta}\beta$, avec des $n_{\alpha,\beta} \in \mathbb{N}$.

Supposons d'abord qu'il existe $\beta \in \Delta$ tel que pour tout $\alpha \in \theta, n_{\alpha,\beta} = 0$. Fixons un tel β, soit P' le sous-groupe parabolique de G contenant P dont le Lévi contenant M a $\Delta - \{\beta\}$ pour ensemble de racines simples. Alors $g(\theta;k) \subset p'(k)$ et aucun élément de $g(\theta;k)$ n'est régulier elliptique. Alors $\Phi((\mathrm{Ad}\, x)(X)) = 0$ pour tout $x \in G(\mathbb{A})$ et $X \in g(\theta;k)$. L'intégrale (1) est nulle.

Supposons donc que

(2) pour tout $\beta \in \Delta$, il existe $\alpha \in \theta$ tel que $n_{\alpha,\beta} \neq 0$.

Il existe un sous-ensemble Ω de $G(\mathbb{A})^1$, compact, tel que pour tous $p \in \omega, a \in A_c$ et $k \in K, a^{-1}pak \in \Omega$. Fixons un tel Ω. D'après [We] Section 41, il existe $\phi' \in \mathcal{S}(g(\mathbb{A}))$, à valeurs $\geqslant 0$, telle que pour tous $X \in g(\mathbb{A})$ et $x \in \Omega$,

$$|\Phi((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X))| \leqslant \Phi'(X).$$

En utilisant [We] Section 41, on montre que pour tout $\alpha \in \Sigma'$, il existe $\Phi_\alpha \in \mathcal{S}(g_\alpha(\mathbb{A}))$, à valeurs $\geqslant 0$, de sorte que pour tout $X \in g(\mathbb{A})$,

$$\Phi'(X) \leqslant \prod_{\alpha \in \Sigma'} \Phi_\alpha(X_\alpha).$$

Fixons de telles Φ', Φ_α. Alors pour tous $p \in \omega, a \in A_c, k \in K$, on a la majoration

(3) $\sum_{X \in g(\theta;k)} |\Phi((\mathrm{Ad}\, k^{-1}a^{-1}p^{-1})(X))| \leqslant c_0 F_1(a) F_2(a),$

où

$$c_0 = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ - \theta} \Phi_{-\alpha}(0);$$

$$F_1(a) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+ \cup \{0\}} \left[\sum_{X \in g_\alpha(k)} \Phi_\alpha(\alpha(a)^{-1}X) \right];$$

$$F_2(a) = \prod_{\alpha \in \theta} \left[\sum_{X \in g_{-\alpha}(k) - \{0\}} \Phi_{-\alpha}(\alpha(a)X) \right].$$

On vérifie que

- il existe $c_1 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tous $a \in A_c, F_1(a) \leqslant c_1 \Pi_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha(a)^N$;

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_2(n) > 0$ tel que pour tout $a \in A_c$,

$$F_2(a) \leqslant c_2(n) \prod_{\alpha \in \theta} \alpha(a)^{-n}.$$

Grâce à l'hypothèse (2), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c(n) > 0$ tel que pour tout $a \in A_c$,

$$c_0 F_1(a) F_2(a) \leqslant c(n) \prod_{\beta \in \Delta} \beta(a)^{-n}.$$

Grâce à (3), on en déduit la majoration (1) cherchée, ce qui achève la preuve. □

10.9. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(g(\mathbb{A}))$, on pose

$$I^G(\phi) = \int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{X \in g(k)} \Phi((\mathrm{Ad}\, x^{-1})(X))\, \mathrm{d}x$$

quand cette expression est absolument convergente. Pour $\Phi^H \in \mathcal{S}(h(\mathbb{A}))$, on définit de façon analogue $I^H(\Phi^H)$.

Les expressions définissant $I^G(f), I^G(\hat{f}), I^H(f^H)$ et $I^H(\hat{f}^H)$ sont absolument convergentes. Pour $I^G(f)$ et $I^H(f^H)$. cela résulte de Lemme 10.7 et du fait que les supports de f_u et f_u^H sont contenus dans l'ensemble des éléments réguliers elliptiques de $g_u(k_u)$, resp. $h_u(k_u)$, d'après le choix de ces fonctions, cf. 8.2(i). Rappelons que $T_{0,u}^*$ est elliptique et que toute image d'un élément elliptique régulier l'est aussi. Pour $I^G(\hat{f})$ et $I^H(\hat{f}^H)$, la convergence résulte des Lemmes 10.6 et 10.7 et du fait que X_0^* est elliptique régulier, ainsi que toutes ses images dans $h(k)$.

Notons Aut (H, s, ξ) le groupe des automorphismes i_H de H, définis sur k, tels qu'il existe un isomorphisme dual $\hat{i}_H$ de $\hat{H}$ de sorte que i_H et $\hat{i}_H$ définissent une auto-équivalence des données endoscopiques (H, s, ξ), cf. 2.1. Ce groupe contient $H_{ad}(k)$ comme sous-groupe distingué, où H_{ad} est le groupe adjoint de H. Le quotient Aut $(H, s, \xi)/H_{ad}(k)$ est fini, on note λ_H son nombre d'éléments.

D'après les définitions et l'hypothèse 10.4 (1f), pour $v \in V - S$, il existe $c_v \in \mathbb{C}^\times$ tel que pour tout $Y \in h_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$, on ait l'égalité

$$J^{\mathrm{st}}(Y, f_v^H) = c_v J^{G_v, H_v}(Y, f_v).$$

Cette constante est unique car le membre de gauche n'est pas identiquement nul. On a remarqué en 10.5 que (H, s, ξ) vérifiait l'hypothèse (*) de 10.3. Soit Y_1 comme dans cette hypothèse. On montre comme en 10.3 que, pour presque tout v,

$$J^{\mathrm{st}}(Y_1, f_v^H) = J^{G_v, H_v}(Y_1, f_v) = 1.$$

Donc $c_v = 1$ pour presque tout v. On définit c_S par

$$c_S = \prod_{v \in V-S} c_v.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION. *On a l'égalité*

$$I^H(f^H) = \lambda_H c_S \tau(H)\tau(G^*)^{-1} I^G(f).$$

Pour $X^* \in g^*_{\text{reg}}(k)$, notons $g(X^*;k)$ l'ensemble des $X \in g(k)$ tels que $\varphi(X)$ soit conjugué à X^* par un élément de $G(\bar{k})$. On a d'ailleurs $g(X^*;k) = g(X^*;\mathbb{A}) \cap g(k)$. Notons $g(X^*;k)/G(k)$, resp. $g(X^*;\mathbb{A})/G(\mathbb{A})$, un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(k)$, resp. $G(\mathbb{A})$, dans $g(X^*;k)$, resp. $g(X^*;\mathbb{A})$.

Fixons un ensemble $\mathcal{X}^* \subset g^*(k)$ de représentants des éléments de $g^*(k)$, elliptiques réguliers, à conjugaison stable près. En suivant [K2] 9.6.1, et parce que f_u donc f est à support elliptique régulier, on obtient l'égalité

$$I^G(f) = \sum_{X^* \in \mathcal{X}^*} \tau(T_{X^*}) \sum_{X \in g(X^*;k)/G(k)} J(X,f).$$

Pour $X^* \in \mathcal{X}^*$, on a

$$\tau(T_{X^*}) \sum_{X \in g(X^*;k)/G(k)} J(X,f) = \tau(G^*) \sum_{X \in g(X^*;\mathbb{A})/G(\mathbb{A})} \sum_{\kappa \in K(T_{X^*}/k)} \langle \kappa, \text{inv}\,(X^*,X)\rangle J(X,f)$$

cf. [K2] 9.6.5. La double somme est finie d'après les considérations de 10.3. En la permutant, on obtient

$$\tau(T_{X^*}) \sum_{X \in g(X^*;k)/G(k)} J(X,f) = \tau(G^*) \sum_{\kappa \in K(T_{X^*}/k)} J^\kappa(X^*,f),$$

d'où

$$I^G(f) = \tau(G^*) \sum_{X^* \in \mathcal{X}^*} \sum_{\kappa \in K(T_{X^*}/K)} J^\kappa(X^*,f).$$

Fixons $X^* \in \mathcal{X}^*$ et $\kappa \in K(T_{X^*}/K)$. On sait qu'il existe des données endoscopiques (H',s',ξ') de G^* et un élément $Y \in h'_{G^*-\text{reg}}(k)$ tels que Y soit une image de X^* et $\kappa = \kappa_Y$. Fixons de tels objets. Comme X^* est régulier elliptique, la classe d'équivalence de (H',s',ξ') est uniquement déterminée. D'après 10.3 (1), on a l'égalité

(1) $J^\kappa(X^*,f) = J^{G,H'}(Y,f)$.

On a

(2) si $J^{G,H'}(Y,f) \neq 0, (H's',\xi')$ est non ramifié hors de S_1.

Supposons qu'il existe $v \in V - S_1$ tel que (H'_v, s', ξ') soit ramifié. Fixons une telle place v. Si $v \notin S_2$, $f_v = 1_{a_v}$ et $J^{G_v, H'_v}(Y, f_v) = 0$ d'après le Lemme 7.4. Si $v \in S_2$, tout élément du support de f_v appartient à un tore maximal déployé. Si $J^{G_v, H'_v}(Y, f_v) \neq 0, Y$ appartient donc à un tore maximal déployé de H'_v. Comme H'_v est ramifié, il n'est pas déployé et il n'existe pas de tel tore. Donc $J^{G_v, H'_v}(Y, f_v) = 0$, ce qui démontre (2)

On suppose désormais que $(H', s', \xi') \in \mathcal{H}$, cf. 10.5.

(3) Si $J^{G,H'}(Y, f) \neq 0, (H', s', \xi') \notin \mathcal{H}'$.

En effet si $(H', s', \xi') \in \mathcal{H}'$, soit $v = v(H', s', \xi')$. Alors tout élément du support de f_v appartient à un tore maximal déployé. Or H'_v n'est pas déployé et on conclut comme ci-dessus.

Supposons donc $k[H'] \subset k[H]$.

(4) Si $J^{G,H'}(Y, f) \neq 0, (H', s', \xi') = (H, s, \xi)$.

Notons κ_u et $\kappa_{0,u}$ les images de κ dans $K(T_{X^*,u}/k_u)$ et de κ_0 dans $K(T^*_{0,u}/k_u)$. La fonction $X \mapsto \Delta_{G_u, H'_u}(Y, X)$ sur $g_u(X^*; k_u)$ est une κ_u-fonction au-dessus de X^*. Comme $J^{G_u, H'_u}(Y, f_u) \neq 0$, il résulte de choix de f_u et de la Proposition 8.2(iii) que les couples $(T_{X^*,u}, \kappa_u)$ et $(T^*_{0,u}, \kappa_{0,u})$ sont stablement conjugués. Il existe donc $Y' \in T_{Y,u}(k_u)$ qui soit un image de X_0^* et dont le caractère associé dans $K(T^*_{0,u}/k_u)$ soit $\kappa_{0,u}$. Mais $Y_0 \in h_u(k_u)$ vérifie la même condition. Le tore $T^*_{0,u}$ étant elliptique, cette condition détermine la classe d'équivalence des données endoscopiques. Donc les données (H_u, s, ξ) et (H'_u, s', ξ) sont équivalentes. Soient $i_H : H_u \to H'_u$ un isomorphisme défini sur $k_u, \hat{i}_H : \hat{H} \to \hat{H}'$ un isomorphisme invariant par Γ_u, dual à i_H, tels que

- il existe $\hat{x} \in \hat{G}$ tel que $\xi' \circ \hat{i}_H = (\mathrm{Ad}\, \hat{x}) \circ \xi$;
- les images de s' et $\hat{i}_H(s)$ dans $\pi_0([Z(\hat{H}')/\xi'^{-1}(Z(\hat{G}))]^{\Gamma_u})$ soient égales.

Fixons des paires Γ-stables $(\mathbb{B}_H, \mathbb{T}_H)$ pour H et $(\mathbb{B}_{H'}, \mathbb{T}_{H'})$ pour H'. Quitte à composer i_H par la conjugaison par un élément de $H'_u(k_u)$, on peut supposer que $i_H(\mathbb{T}_{H,u}) = \mathbb{T}_{H',u}, i_H(\mathbb{B}_{H,u}) = \mathbb{B}_{H',u}$. Notons Δ_H l'ensemble de racines simples de $\mathbb{T}_H$ déterminé par $\mathbb{B}_H, \check{\Delta}_H$ l'ensemble des coracines simples, définissons $\Delta_{H'}$ et $\check{\Delta}_{H'}$ de façon analogue. Alors i_H détermine un isomorphisme, disons j, entre les données de racines $(X^*(\mathbb{T}_H), \Delta_H, X_*(\mathbb{T}_H), \check{\Delta}_H)$ et $(X^*(\mathbb{T}_{H'}), \Delta_{H'}, X_*(\mathbb{T}_{H'}), \check{\Delta}_{H'})$. Cet isomorphisme est invariant par Γ_u. Comme $k[H'] \subset k[H]$, Gal$(\bar{k}/k[H])$ agit trivialement sur les deux données de racines et j est aussi invariant par Gal $(\bar{k}/k[H])$. Or $\Gamma = \Gamma_u$ Gal$(\bar{k}/k[H])$ d'après l'hypothèse 10.4 (4). Donc j est invariant par Γ. Il existe alors un isomorphisme $j_H : H \to H'$, défini sur k, qui détermine l'isomorphisme j. L'isomorphisme $\hat{i}_H$ est encore dual à j_H. Toujours parce que Gal$(\bar{k}/k[H])$ agit trivialement et $\Gamma = \Gamma_u$ Gal$(k/k[H]), \hat{i}_H$ est invariant par Γ et les images de s' et $\hat{i}_H(s)$ dans $\pi_0([Z(\hat{H}')/\xi'^{-1}(Z(\hat{G}))^{\Gamma})$ sont égales. Donc j_H et $\hat{i}_H$ déterminent une équivalence entre (H, s, ξ) et (H', s', ξ'). D'où (4).

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Fixons un ensemble $\mathcal{X}_{H,G^*}$ de représentants des éléments réguliers et G^*-elliptiques de $h(k)$, à conjugaison stable près. Notons $\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)$ l'ensemble des $Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}$ tels que Y soit une image de X^* et $\kappa_Y=\kappa$. D'après [K2] 9.7, on a

$$|\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)| = 0 \text{ ou } \lambda_H.$$

Si $\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)=\emptyset$, $J^\kappa(X^*,f)=0$ d'après les relations (1) à (4). D'après (1), on obtient donc

$$J^\kappa(X^*,f)=\lambda_H^{-1}\sum_{Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)} J^{G,H}(Y,f).$$

D'où l'égalité

(5) $I^G(f)=\lambda_H^{-1}\tau(G^*)\sum_{X^*\in\mathcal{X}^*}\ \sum_{\kappa\in K(T_{X^*}/k)}\ \sum_{Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)} J^{G,H}(Y,f).$

Remarque. Les sommes convergent dans l'ordre indiqué. A ce point de la démonstration, on n'a pas démontré que l'expression était absolument convergente.

Considérons maintenant l'intégrale $I^H(f^H)$. Comme f_u^H est à support dans les éléments réguliers G_u^*-elliptiques de $h_u(k_u)$, on a comme ci-dessus

(6) $I^H(f^H)=\sum_{Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}}\tau(T_Y)\sum_{Y'\in h(Y;k)/H(k)} J(Y',f^H).$

Les notations sont les précédentes, appliquées au cas $H=G=G^*,\varphi=\mathrm{id}$. Fixons $Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}$. Comme ci-dessus,

$$\tau(T_Y)\sum_{Y'\in h(Y;k)/H(k)} J(Y',f^H)=\tau(H)\sum_{\kappa\in K(T_Y/k)} J^\kappa(Y,f^H).$$

Soit $\kappa\in K(T_y/k)$. On a

(7) si $\kappa\neq 1, J^\kappa(Y,f^H)=0.$

D'après 10.3, il suffit de montrer que $J^{\kappa_u}(Y,f_u^H)=0$. D'après le choix de f_u^H et la Proposition 8.2(i) et (iv), $J^{\kappa_u}(Y,f_u^H)$ est nul si $\kappa_u\neq 1$ ou si Y n'est pas G_u^*-elliptique. Supposons donc que $\kappa_u=1$ et Y est G_u^*-elliptique. Le terme κ_u est l'image de κ par l'application naturelle

$$\pi_0([\hat{T}_Y/Z(\hat{H})]^\Gamma)\to\pi_0([\hat{T}_Y/Z(\hat{H})]^{\Gamma_u}).$$

Mais T_Y et $T_{Y,u}$ étant elliptiques, les ensembles $[\hat{T}_Y/Z(\hat{H})]^\Gamma$ et $[\hat{T}_Y/Z(\hat{H})]^{\Gamma_u}$ sont finis, donc égaux à leurs groupes de composantes connexes. L'application ci-dessus est injective et la condition $\kappa_u=1$ implique $\kappa=1$. D'où (7).

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

On obtient

$$\tau(T_Y) \sum_{Y' \in h(Y;k)/H(k)} J(Y', f^H) = \tau(H) J^{\mathrm{st}}(Y, f^H).$$

D'où l'égalité

(8) $I^H(f^H) = \tau(H) \sum_{Y \in \mathcal{X}_{H,G^*}} J^{\mathrm{st}}(Y, f^H)$.

Notons que la convergence absolue de l'expression définissant $I^H(f^H)$ implique celle du membre de droite de l'égalité (6), donc aussi celle de membre de droite ci-dessus.

Soit $Y \in \mathcal{X}_{H,G^*}$. Si $v \in V - S$, il résulte des définitions de f_v, f_v^H et de l'hypothèse (lf) de 10.4 que

$$J^{\mathrm{st}}(Y, f_v^H) = c_v J^{G_v,H_v}(Y, f_v).$$

Si $v \in S$, il résulte des définitions de f_v et f_v^H que

$$J^{\mathrm{st}}(Y, f_v^H) = J^{G_v,H_v}(Y, f_v).$$

Alors

$$J^{\mathrm{st}}(Y, f^H) = c_S J^{G,H}(Y, f)$$

pour tout $Y \in \mathcal{X}_{H,G^*}$. Il est clair que $\mathcal{X}_{H,G^*}$ est réunion disjointe des sous-ensembles $\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*, \kappa)$ quand X^* décrit $\mathcal{X}^*$ et κ décrit $K(T_{X^*}/k)$. La convergence absolue de l'expression (8) nous permet d'obtenir la relation

$$I^H(f^H) = c_S \tau(H) \sum_{X^* \in \mathcal{X}^*} \sum_{\kappa \in K(T_{X^*}/k)} \sum_{Y \in \mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)} J^{G,H}(Y, f).$$

Il suffit de comparer avec (5) pour obtenir l'égalité de l'énoncé. $\square$

10.10. LEMME. *On a les égalités*

$$I^G(\hat{f}) = \tau(G^*) J^{\kappa_0}(X_0^*, \hat{f}),$$

$$I^H(\hat{f}^H) = \tau(H) \sum_{Y \in \mathcal{Y}_0} J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H).$$

On peut supposer $X_0^* \in \mathcal{X}^*$ et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}_{H,G^*}$. Alors $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}_{H,G^*}(X_0^*, \kappa_0)$. En tenant compte du Lemme 10.7(iii) et (iv), les mêmes calculs que dans la démonstration précédente conduisent aux égalités

$$I^G(\hat{f}) = \tau(G^*) \sum_{\kappa \in K(T_0^*/k)} J^{\kappa}(X_0^*, \hat{f}),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

$$I^H(\hat{f}^H) = \tau(H) \sum_{Y \in \mathcal{Y}} \sum_{\kappa \in K(T_Y/k)} J^\kappa(Y, \hat{f}^H).$$

Soit $\kappa \in K(T_0^*/k)$. On a

(1) si $\kappa \neq \kappa_0$, $J^\kappa(X_0^*, \hat{f}) = 0$.

Fixons des données endoscopiques (H', s', ξ') de G^* et $Y \in h'_{G^*-\mathrm{reg}}(k)$ tels que Y soit une image de X_0^* et $\kappa = \kappa_Y$. Si (H', s', ξ') ne vérifie pas l'hypothèse (*) de 10.3, $g(X_0^*; \mathbb{A}) = \emptyset$ et $J^\kappa(X_0^*, \hat{f}) = 0$. Supposons que (H', s', ξ') vérifie cette hypothèse. Alors

$$J^\kappa(X_0^*, \hat{f}) = c(T_0^*) \prod_{v \in V} J^{G_v, H'_v}(Y, \hat{f}_v)$$

cf. 10.3 (1). Comme $\kappa \neq \kappa_0$, on montre que $\kappa_u \neq \kappa_{0,u}$ comme dans la preuve de la relation (7) de 10.9. Mais la fonction $X \to \Delta_{G_u, H'_u}(Y, X)$ sur $g_u(X_0^*; k_u)$ est une κ_u-fonction au-dessus de X_0^*. Il résulte de la Proposition 8.2(v) que $J^{G_u, H'_u}(Y, \hat{f}_u) = 0$. D'où $J^\kappa(X_0^*, \hat{f}) = 0$.

La première égalité de l'énoncé résulte de (1).

Soient $Y \in \mathcal{Y}, \kappa \in K(T_Y/k)$, supposons $J^\kappa(Y, \hat{f}^H) \neq 0$. Il résulte alors de la Proposition 8.2(iii) que $\kappa_u = 1$ et $\kappa_{Y,u} = \kappa_{0,u}$. Les tores $T_{Y,u}$ et $T_{0,u}^*$ étant elliptiques, il en résulte encore que $\kappa = 1$ et $\kappa_Y = \kappa_0$, i.e. $Y \in \mathcal{Y}_0$. D'où la deuxième égalité de l'énoncé. $\square$

10.11. Démontrons maintenant le Théorème 10.4. D'après 10.3 (1),

$$J^{\kappa_0}(X_0^*, \hat{f}) = J^{G,H}(Y_0, \hat{f}) = c(T_0^*) \prod_{v \in V} J^{G_v, H_v}(Y_0, \hat{f}_v).$$

Les Lemmes 10.10, 8.10(ii) et la relation 10.6 (4) conduisent à l'égalité

(1) $I^G(\hat{f}) = \tau(G^*) c(T_0^*) \gamma_{\psi_w}(g_w)^{-1} \mathrm{mes}\,(\omega) D_{G_w, H_w}(Y_w, Z_w) \prod_{v \in V - \{w\}}$
$\times J^{G_v, H_v}\ (Y_0, \hat{f}_v)$.

Soit $Y \in \mathcal{Y}_0$. D'après [K2] 9.7, il existe des automorphismes i_H de H et $\hat{i}_H$ de $\hat{H}$ tels que

- i_H et $\hat{i}_H$ déterminent un automorphisme des données endoscopiques (H, s, ξ);
- $i_H(Y_0) = Y$.

Pour tout $v \in V$, fixons $\delta_v \in \mathbb{C}^\times$ tel que pour tous $X \in g_{v,\mathrm{reg}}(k_v), Y_1 \in h_{v, G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$, on ait l'égalité

$$\Delta_{G_v, H_v}(i_H(Y_1), X) = \delta_v \Delta_{G_v, H_v}(Y_1, X)$$

cf. 2.4. Soient $Y_1 \in h_{G^*-\mathrm{reg}}(k), X_1^* \in g^*_{\mathrm{reg}}(k)$ vérifiant la condition (*) de 10.3 et $X_1 = (X_{1,v})_{v \in V} \in g(X_1^*; \mathbb{A})$. Appliquons le Lemme 10.3 aux données Y_1, X_1^*, X_1 et $i_H(Y_1), X_1^*, X_1$. On en déduit

•$\delta_v = 1$ pour presque tout v;

(2) $\prod_{v\in V} \delta_v = 1.$

On a l'égalité

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H) = c(T_Y) \prod_{v\in V} J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_v),$$

cf. 10.3 (3). Notons que, T_Y étant isomorphe à T_0^*, on a $c(T_Y) = c(T_0^*)$.

Soit $v \in V - S$. D'après le choix de nos fonctions et l'hypothèse (1f) de 10.4, on a

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_v) = c_v J^{G_v,H_v}(Y, \hat{f}_v).$$

On a aussi

$$J^{G_v,H_v}(Y, \hat{f}_v) = \delta_v J^{G_v,H_v}(Y_0, \hat{f}_v),$$

d'où

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_v) = c_v \delta_v J^{G_v,H_v}(Y_0, \hat{f}_v).$$

Si $v \in S - \{w\}$, on a

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_v) = \gamma_{\psi_v}(g_v)\gamma_{\psi_v}(h_v)^{-1} J^{G_v,H_v}(Y, \hat{f}_v)$$

d'après 8.2 (vi) et 10.7 (i). Notons que si $v \in V_\infty, \gamma_{\psi_v}(g_v) = \gamma_{\psi_v}(h_v) = 1$. Comme ci-dessus, on obtient

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_v) = \delta_v \gamma_{\psi_v}(g_v)\gamma_{\psi_v}(h_v)^{-1} J^{G_v,H_v}(Y_0, \hat{f}_v).$$

Enfin, grâce à 8.10 (ii), 3.3 et 10.6 (4), on l'égalité

$$J^{\mathrm{st}}(Y, \hat{f}^H_w) = \delta_w \gamma_{\psi_w}(h_w)^{-1} \mathrm{mes}(\omega) \tilde{D}_{G_w,H_w}(Y_w, Z_w).$$

Notons que si $v \in V - S, \gamma_{\psi_v}(h_v) = \gamma_{\psi_v}(g_v) = 1$ car d'après 10.5 (2), les espaces $g_v(k_v)$ et $h_v(k_v)$ possèdent des réseaux autoduaux. D'autre part,

$$\prod_{v\in V} \gamma_{\psi_v}(h_v) = \prod_{v\in V} \gamma_{\psi_v}(g_v) = 1.$$

En tenant compte de la relation (2), on obtient alors

$$J^{\mathrm{st}}(Y,\hat{f}^H) = c(T_0^*)c_S\gamma_{\psi_w}(g_w)^{-1}\mathrm{mes}(\omega) \times \tilde{D}_{G_w,H_w}(Y_w,Z_w)\prod_{v\in V-\{w\}} J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v).$$

En se rappelant que

$$|\mathcal{Y}_0| = |\mathcal{X}_{H,G^*}(X_0^*,\kappa_0)| = \lambda_H,$$

le Lemme 10.10 conduit à l'égalité

(3) $I^H(\hat{f}^H) = \tau(H)\lambda_H c_S c(T_0^*)\gamma_{\psi_w}(g_w)^{-1}\mathrm{mes}(\omega)\tilde{D}_{G_w,H_w}(Y_w,Z_w)\Pi_{v\in V-\{w\}} J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v)$.

D'après la formule de Poisson, on a l'égalité

$$\sum_{X\in g(k)} f((\mathrm{Ad}\,x)(X)) = \sum_{X\in g(k)} \hat{f}((\mathrm{Ad}\,x)(X))$$

pour tout $x\in G(\mathbb{A})$. D'où l'égalité $I^G(f) = I^G(\hat{f})$. Idem $I^H(f^H) = I^H(\hat{f}^H)$. En comparant les formules (1) et (3) avec celle de la Proposition 10.10, on obtient

$$[D_{G_w,H_w}(T_w,Z_w) - \tilde{D}_{G_w,H_w}(Y_w,Z_w)]\prod_{v\in V-\{w\}} J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v) = 0.$$

Si $v\in S-\{w\}$, on a $J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v)\neq 0$ d'après 8.2 (vi) et 10.8 (ii). Si $v\in V-S$, on a $J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v) = c_v^{-1}J^{\mathrm{st}}(Y_0,\hat{f}_v^H)$. On a déjà dit que puisque $Y_0\in b_v$, on a $J^{\mathrm{st}}(Y_0,\hat{f}_v^H)\neq 0$, d'où $J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v)\neq 0$. Il résulte alors de la relation ci-dessus que

$$D_{G_w,H_w}(Y_w,Z_w) = \tilde{D}_{G_w,H_w}(Y_w,Z_w).$$

Cela étant vrai pour tous $Y_w\in h_{w,G^*-\mathrm{reg}}(k_w)$, $Z_w\in g_{w,\mathrm{reg}}(k_w)$, cela démontre le Théorème 10.4.

11. Existence de Données Globales

11.1. Soient de nouveau F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, à corps résiduel fini et $E = (G,G^*,\varphi,H,s,\xi)\in\mathcal{E}(F)$.

PROPOSITION. *Supposons que G^*_{der} soit simplement connexe et que E soit elliptique. Alors il existe un corps de nombres k, des données $E\in\mathcal{E}(k)$, des places finies distinctes u,w de k et un isomorphisme $F\simeq k_w$ de sorte que*

(i) k, u *et* E *vérifient les conditions* (1) *à* (5) *de 10.4*;

(ii) *via l'isomorphisme* $F \simeq k_w$, *les données locales* $E_w \in \mathcal{E}(k_w)$ *sont équivalentes à* E.

On choisit, ainsi qu'il est loisible, un corps de nombres k_0, une place finie v_0 de k_0 et un isomorphisme $k_{0,v_0} \simeq F$. Introduisons la plus petite extension $F[H]$ de F qui déploye H, fixons un élément $\mu \in F[H]$ qui engendre $F[H]$ sur F, notons P le polynôme caractéristique de μ. Soient P_0 un polynôme à coefficients dans k_0 de même degré que P, k_1' le corps de décomposition de P_0 et v_1 une place de k_1' divisant v_0. On peut considérer P_0 comme un polynôme à coefficients dans F via le plongement $k_0 \subset k_{0,v_0} \simeq F$. Si les coefficients de P_0 sont suffisamment proches de ceux de P, alors $k'_{1,v_1} \simeq F[H]$. Notons Γ_1' le fixateur de v_1 dans $\mathrm{Gal}(k_1'/k_0)$, k_1 le sous-corps des points fixes de Γ_1' dans k_1' et encore v_1 la restriction de v_1 à k_1. Alors $k_{1,v_1} \simeq F$ et $\mathrm{Gal}(k_1'/k_1) \simeq \mathrm{Gal}(F[H]/F)$.

Soit N un entier tel que

- $N \geqslant 2$,
- le nombre d'éléments de $Z(\hat{G}_{\mathrm{sc}})^\Gamma$ divise N,

où $\hat{G}_{\mathrm{sc}}$ est le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $\hat{G}$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Choisissons, ainsi qu'il est loisible, une extension galoisienne finie k de k_1 telle que

- $[k : k_1] \geqslant N$;
- k est totalement imaginaire;
- v_1 est totalement décomposée dans k.

Posons $k' = kk_1'$. Les extensions k et k_1' de k_1 sont disjointes puisque v_1 est totalement décomposée dans k et est inerte dans k_1'. On en déduit des isomorphismes

(1) $\mathrm{Gal}(k'/k) \simeq \mathrm{Gal}(k_1'/k_1) \simeq \mathrm{Gal}(F[H]/F)$.

Un groupe quasi-déployé sur un corps K de caractéristique nulle est défini par des données de racines $(X^*, \Delta, X_*, \check{\Delta})$ et une action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur ces données. Soit $\underline{H}$ le groupe quasi-déployé sur k défini par les mêmes données de racines que H et l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ déduite de la projection $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Gal}(k'/k)$ et de l'isomorphisme (1). Comme $F[G^*] \subset F[H]$ (cf. 7.3 (2)), on peut définir de même un groupe $\underline{G}^*$ quasi-déployé sur k. Les groupes complexes $\hat{\underline{H}}$ et $\hat{H}$, resp. $\hat{\underline{G}}$ et $\hat{G}$, sont identiques, l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ se déduisant comme ci-dessus de celle de $\mathrm{Gal}(F[H]/F)$. En posant $\underline{s} = s$, $\underline{\xi} = \xi$, on vérifie aisément que $(\underline{H}, \underline{s}, \underline{\xi})$, sont des données endoscopiques pour $\underline{G}^*$.

Notons $\underline{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, V l'ensemble des places de k et fixons un sous-ensemble $S \subset V$ formé de N places divisant v_1. Pour $v \in V$, fixons une place de $\bar{k}$ divisant v. On la note encore v et on note $\underline{\Gamma}_v$ son fixateur dans $\underline{\Gamma}$. Notons que pour $v \in S$, les isomorphismes $k_{1,v_1} \simeq F$ et $k'_{1,v_1} \simeq F[H]$ définissent de façon unique des isomorphismes $k_v \simeq F$, $k_v' \simeq F[H]$. On les prolonge en un isomorphisme $\bar{k}_v \simeq \bar{F}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

Notons G^*_{ad} et $\underline{G}^*_{\text{ad}}$ les groupes adjoints de G^* et $\underline{G}^*$. Le torseur φ définit un élément de $H^1(\Gamma, G^*_{\text{ad}}(\bar{F}))$; c'est la classe du cocycle τ qui à $\sigma \in \Gamma$ associe $\tau(\sigma) \in G^*_{\text{ad}}(\bar{F})$ tel que $\sigma(\varphi) \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Ad}\tau(\sigma)$. Notons encore τ cette classe. Pour $v \in S$, on peut identifier $\underline{G}^*_{\text{ad},v}(\bar{k}_v)$ à $G^*_{\text{ad}}(\bar{F})$ et $H^1(\underline{\Gamma}_v, \underline{G}^*_{\text{ad},v}(\bar{k}_v))$ à $H^1(\Gamma, G^*_{\text{ad}}(\bar{F}))$. On définit un élément $\underline{\tau} \in \oplus_{v\in V} H^1(\underline{\Gamma}_v, \underline{G}^*_{\text{ad},v}(\bar{k}_v))$: c'est l'élément dont la composante en v est nulle si $v \notin S$ et égale à τ si $v \in S$. On dispose d'applications (cf. [K2] 2.2, 2.5):

$$\bigoplus_{v\in V} H^1(\underline{\Gamma}_v, \underline{G}^*_{\text{ad},v}(\bar{k}_v)) \to \bigoplus_{v\in V} [Z(\hat{\underline{G}}_{\text{sc}})^{\underline{\Gamma}_v}]^D \to [Z(\hat{\underline{G}}_{\text{sc}})^{\underline{\Gamma}}]^D.$$

Le noyau de l'application composée est l'image naturelle de $H^1(\underline{\Gamma}, \underline{G}^*_{\text{ad}}(\bar{k}))$ dans le premier terme. Mais l'image de $\underline{\tau}$ par cette application composée est égale à N fois celle de τ par l'application

$$H^1(\Gamma, G^*_{\text{ad}}(\bar{F})) \to [Z(\hat{G}_{\text{sc}})^{\Gamma}]^D \simeq [Z(\hat{\underline{G}}_{\text{sc}})^{\underline{\Gamma}}]^D.$$

D'après le choix de N, cette image est donc nulle et $\underline{\tau}$ est l'image d'un élément de $H^1(\underline{\Gamma}, \underline{G}^*_{\text{ad}}(\bar{k}))$. Cet élément est unique d'après le principe de Hasse. On fixe un cocycle, que l'on note encore $\underline{\tau}$, dont la classe soit cet élément. On définit un groupe algébrique $\underline{G}$ sur k par les conditions

- $\underline{G}(k) = \underline{G}^*(k)$,
- pour $\sigma \in \underline{\Gamma}, x \in \underline{G}(k), \sigma_{\underline{G}}(x) = (\operatorname{Ad}\underline{\tau}(\sigma)^{-1}) \circ \sigma_{\underline{G}^*}(x)$.

On note $\underline{\varphi}\colon \underline{G} \to \underline{G}^*$ l'identité. C'est un torseur intérieur. On pose

$$\underline{E} = (\underline{G}, \underline{G}^*, \underline{\varphi}, \underline{H}, \underline{s}, \underline{\xi}).$$

Alors $\underline{E} \in \mathcal{E}(k)$.

Pour $v \in S$, on peut identifier $\bar{k}_v$ à $\bar{F}$ et $\underline{G}^*_v$ à G^*. Par construction de τ, il existe $x^* \in G^*_{\text{ad}}(\bar{F})$ tel que, pour $\sigma \in \Gamma, \underline{\tau}(\sigma) = \sigma_{G^*}(x^*)\tau(\sigma)x^{*-1}$. Alors l'application

$$\underline{\varphi}_v^{-1} \circ (\operatorname{Ad} x^*) \circ \varphi\colon G(\bar{F}) \to \underline{G}_v(\bar{F})$$

commute à l'action de Γ et définit un isomorphisme de G sur $\underline{G}_v$ défini sur F. On en déduit que

(2) si $v \in S$, les données $\underline{E}_v$ et E sont équivalentes.

Fixons deux places distinctes $u, w \in S$. Alors les conditions de l'énoncé sont vérifiées. La condition (ii) résulte de (2). Considérons les conditions de 10.4. La condition (1) résulte de l'hypothèse sur G^*_{der}. La condition (2) résulte des conditions imposées à k. La condition (5) résulte de (2) ci-dessus et de l'hypothèse que E est elliptique. En fait $\underline{E}_v$ est elliptique pour tout $v \in S$. Grâce au Lemme 6.1, pour tout $v \in S$, il existe donc $Y \in \underline{h}_{v,\underline{G}^*-\text{reg}}(k_v)$ qui soit $\underline{G}^*_v$-elliptique. Comme un tel élément est l'image d'un élément de $\underline{g}_{v,\mathrm{reg}}(k_v)$, la condition (3) est vérifiée pour $v \in S$. Pour $v \notin S$, $\underline{\varphi}_v$ est trivial par construction de $\underline{\tau}$ et (3) est automatiquement vérifiée. Enfin (4) résulte de l'égalité $k[H] = k'$ et du fait que tout élément de S est inerte dans k'. □

Remarque. On peut préciser la proposition dans les cas suivants:

(3) si $H = G^*$, on peut supposer $\underline{H} = \underline{G}^*$;
(4) si $G^* = \mathrm{SL}(n)$, on peut supposer $\underline{G}^* = \mathrm{SL}\,(n)$.

Cela résulte de la construction ci-dessus de $\underline{E}$.

11.2. On a défini en 6.3 la notion de données consistantes et en 10.4 la condition (1f).

THÉORÈME. *Soit* $E \in \mathcal{E}(F)$.

(i) *Si* E *n'est pas consistante,* E *vérifie la Conjecture* 1.2.
(ii) *Si* E *est consistante, il existe un corps de nombres* k *et des données* $\underline{E} \in \mathcal{E}(k)$ *tels que si* $\underline{E}$ *vérifie la condition* $(1f)$*, alors* E *vérifie la Conjecture* 1.2.

L'assertion (i) résulte de la Proposition 6.8. Supposons E consistante. Ecrivons $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi)$. Supposons d'abord que E vérifie:

(1) E est elliptique et G^* est simplement connexe.

Introduisons le corps k et les données $\underline{E}$ de la Proposition 11.1. Si $\underline{E}$ vérifie $(1\,\mathrm{f})$, alors E vérifie la Conjecture 1.2 d'après le Théorème 10.4.

En général, en appliquant les constructions du paragraphe 6 et la Proposition 6.8, puis les constructions du paragraphe 4 et la Proposition 4.5, on voit qu'il existe $E' \in \mathcal{E}(F)$ telle que: E' vérifie (1) et la Conjecture 1.2 pour E' implique cette conjecture pour E. Il suffit alors de prendre pour k et $\underline{E}$ les objets associés ci-dessus à E'. □

11.3. THÉORÈME. *Soit* $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. *Supposons l'une des conditions suivantes vérifiées*:

(1) G^* *est de type* A;
(2) $H = G^*$.

Alors E *vérifie la Conjecture* 1.2.

Supposons $H = G^*$. Alors E est elliptique. Comme en 11.2, on peut supposer G^* simplement connexe. On construit k et $\underline{E} = (\underline{G}, \underline{G}^*, \underline{\varphi}, \underline{H}, \underline{s}, \underline{\xi})$ comme dans la Proposition 11.1. D'après la Remarque 11.1(3), on peut supposer $\underline{H} = \underline{G}^*$. Mais alors il est trivial que $\underline{E}$ vérifie (1f). On conclut grâce au Théorème 10.4.

Supposons maintenant que G^* est de type A. On raisonne par récurrence sur $\dim(G)$. Comme en 11.2, on peut supposer G^* simplement connexe. Donc G^* est de la forme

$$G^* = \prod_{i \in I} \mathrm{Res}_{F_i/F} \mathrm{SL}(n_i),$$

où les F_i sont des extensions finies de F. On vérifie aisément que E est produit, en un sens évident, de données $E_i = (G_i, G_i^*, \varphi_i, H_i, s_i, \xi_i)$ pour $i \in I$, où, pour tout $i, G_i^* = \mathrm{Res}_{F_i/F}\mathrm{SL}(n_i)$. Il est clair que si E_i vérifie la Conjecture 1.2 pour tout $i \in I, E$ la vérifie aussi. Par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que I est réduit à un élément, autrement dit que $G^* = \mathrm{Res}_{F'/F}\mathrm{SL}(n)$. On construit comme au paragraphe 5 des données $E' = (G', G'^*, \varphi', H', s', \xi') \in \mathcal{E}(F')$. On a $G'^* = \mathrm{SL}(n)$ et d'après la Proposition 5.5, il suffit de prouver la Conjecture 1.2 pour E'. Autrement dit, en oubliant cette construction, on peut supposer $G^* = \mathrm{SL}(n)$. Supposons E elliptique. Soient k et $\underline{E} = (\underline{G}, \underline{G}^*, \underline{\varphi}, \underline{H}, \underline{s}, \underline{\xi}) \in \mathcal{E}(k)$ comme dans la Proposition 11.1. On peut supposer $\underline{G}^* = \mathrm{SL}(n)$. Mais alors $\underline{E}$ vérifie (1f) d'après 7.6. On conclut grâce au Théorème 10.4. Supposons maintenant E non elliptique. Si E n'est pas consistante, elle vérifie la conjecture 1.2 (Proposition 6.8). Si E est consistante, on introduit les données $E_M = (M, M^*, \varphi_M, H, s, \xi_M)$ comme en 6.3. Il est clair que M^* est de type A et $\dim(M) < \dim(G)$. Alors E_M vérifie 1.2 par l'hypothèse de récurrence. On conclut en appliquant la Proposition 6.8. $\square$

11.4. Soient G un groupe réductif connexe défini sur $F, \langle\ ,\ \rangle_g$ une forme bilinéaire sur $g(F)$, symétrique, non dégénérée et invariante par conjugaison. On définit la transformation de Fourier dans $C_c^\infty(g(F))$ par la formule usuelle (cf. 1.1). On obtient par dualité une transformation de Fourier sur l'espace des distributions sur $g(F)$, i.e. sur l'espace des formes linéaires sur $C_c^\infty(g(F))$. Pour $f \in C_c^\infty(g(F))$ et $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$, on définit $J^{\mathrm{st}}(X, f)$ de façon évidente: c'est la somme des $J(X', f)$ quand X' parcourt la classe de conjugaison stable de X, modulo conjugaison par $G(F)$. Notons $C_c^\infty(g(F))^{\mathrm{inst}}$ l'espace des $f \in C_c^\infty(g(F))$ telles que $J^{\mathrm{st}}(X, f) = 0$ pour tout $X \in g_{\mathrm{reg}}(F)$. On dit qu'une distribution sur $g(F)$ est stable si elle annule $C_c^\infty(g(F))^{\mathrm{inst}}$.

PROPOSITION. *La transformée de Fourier d'une distribution stable sur $g(F)$ est une distribution stable.*

Il suffit de prouver que $C_c^\infty(g(F))^{\mathrm{inst}}$ est stable par transformation de Fourier. Introduisons une forme intérieure quasi-déployée G^* de G, un torseur intérieur $\varphi\colon G \to G^*$ et les données $E = (G, G^*, \varphi, G^*, 1, \mathrm{id}) \in \mathcal{E}(F)$. Notons que pour $f \in C_c^\infty(g(F))$, on a $f \in C_c^\infty(g(F))^{\mathrm{inst}}$ si et seulement si $J^{G,G^*}(Y, f) = 0$ pour tout $Y \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$. Il s'agit donc de prouver que pour tous $Y \in g^*_{\mathrm{reg}}(F)$ et toute $f \in C_c^\infty(g(F))^{\mathrm{inst}}$, on a $J^{G,G^*}(Y, \hat{f}) = 0$. Ou encore que la distribution

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

$f \mapsto J^{G,G^*}(Y, \hat{f})$ est stable. Mais soit L une fonction localement intégrable sur $\mathfrak{g}(F)$, continue sur $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$, et ℓ la distribution définie par

$$\ell(f) = \int_{\mathfrak{g}(F)} L(Z) f(Z)\, \mathrm{d}Z.$$

On vérifie que ℓ est stable si et seulement si L l'est au sens suivant: si Z et Z' appartiennent à $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ et sont stablement conjugués, alors $L(Z) = L(Z')$. Si les mesures sont convenablement normalisées, la distribution $f \mapsto J^{G,G^*}(Y, \hat{f})$ est associée à la fonction localement intégrable L définie par

$$L(Z) = D(Z)^{-1/2} \sum_X \Delta_{G,G^*}(Y, X) \hat{i}^G(X, Z)$$

où X parcourt $\mathfrak{g}_{\text{reg}}(F)$ modulo conjugaison. I.e. $L(Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g})^{-1} D(Z)^{-1/2} \times D_{G,G^*}(Y, Z)$. Grâce à 11.3, on a aussi $L(Z) = \gamma_\psi(\mathfrak{g})^{-1} D(Z)^{-1/2} \tilde{D}_{G,G^*}(Y, Z)$. Or la fonction $\tilde{D}_{G,G^*}(Y, .)$ est stable d'après sa définition. La fonction D l'est aussi, donc aussi L, ce qui achève la démonstration. □

11.5. Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. On a énoncé en 1.7 la conjecture de transfert en supposant que G^*_{der} était simplement connexe. Dans le cas général, Langlands et Shelstad introduisent une extension centrale $\tilde{H}$ de H, un sous-groupe $\tilde{Z}$ de $Z(\tilde{H})$, un caractère $\tilde{\mu}$ de $\tilde{Z}(F)$, un sous-ensemble $\tilde{H}_{G^*\text{-freg}}$ de $\tilde{H}$ et un facteur $\Delta_{G,\tilde{H}}$ sur $\tilde{H}_{G^*\text{-freg}}(F) \times G_{\text{freg}}(F)$ (cf. [LS2] 1.3. Il faut ici encore priver ces facteurs de leurs termes Δ_{IV}). Pour $f \in C_c^\infty(G(F))$ et $y \in \tilde{H}_{G^*\text{-freg}}(F)$, on pose

$$J^{G,\tilde{H}}(y, f) = \sum_x \Delta_{G,\tilde{H}}(y, x) J(x, f)$$

où x parcourt $G_{\text{freg}}(F)$ modulo conjugaison par $G(F)$. On dit que E vérifie la conjecture de transfert si pour toute $f \in C_c^\infty(G(F))$, il existe une fonction $f^{\tilde{H}}$ sur $\tilde{H}(F)$, localement constante, à support compact modulo $\tilde{Z}(F)$, telle que

$$f^{\tilde{H}}(zy) = \tilde{\mu}(z) f^{\tilde{H}}(y)$$

pour tous $y \in \tilde{H}(F), z \in \tilde{Z}(F)$, de sorte que l'on ait l'égalité

$$J(y, f^{\tilde{H}}) = J^{G,\tilde{H}}(y, f)$$

pour tout $y \in \tilde{H}_{G^*\text{-freg}}(F)$.

THÉORÈME. *Soit* $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. *Alors*

(i) *il existe une famille finie* $(k_i)_{i \in I}$ *de corps de nombres et, pour tout* $i \in I$, *des données* $\underline{E}_i \in \mathcal{E}(k_i)$, *telles que, si* $\underline{E}_i$ *vérifie la condition (lf) pour tout* $i \in I$, E *vérifie la conjecture de transfert*;

(ii) *supposons l'une des conditions suivantes vérifiées*:

https://doi.org/10.1023/A:1000103112268 Published online by Cambridge University Press

(a) G^* *est de type* A;
(b) $H = G^*$.

Alors E *vérifie la conjecture de transfert.*

Langlands et Shelstad ont introduit une conjecture de transfert local en l'élément neutre et montré qu'il existait une famille finie $(E_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathcal{E}(F)$ telle que si, pour tout $j \in J, E_j$ vérifie cette conjecture, alors E vérifie la conjecture de transfert (cf. [LS2] théorème 2.3). On a montré en [W1] VIII.6, Remarque 8, que si E_j vérifie la Conjecture 1.2, E_j vérifie aussi la conjecture de transfert local en l'élément neutre. Pour obtenir l'assertion (i), il suffit alors d'appliquer aux E_j le théorème 11.2. Il résulte de la définition des E_j (cf. [LS2] 1.4) que si E vérifie l'une des conditions de (ii), les E_j la vérifient aussi. On fait alors appel au Théorème 11.3 pour obtenir (ii). □

Bibliographie

[B] Bouaziz, A.: Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, *Invent. Math.* 115 (1994).

[C] Clozel, L.: The fundamental lemma for stable base change, *Duke Math. J.* 61 (1990), 255–302.

[H1] Hales, T.: On the fundamental lemma for standard endoscopy: reduction to unit elements, prépublication.

[H2] Hales, T.: A simple definition of transfer factors for unramified groups, *Contemporary Math.* 145 (1993), 109–134.

[HC] Harish-Chandra: Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups, in Collected papers IV, Springer-Verlag (1984), 371–437.

[K1] Kottwitz, R.: Stable trace formula: cuspidal tempered terms, *Duke Math. J.* 51 (1984), 611–650.

[K2] Kottwitz, R.: Stable trace formula: elliptic singular terms, *Math. Ann.* 275 (1986), 365–399.

[K3] Kottwitz, R.: Shimura varieties and twisted orbital integrals, *Math. Ann.* 269 (1984), 287–300.

[L] Langlands, R. P.: Les débuts d'une formule des traces stable, *Publ. Math.* de l'Univ. Paris 7, 13 (1979).

[LS1] Langlands, R. P. and Shelstad, D.: On the definition of transfer factors, *Math. Ann.* 278 (1987), 219–271.

[LS2] Langlands, R. P and Shelstad, D.: Descent for Transfer factors, in the Grothendieck Festschrift II, Birkhäuser (1991), 485–563.

[Oe] Oesterle, J.: Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p, *Invent. Math.* 78 (1984), 13–88.

[T] Tits, J.: Reductive groups over local fields, in Automorphic forms, representations and L-functions, *Proc. of Symp. in Pure Math.* 33, Part 1, AMS (1979), 29–69.

[W1] Waldspurger, J.-L.: Une formule des traces locale pour les algèbres de Lie p-adiques, *J. reine angew. Math.* 465 (1995), 41–99.

[W2] Waldspurger, J.-L.: Homogénéité de certaines distributions sur les groupes p-adiques, *Publ. Math. de l'IHES* 81 (1995), 25–72.

[W3] Waldspurger, J.-L.: Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires: un lemme fondamental, *J. Can. de Math.* 43 (1991), 852–896.

[We] Weil, A.: Sur certaines groupes d'opérateurs unitaires, in Oeuvres scientifiques III, Springer Verlag, 1–69.

References

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.