SUR LA CLASSIFICATION DES ESPACES FIBRÉS VECTORIELS HOLOMORPHES SUR UN TORE COMPLEXE ADMETTANT DES CONNEXIONS HOLOMORPHES

AKIHIKO MORIMOTO

Introduction. Dans ce travail nous étudierons le problème de classifier les espaces fibrés principaux holomorphes de groupe $GL(m, C)$ sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes i.e. la classification des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe admettant des connexions holomorphes. Récemment M. Matsushima [6] a démontré qu'un espace fibré vectoriel holomorphe sur un tore complexe admettant une connexion holomorphe de fibre de dimension 2 possède nécessairement une connexion holomorphe intégrable c.à.d. une connexion holomorphe dont la forme de courbure est nulle. D'autre part d'après Atiyah [1] on sait qu'un espace fibré holomorphe de base M et de groupe structural G admettant une connexion holomorphe intégrable est un espace fibré principal associé au revêtement universel de la base M par une représentation du groupe fondamental de M dans G et vice versa. En combinant ces deux résultats M. Matsushima a classifié tout complètement les espaces fibrés vectoriels holomorphes de fibre C^2 admettant des connexions holomorphes sur un tore complexe. Notre étude commence, par la généralisation du théorème cité plus haut: Un espace fibré vectoriel holomorphe sur un tore complexe admettant une connexion holomorphe possède nécessairement une connexion holomorphe intégrable. Ce théorème sera démontré en considérant l'espace fibré principal de groupe structural G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe (Théorème 2). En utilisant ce théorème et le théorème d'Atiyah nous pouvons classifier complètement les espaces fibrés vectoriels holomorphes admettant des connexions holomorphes sur un tore complexe de fibre de dimension 3 ou 4 (§6 et 7). En général, nous pouvons définir une notion de la *longueur* d'un espace fibré vectoriel en question qui

Received February 24, 1959.

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

peut être considérée comme une obstruction analytique, dans un sens, d'un espace fibré vectoriel holomorphe, et notre classification sera faite suivant la longueur (cf. Déf. 5.3). Nous trouverons que l'ensemble de tous les espaces fibrés admettant des connexions holomorphes est très abondant et on peut fabriquer une correspondance bi-univoque entre l'ensemble en question et un espace somme des variétés holomorphes et des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur des variétés holomorphes toujours très familières, par exemple, variété grassmannienne, variété de Stiefel, variété de drapeaux et l'espace projectif complexe. Dans le paragraphe 8 et le suivant nous étudierons l'espace fibré vectoriel à connexion holomorphe sur un tore complexe de fibre de dimension quelconque, en particulier, de longueur spéciale, et enfin nous ajouterons quelques remarques concernant le problème de classifier tout espace fibré vectoriel holomorphe qui n'admet pas nécessairement une connexion holomorphe.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à M. Y. Matsushima dont plusieurs suggestions ainsi que les encouragements constants m'ont été si indispensables.

§ 1. Automorphismes d'un espace fibré principal et connexions holomorphes

Soit $P(M, G, \pi)$ un espace fibré principal holomorphe de base M, de groupe structural G, et de projection π. Un automorphisme de $P(M, G, \pi)$ est, par définition, un homéomorphisme holomorphe $\tilde{f}$ de la variété complexe P qui commute avec les translations à droite par des éléments de G : $\tilde{f} \circ R_a = R_a \circ \tilde{f}$ $(a \in G)$, R_a désignant la translation à droite par un élément a de G. Le groupe de tous les automorphismes de $P(M, G, \pi)$ est un groupe de Lie complexe par la topologie de la convergence compacte si la base M est compacte. Ce groupe sera désigné par $F(P)$. L'algèbre de Lie de $F(P)$, qui sera noté $\mathfrak{f}(P)$, s'identifie avec l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes sur la variété P qui sont invariants par les translations à droite. Soit $A(M)$ le groupe des homéomorphismes holomorphes de M sur lui-même munissant de la topologie de la convergence compacte. Si M est compacte, $A(M)$ est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie s'identifie avec l'algèbre de Lie des champs de vecteurs conformes sur M. On a un homomorphisme canonique de $F(P)$ dans $A(M)$, qui sera désigné encore par π, tel que

$$\pi \circ \tilde{f} = (\pi \tilde{f}) \circ \pi \quad \text{pour tout} \quad \tilde{f} \in F(P).$$

L'homomorphisme π est holomorphe. Désignons par $F_0(P)$ (resp. $A_0(M)$) la composante connexe de l'élément neutre de $F(P)$ (resp. $A(M)$). (Pour les faits cités ci-dessus, voir [8]).

Considérons, maintenant, une connexion différentiable Γ sur l'espace fibré $P(M, G, \pi)$.[1] Désignons par T_x l'espace tangent de P au point $x \in P$ et par Q_x le sous-espace horizontal de T_x défini par la connexion Γ. Soit ω la forme de connexion de Γ. La connexion Γ sera dite holomorphe si la forme ω est holomorphe. Soit I_P le tenseur sur P définissant la structure complexe de P. Une connexion Γ sur $P(M, G, \pi)$ est holomorphe si et seulement si les deux conditions suivantes soient satisfaites:

1) $I_P Q_x \subset Q_x$ pour tout $x \in P$,

2) Pour tout champ de vecteurs conforme X défini dans un ouvert de M le relèvement X^* de X relatif à Γ est conforme.

Une connexion Γ sera dite intégrable si la forme de courbure de Γ est nulle. D'après Atiyah [1] on sait le fait suivant:

Pour qu'un espace fibré holomorphe $P(M, G, \pi)$ possède une connexion holomorphe intégrable il faut et il suffit qu'il soit l'espace fibré principal associé à $\tilde{M}(M, \Pi, p)$ par une représentation du groupe fondamental Π de M dans G, où $\tilde{M}(M, \Pi, p)$ désigne le revêtement universel de M.

Soit $P'(M, G', \pi')$ un espace fibré holomorphe de base M de groupe structural G' et de projection π'. Un homomorphisme α de $P'(M, G', \pi')$ dans $P(M, G, \pi)$ est défini par une application holomorphe α de P' dans P et un homomorphisme holomorphe α de G' dans G tels que $\pi'(x') = \pi(\alpha x')$, $\alpha(x' \cdot a') = \alpha(x') \cdot \alpha(a')$ pour tout $x' \in P'$ et $a' \in G'$. Dans ce cas $P(M, G, \pi)$ est l'espace fibré associé à $P'(M, G', \pi')$ par la représentation α de G' dans G. S'il existe une connexion holomorphe intégrable sur $P'(M, G', \pi')$ alors $P(M, G, \pi)$ possède aussi une connexion holomorphe intégrable, car, puis qu'il existe un homomorphisme de $\tilde{M}(M, \Pi, p)$ dans $P'(M, G', \pi)$, on obtient aussi un homomorphisme de $\tilde{M}(M, \Pi, p)$ dans $P(M, G, \pi)$ et par suite $P(M, G, \pi)$ est l'espace fibré principal associé à $\tilde{M}(M, \Pi, p)$ par une représentation de Π dans G.

§2. Tores complexes

Dans tout ce qui suit nous désignerons par T^n un tore complexe de

[1] Pour la notion de la connexion dans un espace fibré nous suiverons Nomizu [10]. Pour la théorie générale de la connexion holomorphe, voir Atiyah [1].

dimension complexe n. On peut identifier T^n avec un sous-groupe du groupe des automorphisme $A(T^n)$ de la variété complexe T^n. On sait que la composante connexe de l'élément neutre de $A(T^n)$ coïncide avec T^n. Si la base M d'un espace fibré $P(M, G, \pi)$ est un tore complexe on a le théorème suivant dû à Matsushima [6]:

Un espace fibré principal holomorphe $P(T^n, G, \pi)$ de base T^n possède une connexion holomorphe si et seulement si l'homomorphisme canonique π_0 de $F_0(P)$ dans $A_0(T)$ est surjectif.

Quant à la connexion holomorphe intégrable nous avons le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Un espace fibré principal holomorphe $P(T^n, G, \pi)$ possède une connexion holomorphe intégrable si et seulement s'il existe un sous-groupe de Lie complexe abélien H de $F_0(P)$ tel que $\pi_0(H) = A_0(T^n)$.*

En effet, supposons que l'espace fibré $P(T^n, G, \pi)$ possède une connexion intégrable Γ. Soit $\mathfrak{h}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{f}(P)$ constitué par tous les relèvements X^* de $X \in \mathfrak{a}$ relatif à Γ, $\mathfrak{a}$ désignant l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants sur le groupe de Lie T^n. On va montrer que $[X^*, Y^*] = 0$ pour tout X et Y dans $\mathfrak{a}$. Puisque $h[X^*, Y^*] = [X, Y]^* = 0$, h désignant la projection de T_x sur Q_x, il nous suffit de montrer que la composante verticale de $[X^*, Y^*]$ est nulle. Pour cela il suffit de montrer que $\omega([X^*, Y^*]) = 0$. Or, la connexion Γ étant intégrable, on a l'égalité suivante:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

On a donc $d\omega(X^*, Y^*) = 0$. D'autre part, $d\omega(X^*, Y^*) = \frac{1}{2}\{X^* \cdot \omega(Y^*) - Y^* \cdot \omega(X^*) - \omega([X^*, Y^*])\} = -\frac{1}{2}\omega([X^*, Y^*])$. Il en résulte que $\omega([X^*, Y^*]) = 0$. Par conséquent on voit que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie complexe abélienne de $\mathfrak{f}(P)$. Soit H le sous-groupe de $F_0(P)$ correspondant à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On a manifestement $\pi_0(H) = A_0(T^n)$. Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-groupe de Lie complexe abélien H de $F(P)$ tel que $\pi_0(H) = A_0(T^n)$. Soit $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{f}(P)$ correspondant à H. Il est évident que $\pi'(\mathfrak{h}) = \mathfrak{a}$, où π' désigne le différentiel de l'homomorphisme π de $F(P)$ dans $A(M)$. Puisque π est holomorphe on peut trouver une sous-algèbre complexe $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$ telle que la restriction de π' à $\mathfrak{h}'$ est une bijection de

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$\mathfrak{h}'$ sur $\mathfrak{a}$. Posons $Q_x = \{L_x \mid L \in \mathfrak{h}'\}$ ou L_x désigne la valeur du champ de vecteurs L en un point $x \in P$. On voit que Q_x $(x \in P)$ définit une connexion holomorphe Γ sur P en verifiant les deux conditions 1) et 2) dans § 1. Il nous suffit donc de montrer que Γ est intégrable. Pour le montrer remarquons d'abord que l'on a $X^* = \pi_1^{-1}(X)$ pour $X \in \mathfrak{a}$ où X^* désigne le relèvement de X relatif à Γ et où π_1 designe la restriction de π' à $\mathfrak{h}'$. On a donc $[X^*, Y^*] = 0$ pour $X, Y \in \mathfrak{a}$. D'autre part la forme de courbure Ω de Γ est donnée par la formule suivante:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Pour montrer que $\Omega = 0$ il suffit de verifier $\Omega(X^*, Y^*) = 0$ pour $X, Y \in \mathfrak{a}$. Or, $\Omega(X^*, Y^*) = d\omega(X^*, Y^*) = -\frac{1}{2}\omega([X^*, Y^*]) = 0$. Le lemme est ainsi établi.

Soit maintenant $T^n = A/\Pi$, où A est un espace vectoriel complexe de dimension complexe n et où Π est un sous-groupe discret de A de rang $2n$. On peut considérer A comme espace vectoriel réel de dimension réelle $2n$, que nous désignerons par A_0. L'espace vectoriel A_0 est engendré par Π sur le corps des nombres réels R. Soit φ un homomorphisme de Π dans le groupe additif des nombres complexes C. On peut uniquement prolonger φ à une fonction R-linéaire de A_0 dans C que l'on désignera encore par φ. Soit A_0^{*c} l'espace vectoriel complexe constitué par des fonctions R-linéaire sur A_0 à valeurs dans C et soit A^* le sous-espace vectoriel complexe de A_0^{*c} constitué par des fonctions C-linéaires sur A. Soit maintenant $F(\varphi)$ l'ensemble des fonctions holomorphes f définies sur A telles que

$$f(x+b) = f(x) + \varphi(b) \qquad \text{pour tout} \quad x \in A \text{ et } b \in \Pi.$$

Ceci dit, on a le lemme suivant qui sera fréquemment utilisé dans § 6, 7 et 8. (Cf. Lemme 6.3 [6].)

LEMME 2.2. *Pour que $F(\varphi)$ ne soit pas vide il faut et il suffit que $\varphi \in A^*$.*

§ 3. Groupes de Lie nilpotents simplement connexes

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Désignons par exp l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. On sait que exp est une bijection de $\mathfrak{g}$ sur G. De plus si G est de Lie complexe exp est une bijection holomorphe (cf. [7]). Cela étant dit on va prouver le lemme suivant:

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

LEMME 3.1. *Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Supposons qu'on ait l'égalité suivante*

$$g\cdot\exp a=\exp a'\cdot g \qquad \textit{pour deux} \quad a,\ a'\in\mathfrak{g} \ \textit{et un}\ g\in G.$$

Alors pour tout nombre réel t on a l'égalité suivante

$$g\cdot\exp ta=\exp ta'\cdot g.$$

En effet, $\exp a'=g\cdot\exp a\cdot g^{-1}=\exp(Ad(g)\cdot a)$. Puisque l'application exp est injective on a $a'=Ad(g)\cdot a$. On a alors $ta'=Ad(g)\cdot ta$ et par suite on a $\exp ta'=\exp(Ad(g)\cdot ta)=g\cdot\exp ta\cdot g^{-1}$. c.q.f.d.

LEMME 3.2. *Les notations étant celles du §2, soit φ un homomorphisme de Π dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe G. Alors on peut uniquement prolonger φ à un homomorphisme (continu) de A dans G.*

Posons, en effet, $\varphi(b)=\exp\psi(b)$ pour $b\in\Pi$. Puisque $\varphi(b+b')=\varphi(b)\cdot\varphi(b')$ $=\varphi(b')\cdot\varphi(b)$, on a

$$\exp\psi(b)\cdot\exp\psi(b')=\exp\psi(b')\cdot\exp\psi(b) \qquad \text{pour} \quad b,\ b'\in\Pi.$$

En utilisant deux fois le Lemme 3.1 on obtient

$$\exp t\psi(b)\cdot\exp s\psi(b')=\exp s\psi(b')\cdot\exp t\psi(b)$$

pour tout $s,\ t\in R$. Par suite on a $[\psi(b),\ \psi(b')]=0$. On a donc

$$\begin{aligned}\exp(\psi(b)+\psi(b'))&=\exp\psi(b)\cdot\exp\psi(b')\\&=\varphi(b)\cdot\varphi(b')=\varphi(b+b')=\exp\psi(b+b').\end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$\psi(b+b')=\psi(b)+\psi(b'), \tag{3.1}$$

car l'application exp est injective. Soit $\{b_1,\ldots,b_{2n}\}$ $(b_i\in\Pi,\ i=1,\ldots,2n)$ une base de l'espace vectoriel A_0. Maintenant posons:

$$\tilde{\varphi}\Big(\sum_{i=1}^{2n}t_ib_i\Big)=\exp\sum_{i=1}^{2n}t_i\psi(b_i),$$

pour $t_i\in R$, $i=1,2,\ldots,2n$. D'après (3.1) on voit que la définition de $\tilde{\varphi}$ ne dépend pas du choix de base $\{b_1,\ldots,b_{2n}\}$ et que $\tilde{\varphi}$ est un homomorphisme de A dans G et que $\tilde{\varphi}(b)=\varphi(b)$ pour $b\in\Pi$. Pour montrer l'unicité du prolongement soit $\tilde{\varphi}_1$ un homomorphisme prolongé de φ. Puisque, pour tout entier

$k > 0$, on a

$$\left(\tilde{\varphi}_1\left(\frac{1}{k}b\right)\right)^k = \varphi(b) = \exp\psi(b) = \left(\exp\frac{1}{k}\psi(b)\right)^k$$

on obtient

$$\tilde{\varphi}_1\left(\frac{1}{k}b\right) = \exp\frac{1}{k}\psi(b) = \tilde{\varphi}\left(\frac{1}{k}b\right)$$

pour tout $b \in \Pi$, car $g^k = g'^k$ entraîne $g = g'$ pour $g, g' \in G$. Ensuite on obtient l'égalité

$$\tilde{\varphi}_1\left(\frac{m}{k}b\right) = \tilde{\varphi}\left(\frac{m}{k}b\right)$$

pour tout entier m et $k > 0$. Il en résulte immédiatement que $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}$ et le lemme est démontré.

§ 4. Existence d'une connexion holomorphe intégrable

Démontrons d'abord le théorème suivant

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe de Lie complexe nilpotent simplement connexe. Supposons qu'un espace fibré principal holomorphe $P(T^n, G, \pi)$ possède une connexion holomorphe. Alors $P(T^n, G, \pi)$ possède nécessairement une connexion holomorphe intégrable.*

Pour démontrer le Théorème 1 établissons trois lemmes suivants.

LEMME 4.1. *Soit $P(M, G, \pi)$ un espace fibré principal holomorphe de base M et de groupe structural G (dans ce lemme G est un groupe de Lie complexe quelconque). Considérons l'ensemble $\Gamma(P)$ de toutes les applications holomorphes f de P dans G satisfaisant à la condition suivante*

(4.1) $\qquad f(x \cdot g) = g^{-1} \cdot f(x) \cdot g \qquad$ *pour tout* $\; x \in P$ *et* $g \in G$.

Si l'on définit la multiplication de deux éléments f et f' de $\Gamma(P)$ par:

(4.2) $\qquad (f \cdot f')(x) = f(x) \cdot f'(x) \qquad$ *pour* $\; x \in P$

et si l'on introduit la topologie de la convergence compacte dans $\Gamma(P)$, alors $\Gamma(P)$ devient un groupe topologique.

En effect, on voit facilement que $\Gamma(P)$ est un groupe abstrait par la multiplication définie par (4.2). Or, pour un compact K dans P et un voisinage ouvert U de l'élément neutre de G nous posons $W(K, U) = \{f \mid f \in \Gamma(P),$

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$f(K) \subset U\}$. Alors le système fondamental des voisinages ouverts de l'élément neutre de $\Gamma(P)$ est, par définition, constitué par des ensembles de la forme $\bigcap_{i=1}^{m} W(K_i, U_i)$ où K_i est un compact dans P et où U_i est un voisinage ouvert de l'élément neutre de G. Dans ce cas il est immédiat de verifier les conditions pour que $\Gamma(P)$ devienne un groupe topologique.

LEMME 4.2. *Soit $P(M, G, \pi)$ un espace fibré principal holomorphe de base M et de group structural G quelconque. Posons $B(P) = \{\tilde{f} \in F(P) \mid \pi\tilde{f} = \text{id. de } M\}$. Alors il existe un isomorphisme topologique α de $\Gamma(P)$ sur $B(P)$.*

En effet, soit $\tilde{f}$ un élément de $B(P)$. Puisque $\pi\tilde{f}$ est l'identité de M, on a pour tout $x \in P$, $\pi(x) = \pi(\tilde{f}(x))$; c-à-d. x et $\tilde{f}(x)$ sont contenus dans une même fibre. Par suite il existe un élément $f(x)$ de G tel que

$$\tilde{f}(x) = x \cdot f(x). \tag{4.3}$$

Puisque $\tilde{f}$ est holomorphe on voit facilement que f est une application holomorphe de P dans G. D'autre part puisque $\tilde{f}$ est un automorphisme de $P(M, G, \pi)$, on obtient l'égalité (4.1). Par conséquent f est un élément de $\Gamma(P)$. Réciproquement pour un élément f de $\Gamma(P)$ on peut définir un élément $\tilde{f}$ de $B(P)$ par (4.3). On voit que la correspondance ainsi établie $\alpha : f \to \tilde{f}$ est une correspondance bi-univoque. Puisque $B(P)$ se munit de la topologie de la convergence compacte on peut directement verifier la bi-continuité de α et le lemme est ainsi établi.

LEMME 4.3. *Si G est un groupe de Lie complexe nilpotent simplement connexe, pour tout espace fibré principal holomorphe $P(M, G, \pi)$ de groupe structural G, le groupe $B(P)$ défini dans le Lemme 4.2 est connexe.*

En effet d'après le Lemme 4.2 il suffit de montrer que le groupe $\Gamma(P)$ est connexe. Pour cela, prenons un élément f de $\Gamma(P)$. On a l'égalité (4.1). Puisque G est un groupe de Lie complexe nilpotent simplement connexe l'application exp de $\mathfrak{g}$ dans G est bijective holomorphe où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G. On peut donc écrire comme suit:

$$f(x) = \exp h(x) \qquad \text{pour} \quad x \in P,$$

où h est une application holomorphe de P dans $\mathfrak{g}$. Posons $f_t(x) = \exp t \cdot h(x)$ pour $t \in R$. Alors, d'après le Lemme 3.1 on voit que $f_t \in \Gamma(P)$ pour tout $t \in R$

et que f_0 est l'élément neutre de $\Gamma(P)$ et que $f_1 = f$. Il nous reste donc dé montrer que l'homomorphisme ρ de R dans $\Gamma(P)$ défini par $t \to f_t$ est continu. Pour cela prenons un compact K dans P et un voisinage ouvert U de l'élément neutre de G. Puisque ρ est homomorphisme il suffit de montrer qu'il existe un nombre positif δ tel que

$$f_t \in W(K, U) \qquad \text{pour} \quad |t| < \delta.$$

Or, puisque $h(K)$ est un compact dans $\mathfrak{g}$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$t \cdot h(K) \subset (\exp)^{-1}(U) \qquad \text{pour} \quad |t| < \delta.$$

On a alors $f_t(K) = \exp(t \cdot h(K)) \subset U$ pour $|t| < \delta$, par suite $f_t \in W(K, U)$ pour $|t| < \delta$. Le lemme est ainsi démontré.

Démonstration du Théorème 1. Puisque $B(P)$ est connexe (Lemme 4.3) le noyau de l'homomorphisme canonique π_0 de $F_0(P)$ dans $A_0(T^n)$ coïncide avec $B(P)$ car $B(P)$ est le noyau de l'homomorphisme π de $F(P)$ dans $A(T^n)$. Puisque $P(T^n, G, \pi)$ possède une connexion holomorphe π_0 est surjectif. D'autre part, puisque $A_0(T^n) \simeq T^n$ est compact, d'après un théorème d'Iwasawa (cf. Lemme 3.15 [5]) la restriction π_K de π_0 à un sous-groupe compact maximal K de $F_0(P)$ est aussi surjectif.

Soit $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K et soit $\mathfrak{n}$ l'idéal de $\mathfrak{k}$ correspondant au noyau de l'homomorphisme π_K. Puisque K est un groupe compact on peut trouver un idéal abélien $\mathfrak{h}^1$ de $\mathfrak{k}$ qui est complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{k}$.

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}^1 \qquad \text{(somme directe)}.$$

Soit $\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{f}(P)$ engendré par $\mathfrak{h}^1$. Il est clair que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre complexe abélienne de $\mathfrak{f}(P)$. Il en résulte que le sous-groupe complexe abélien H de $F(P)$ correspondant à $\mathfrak{h}$ est appliqué par π_0 sur $A_0(T^n)$. D'après le Lemme 2.1 le Théorème 1 est ainsi démontré.

Soit maintenant $E(M, C^m)$ un espace fibré vectoriel holomorphe de base M et de fibre C^m. Nous dirons que $E(M, C^m)$ possède une connexion holomorphe (intégrable) si l'espace fibré principal holomorphe associé $P(M, GL(m, C))$ à $E(M, C^m)$ possède une connexion holomorphe (intégrable).

Nous allons montrer que le Théorème 1 entraîne le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Si un espace fibré vectoriel holomorphe* $E(T^n, C^m)$ *de base* T^n *et de fibre* C^m (m : *quelconque*) *possède une connexion holomorphe,* $E(T^n, C^m)$

possède nécessairement une connexion holomorphe intégrable.

Démonstration. D'après un résultat de Matsushima, on peut supposer que E soit indécomposable et de plus on peut supposer que le groupe structural de E se réduit au sous-groupe $N(m, C)$ de $GL(m, C)$ constitué par des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ dont les nombres sur la diagonal sont tous 1 (cf. Th. 3 [6]). Puisque l'on sait que dans l'espace fibré principal P_1 réduit de $P(T^n, GL(m, C))$ au groupe structural N(m, C) possède une connexion holomorphe, et puisque $N(m, C)$ est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, on peut appliquer le Théorème 1 et par suite on peut conclure que l'espace fibré P_1 possède une connexion holomorphe intégrable. Puisqu'il existe un homomorphisme canonique de P_1 dans P, P possède aussi une connexion holomorphe intégrable (voir la fin de § 1). Le Théorème 2 est ainsi démontré.

Si l'espace fibré principal holomorphe $P(T^n, G, \pi)$ de base T^n et de groupe structural G qui est un groupe de Lie abélien simplement connexe possède une connexion holomorphe Γ, alors la connexion Γ est nécessairement intégrable (cf. [9]). On se demande donc si toute connexion holomorphe d'un espace fibré principal holomorphe de base T^n et de groupe structural G nilpotent simplement connexe est nécessairement intégrable. Nous pouvons répondre négativement à cette question par la proposition suivante qui ne sera pas, d'ailleurs, utilisée dans la suite et donc nous en donnerons pas la démonstration.

PROPOSITION 4.1. *Soit G un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie n'est pas abélienne. Alors il existe toujours une connexion holomorphe non intégrable sur l'espace fibré principal trivial $T^n \times G(T^n, G, \pi)$ pour tout $n \geqq 2$.*

§ 5. Propriétés générales des espaces fibrés vectoriels holomorphes possédant des connexions holomorphes

Suivant les notations introduites dans [6], nous utiliserons dans tout ce qui suit les notations suivantes. $T^n = A/\Pi$ désigne toujours un tore complexe de dimension complexe n.

$H(T^n, m)$: L'ensemble des espaces fibrés principaux holomorphes sur T^n de groupe structural $GL(m, C)$.

$\mathbf{H}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$: L'ensemble des classes d'équivalences des espaces fibrés dans $H(T^n, m)$,

$E(T^n, m)$: L'ensemble des espaces fibrés principaux holomorphes sur T^n de groupe structural $GL(m, C)$ dont les espaces fibrés vectoriels associés sont indécomposables et qui possèdent des connexions holomorphes.

$\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$: Le sous-ensemble de $H(T^n, m)$ des classes qui contiennent des espaces fibrés dans $E(T^n, m)$.

$N(m, C)$: Le sous-groupe de $GL(m, C)$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $N'(T^n, m)$ l'ensemble des espaces fibrés principaux holomorphes sur T^n de groupe structural $N(m, C)$ admettant une connexion holomorphe. L'application identique j de $N(m, C)$ dans $GL(m, C)$ induit une application j de $N'(T^n, m)$ dans $H(T^n, m)$. Tout espace fibré dans $j \cdot N'(T^n, m)$ possède une connexion holomorphe.

$N(T^n, m)$: L'ensemble des espaces fibrés dans $j \cdot N'(T^n, m)$ qui sont indécomposables:

$$N(T^n, m) = E(T^n, m) \cap j \cdot N'(T^n, m).$$

$\mathbf{N}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$: Le sous-ensemble de $\mathbf{H}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$ des classes qui contiennent des espaces fibrés dans $N(T^n, m)$.

Soit maintenant φ une représentation de Π dans $GL(m, C)$. Nous désignerons par E_φ l'espace fibré vectoriel holomorphe sur T^n associé à la représentation φ c-à-d. $E_\varphi = A \times_\varphi C^m$ est l'espace quotient de $A \times C^m$ par la relation d'équivalence définie par $(x, \xi) \sim (x + b, \varphi(b)^{-1} \cdot \xi)$ pour $x \in A$, $b \in \Pi$ et $\xi \in C^m$. E_φ sera dit aussi l'espace fibré vectoriel défini par la représentation φ ou bien on dira que E_φ se définit par la représentation φ. Si $\varphi(\Pi) \subset N(m, C)$ nous appelerons φ une représentation *unipotente* de Π de degré m.

Le lemme suivant est facile à démontrer:

LEMME 5.1. *Soient φ et φ' deux représentations de Π dans $GL(m, C)$. Pour que $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$ il faut et il suffit qu'il existe une application holomorphe f de A dans $GL(m, C)$ telle que $f(x+b) = \varphi'(-b) \cdot f(x) \varphi(b)$ pour tout $x \in A$ et $b \in \Pi$.*

Nous écrirons $\varphi \sim \varphi'$ si $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$ et nous dirons que φ et φ' sont équivalents. Alors, d'après le Théorème 2 et la remarque faite à la fin du § 1 on peut identifier $N(T^n, m)$ avec l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unipotentes de degré m de Π. Par conséquent pour classifier l'ensemble

$E(T^n, m)$ il nous reste de classifier $N(T^n, m)$ d'après Théorème 3 [6]. Ce paragraphe et les suivants seront consacrés à l'étude de $N(T^n, m)$.

Pour un espace fibré vectoriel holomorphe E désignons par $\Gamma(E)$ l'espace vectoriel complexe des sections holomorphes de E. On a alors le lemme suivant.

LEMME 5.2. *Soit E_φ l'espace fibré vectoriel holomorphe défini par une représentation φ de Π dans $GL(m, C)$. Alors $\Gamma(E_\varphi)$ s'identifie avec l'espace vectoriel complexe $\Gamma(\varphi)$ des applications holomorphes ξ de A dans C^m telles que*

$$\xi(x+b) = \varphi(b)^{-1} \cdot \xi(x) \qquad \textit{pour} \quad x \in A \textit{ et } b \in \Pi. \tag{5.1}$$

En effet, soit σ une section holomorphe de E_φ sur T^n. Puisque $E_\varphi = A \times_\varphi C^m$, on peut définir une application de A dans C^m par la formule suivante:

$$\sigma(px) = \rho(x, \xi(x)) \qquad \text{pour} \quad x \in A, \tag{5.2}$$

où p désigne la projection canonique de A sur T^n et où ρ celle de $A \times C^m$ sur E_φ. On voit que l'application ξ est holomorphe et que ξ satisfait à l'égalité (5.1). Réciproquement pour tout ξ satisfaisant à (5.1) on peut définir une section holomorphe σ de E par (5.2). La correspondance $\sigma \longleftrightarrow \xi$ ainsi définie est une bijection linéaire entre $\Gamma(E_\varphi)$ et $\Gamma(\varphi)$ et le lemme est démontré.

Définition 5.1. Une application holomorphe $\tilde{h}$ d'un espace fibré vectoriel holomorphe E dans un autre E' sur une même base M sera dite un ***homomorphisme*** de E dans E' si les deux conditions suivantes soient satisfaites:

1) Il existe un automorphisme h de la base M (qui sera appelé la projection de $\tilde{h}$) tel que $\tilde{h}(E_u) = E_{h(u)}$ pour tout $u \in M$ où E_u désigne la fibre de E au-dessus de u.

2) La restriction de $\tilde{h}$ à la fibre E_u est une application linéaire de E_u dans $E_{h(u)}$ pour tout $u \in M$.

En particulier, si $E = E'$ et si $\tilde{h}$ est une application bijective de E sur lui-même, h sera appelé un ***automorphisme*** de l'espace fibré vectoriel E. On sait que le groupe des automorphismes $F(E)$ s'identifie avec le groupe des automorphismes $F(P)$ de l'espace fibré principal associé P à E.[2]

Définition 5.2. Une sous-variété fermée E' de l'espace fibré vectoriel holomorphe E de base M sera dite un *sous-espace fibré vectoriel* (holomorphe)

[2] Cf. [6] § 2. B.

de E si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

1) E' se munit d'une structure d'un espace fibré vectoriel holomorphe de base M et de projection π', où π' désigne la restriction à E' de la projection π de E sur M.

2) L'injection j de E' dans E est un homomorphisme de l'espace fibré vectoriel E' dans l'espace fibré vectoriel E.

3) Il existe une suite exacte des espaces fibrés vectoriels holomorphes

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{j} E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0.$$

Ici E'' sera appelé *l'espace fibré quotient* de E par E' et sera désigné par $E'' = E/E'$.

Lemme 5.3. *Soit φ une représentation unipotente de Π de degré m. Soit j_φ l'application de $T^n \times \Gamma(E_\varphi)$ dans E_φ définie par $j_\varphi(u, \sigma) = \sigma(u)$ pour $u \in T^n$ et $\sigma \in \Gamma(E_\varphi)$. Alors $1 \leqq \dim \Gamma(E_\varphi) \leqq m$ et j_φ est un homomorphisme injectif de l'espace fibré vectoriel trivial de fibre C^{m_1} dans E_φ, m_1 étant* $\dim \Gamma(E_\varphi)$.

Soit, en effet, ξ l'application de A dans C^m telle que $\xi(x) = (\xi_1, 0, \ldots, 0) \in C^m$ où ξ_1 est un nombre complexe constant. On voit que $\xi \in \Gamma(\varphi)$ car φ est unipotente. Puisque le nombre ξ_1 peut être choisi arbitrairement on a $\dim \Gamma(E_\varphi) = \dim \Gamma(\varphi) \geqq 1$. Pour montrer l'inégalité $\dim \Gamma(E_\varphi) \leqq m$ il suffit de montrer l'injectivité de j_φ. Soit maintenant $\sigma \in \Gamma(E_\varphi)$ et supposons que $\sigma(u_0) = j_\varphi(u_0, \sigma) = 0$ pour un point $u_0 \in T^n$. Il faut montrer que $\sigma = 0$ en tant qu'une section de E_φ. Pour cela prenons l'élément $\xi \in \Gamma(\varphi)$ correspondant à σ par le Lemme 5.2. Il suffit de montrer que $\xi(x) = 0$ pour tout $x \in A$. Soient $(\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x))$ les composantes de $\xi(x)$ dans C^m. Puisque $\xi(x+b) = \varphi(b)^{-1} \cdot \xi(x)$ on a

$$\xi_i(x+b) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(-b) \cdot \xi_j(x), \quad \text{où} \quad \varphi(b) = (\varphi_{ij}(b)).$$

Choisissons un point x_0 tel que $p(x_0) = u_0$, p étant la projection de A sur T^n. Puisque $\sigma(u_0) = 0$ on a évidemment $\xi(x_0) = 0$, en particulier $\xi_m(x_0) = 0$. D'autre part, puisque φ est unipotente on a $\varphi_{m,j}(b) = 0$ pour $j = 1, \ldots, m-1$, $\varphi_{m,m}(b) = 1$ pour tout $b \in \Pi$. Par suite on a $\xi_m(x+b) = \xi_m(x)$ pour tout $x \in A$ et $b \in \Pi$. On a donc $\xi_m = \text{const.} = \xi_m(x_0) = 0$, car ξ_m est une fonction holomorphe sur A invariante par Π. D'après le raisonnement analogue on obtient $\xi_{m-1}(x+b) = \xi_{m-1}(x)$ pour tout $x \in A$ et $b \in \Pi$ et on voit que $\xi_{m-1} = 0$ et ainsi de suite. L'application ξ est donc nulle. c.q.f.d.

Le lemme suivant est facile à démontrer.

LEMME 5.4. *Soit V un sous-espace vectoriel complexe de $\Gamma(E_\varphi)$, φ étant une représentation unipotente de Π de degré m. Alors l'image de $T^n \times V$ par l'homomorphisme j_φ défini dans le Lemme* 5.3 *est un sous-espace fibré vectoriel trivial de E_φ. En particulier si $V = \Gamma(E_\varphi)$ l'image de j_φ est le plus grand sous-espace fibré vectoriel trivial de E_φ.*

COROLLAIRE 5.1. *Soit φ une représentation unipotente de Π de degré m. Si* $\dim \Gamma(E_\varphi) = m$, *alors E_φ est un espace fibré vectoriel trivial.*

En effet, d'après le Lemme 5.3 et 5.4 j_φ est un isomorphisme de $T^n \times \Gamma(E_\varphi)$ sur E_φ.

PROPOSITION 5.1. *Soit φ une représentation unipotente de Π de degré m et soit $E_\varphi = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s$ la décomposition de E_φ dans les espaces fibrés indécomposables $E_1, \ldots, E_s$.*[3] *Alors il existe une représentation unipotente φ_i telle que $E_i \simeq E_{\varphi_i}$ pour $i = 1, \ldots, s$.*

Démonstration. Soit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}$, alors φ' est une représentation unipotente de Π. Soit I l'image de $A \times C^1$ par ρ, où ρ désigne la projection canonique de $A \times C^m$ sur $E_\varphi = A \times_\varphi C^m$ et où C^1 désigne le sous-espace de dimension 1 de C^m constitué par des éléments $(\xi_1, 0, \ldots, 0)$ de C^m. On voit que I est un sous-espace fibré vectoriel de E_φ et que E_φ / I est isomorphe à $E_{\varphi'}$. Si $m = 1$ il n'y a rien à démontrer. Nous allons donc démontrer le lemme par récurrence sur m. Supposons que le lemme soit verifié si le degré de φ est $< m$. Puisque E_i est un espace fibré vectoriel indécomposable admettant une connexion holomorphe, il existe un espace fibré vectoriel $L_i \in E(T^n, 1)$ et une représentation unipotente φ_i tels que $E_i \simeq L_i \otimes E_{\varphi_i}$ pour $i = 1, \ldots, s$ (cf. [6]). Soit p_i la projection canonique de E_φ sur E_i. Soit σ la section de E_φ correspondant à $\xi = (1, 0, \ldots, 0) \in \Gamma(\varphi)$. Considérons la section $p_i \circ \sigma$ de E_i. Supposons que $p_i \circ \sigma \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq r$ et que $p_i \circ \sigma = 0$ pour $i > r$. Alors L_i est trivial pour $1 \leqq i \leqq r$ d'après le Lemme 5.2 [6]. L'espace fibré E_i est donc isomorphe à E_{φ_i} pour $1 \leqq i \leqq r$. Considérons ensuite l'espace fibré quotient

[3] La décomposition de E en les facteurs indécomposables est unique à une permutation près (cf. Atiyah [3]).

$E_\varphi/I \simeq ((E_1 \oplus \cdots \oplus E_r)/I) \oplus E_{r+1} \oplus \cdots \oplus E_s$. En utilisant l'hypothèse du récurrence pour $\dot{E}_\varphi/I \simeq E_{\varphi'}$ on voit que E_i est isomorphe à E_{φ_i} pour $i > r$, et le lemme est démontré.

Corollaire 5.2. *Soit φ une représentation unipotente de Π. Si* $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$, *alors E_φ est indécomposable.*

En effet, si E_φ se décompose on a $\dim \Gamma(E_\varphi) \geqq 2$ d'après le Lemme 5.3 et la Proposition 5.1.

Nous pouvons démontrer le lemme suivant comme dans le cas des espaces vectoriels usuels.

Lemme 5.5. *Supposons qu'on ait trois suites exactes des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur une même base:*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} E_1' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\lambda_1} E_1 \xrightarrow{\mu_1} E_2' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E \xrightarrow{\mu_2} E_3' \longrightarrow 0$$

telles que $\lambda_2 = \lambda \circ \lambda_1$. Alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow E_2' \longrightarrow E_3' \longrightarrow E_1' \longrightarrow 0.$$

On peut décrire ceci symboliquement comme suit:

$$E/E_1 \simeq (E/E_2)/(E_1/E_2).$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Soit φ une représentation de Π de degré m et soit E° le plus grand sous-espace fibré vectoriel trivial de $E = E_\varphi$. Alors il existe une représentation unipotente φ_0 de Π telle que*

$$E/E^\circ \simeq E_{\varphi_0}.$$

Pour démontrer la Proposition 5.2 établissons d'abord le lemme suivant:

Lemme 5.6. *Les notations étant celles de la Proposition* 5.2 *E/E° possède une connexion holomorphe.*

En effet, prenons un automorphisme $\tilde{f}$ de E. Puisque $\tilde{f}(E^\circ)$ est un sous-espace fibré trivial de E et que E° est le plus grand sous-espace fibré trivial, on voit que $\tilde{f}(E^\circ) \subset E^\circ$ et par suite que $\tilde{f}(E^\circ)$ coïncide avec E°. L'automorphisme $\tilde{f}$ induit alors un automorphisme $\tilde{f}_1$ de E/E° tel que $\pi\tilde{f}=\pi\tilde{f}_1$ où $\pi\tilde{f}$ désigne la projection de $\tilde{f}$. Il en résulte que l'homomorphisme canonique de $F_0(E/E^\circ)$ dans $A_0(T^n)$ est surjectif car celui de $F_0(E)$ dans $A_0(T^n)$ est surjectif. Par conséquent E/E° possède une connexion holomorphe (cf. [6]).

Démonstration de la proposition 5.2 par récurrence sur m. Si $m=1$, alors E_φ est trivial et il n'y a rien à prouver. Supposons que la proposition soit démontrée pour le cas où le degré de $\varphi < m$ et démontrons la proposition pour φ de degré m. Nous utiliserons les notations introduites dans la démonstration de la Proposition 5.1. Si $\dim \Gamma(E_\varphi)=1$ alors $I=E^\circ$ et $E/E^\circ=E/I$ est isomorphe à $E_{\varphi'}$ où φ' est défini en posant $\varphi=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & \varphi'\end{pmatrix}$ et le lemme est donc verifié. Supposons que $\dim \Gamma(E_\varphi)\geqq 2$. Puisqu'on peut utiliser l'hypothèse du recurrence pour $E'=E_{\varphi'}$, il existe une représentation unipotente φ_1' de Π telle que $E'/(E')^\circ \simeq E_{\varphi_1'}$. Si $E^\circ/I=(E')^\circ$, alors on sait que

$$E_\varphi/E^\circ \simeq (E/I)/(E^\circ/I) \simeq E'/(E')^\circ \simeq E_{\varphi_1'}$$

d'après le Lemme 5.5. On peut donc supposer que $E^\circ/I \neq (E')^\circ$. Soit E_* l'image inverse de $(E')^\circ$ par la projection canonique $p: E\to E'=E/I$. Puisque $E_*\neq E^\circ$, on a $E_*/E^\circ\neq 0$. D'autre part $E_*/E^\circ\simeq(E_*/I)/(E^\circ/I)=(E')^\circ/(E^\circ/I)$ est un espace fibré vectoriel trivial car un espace fibré quotient d'un espace fibré vectoriel trivial par un sous-espace fibré trivial est aussi trivial. Par suite dans l'espace fibré vectoriel E/E° il existe un sous-espace fibré vectoriel trivial $E_*/E^\circ\neq 0$. Soit maintenant $E/E^\circ=E_1\oplus\cdots\oplus E_s$ la décomposition en facteurs indécomposables et soit p_i la projection canonique de E/E° sur E_i pour $i=1, \ldots, s$. Puisque E/E° possède une connexion holomorphe d'après le Lemme 5.6, l'espace fibré E_i en possède une pour tout i. Or, p_i induit un homomorphisme p_i^* de $\Gamma(E/E^\circ)$ dans $\Gamma(E_i)$ tel que $p_i^*(\sigma)=p_i\circ\sigma$ pour $\sigma\in\Gamma(E/E^\circ)$. Supposons que $p_i^*\neq 0$ pour $i=1,\ldots,r$ et que $p_j^*=0$ pour $j>r$. Alors pour tout $1\leqq i\leqq r$ on a $\Gamma(E_i)\neq 0$. On peut donc trouver une représentation unipotente φ_i de Π telle que $E_i\simeq E_{\varphi_i}$ pour $1\leqq i\leqq r$ (cf. Lemme 5.2 [6]). D'autre part il est clair que E_*/E° est un sous-espace fibré vectoriel de $E_1\oplus\cdots\oplus E_r$. On voit donc:

$$(E/E^\circ)/(E_*/E^\circ)\simeq((E_1\oplus\cdots\oplus E_r)/(E_*/E^\circ))\oplus E_{r+1}\oplus\cdots\oplus E_s.$$

Or, $(E/E^\circ)/(E_*/E^\circ)\simeq E/E_*\simeq(E/I)/(E_*/I)=E'/(E')^\circ\simeq E_{\varphi_1'}$. On obtient donc:

$$E_{\varphi_1'} \simeq ((E_1 \oplus \cdots \oplus E_r)/(E_*/E^\circ)) \oplus E_{r+1} \oplus \cdots \oplus E_s.$$

D'après la Proposition 5.1 il existe une représentation unipotente φ_j de Π telle que $E_j \simeq E_{\varphi_j}$ pour $j > r$. En prenant $\varphi_0 = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_s$ (somme directe des représentations) E/E° est isomorphe à E_{φ_0} et la proposition est démontrée.

Définition 5.3. En utilisant le Lemme 5.4 et la Proposition 5.2 nous pouvons, pour toute représentation unipotente φ de Π, fabriquer une suite des espaces fibrés vectoriels

(5.3) $$E_0 = E_\varphi,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_{l-1} \neq 0,\ E_l = 0$$

tels que $E_i = E_{i-1}/E_{i-1}^\circ$ pour $i = 1, 2, \ldots, l$. Nous appelerons la suite des espaces fibrés vectoriels (5.3) ***la chaîne des espaces fibrés vectoriels attachée à une représentation unipotente*** φ de Π (ou à l'espace fibré E_φ) et l'entier l sera appelé la ***longueur de*** E_φ (ou de φ) et sera noté $l = l(E_\varphi) = l(\varphi)$. Soit $m_i = \dim \Gamma(E_{i-1})$. La suite des entiers $(m_1, m_2, \ldots, m_l)$ sera appelée la chaîne de dimensions attachée à E_φ (ou à φ) et nous dirons que E_φ ***est de type*** $(m_1, m_2, \ldots, m_l)$. Si $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$ pour deux représentations unipotentes φ et φ', alors les chaînes attachées à $E = E_\varphi$ et $E' = E_{\varphi'}$ sont isomorphes i.e. $l(E) = l(E')$ et $E_i \simeq E_i'$ pour $i = 1, 2, \ldots, l = l(E)$. En particulier les chaînes de dimensions attachées à E et E' sont égales i.e. $m_i = m_i'$ pour $i = 1, \ldots, l$.

Notation. Pour une matrice $\alpha = (\alpha_{ij}) \in GL(m, C)$ nous définissons la matrice ${}^s\alpha = (\beta_{ij})$ par la formule suivante

$$\beta_{ij} = \alpha_{m-j+1, m-i+1} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

On voit facilement que ${}^s(\alpha \cdot \beta) = {}^s\beta \cdot {}^s\alpha$ pour $\alpha, \beta \in GL(m, C)$ et qu'il existe une matrice $\gamma \in GL(m, C)$ tel que

$${}^s\alpha = \gamma \cdot {}^t\alpha \cdot \gamma^{-1} \qquad \text{pour tout} \quad \alpha \in GL(m, C),$$

où ${}^t\alpha$ désigne la transposée de α. Il en résulte que, si φ est une représentation (unipotente) de Π, ${}^s\varphi$ est aussi une représentation (unipotente) de Π. Par conséquent on voit que la représentation duale $\varphi^* = {}^t\varphi^{-1}$ d'une représentation unipotente φ de Π est équivalente à la représentation unipotente $\tilde{\varphi} = {}^s\varphi^{-1}$ de Π:

$$\tilde{\varphi} = \gamma \cdot \varphi^* \cdot \gamma^{-1}.$$

D'autre part il est clair que l'espace fibré vectoriel dual $(E_\varphi)^*$ est isomorphe à E_{φ^*}. Nous avons donc démontré le lemme suivant:

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

LEMME 5.7. *Pour toute représentation unipotente φ de Π*

$$(E_\varphi)^* \simeq E_{\tilde{\varphi}}$$

où $\tilde{\varphi}$ est la représentation unipotente définie par $\tilde{\varphi} = {}^s\varphi^{-1}$.

Nous allons maintenant démontrer le lemme suivant:

LEMME 5.8. *Soit E un espace fibré vectoriel holomorphe de base M compacte. Supposons que E ne contienne pas l'espace fibré trivial de fibre C comme un facteur direct et supposons qu'on ait une suite exacte:*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} E'' \longrightarrow 0 \tag{5.4}$$

telle que E'' soit trivial. Alors l'homomorphisme μ^* de $\Gamma(E)$ dans $\Gamma(E'')$ induit par μ est l'homomorphisme nul, et par suite on a

$$\dim \Gamma(E) = \dim \Gamma(E').$$

En effet, prenons une section holomorphe σ de E. Il nous faut démontrer que $\tilde{\sigma} = \mu \circ \sigma = 0$. Supposons que $\tilde{\sigma}(x_0)$ ne soit pas nul pour un point $x_0 \in M$. Puisque E'' est trivial on voit que $\tilde{\sigma}(x) \neq 0$ pour tout $x \in M$. Il en résulte que $\sigma(x) \neq 0$ pour tout $x \in M$. Soit $E'' = M \times C^m$ et soit v_0 un élément de C^m tel que $\tilde{\sigma}(x) = (x, v_0) \in E''$ et choisissons un sous-espace vectoriel complexe V de dimension $m-1$ de C^m tel que

$$C^m = C \cdot v_0 \oplus V \qquad \text{(somme directe)}.$$

Soit maintenant $I = M \times C^1$ l'espace fibré trivial de fibré C et définissons un homomorphisme α de E'' dans I et un homomorphisme β de I dans E par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} &\alpha(x, z \cdot v_0 \oplus v_1) = (x, z) && \text{pour} \quad z \in C,\ v_1 \in V,\ x \in M, \\ &\beta(x, z) = z \cdot \sigma(x) && \text{pour} \quad z \in C,\ x \in M. \end{aligned}$$

Pour ces α et β on a les égalités suivantes:

$$\alpha\mu\beta(x, z) = \alpha\mu(z \cdot \sigma(x)) = z \cdot (\alpha\mu^*\sigma(x)) = z \cdot \alpha \cdot \tilde{\sigma}(x) = z(x, 1) = (x, z),$$

et par suite on a $\alpha\mu\beta =$ identité de I. On voit alors que E admet le sous-espace fibré trivial βI comme un facteur direct, ce qui est absurde. Nous avons maintenant la suite exacte induite par (5.4):

$$0 \longrightarrow \Gamma(E') \xrightarrow{\lambda^*} \Gamma(E) \xrightarrow{\mu^*} \Gamma(E'') \longrightarrow \cdots$$

où $\mu^* = 0$ et on voit donc que λ^* est bijectif et le lemme est ainsi démontré.

LEMME 5.9. *Soit φ une représentation unipotente de Π. Soit $E_\varphi = E = E' \oplus E''$ (somme directe). Alors on a*

$$l(E) = \mathrm{Max}\,(l(E'),\ l(E'')).$$

En effet, puisque $\Gamma(E) = \Gamma(E') \oplus \Gamma(E'')$, on voit que $E^\circ \simeq (E')^\circ \oplus (E'')^\circ$ et par suite que $E_1 \simeq E_1' \oplus E_1''$ et ainsi de suite. On voit finalement $E_i \simeq E_i' \oplus E_i''$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots.$ Il en résulte immédiatement que

$$l(E) = \mathrm{Max}\,(l(E'),\ l(E'')).$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 5.3. *Soit $E = E_\varphi$ un espace fibré vectoriel holomorphe* indécomposable *défini par une représentation unipotente φ de Π de degré $m \geqq 2$ et soit E^* le dual de E. Alors on a l'inégalité suivante:*

$$\dim \Gamma(E) + \dim \Gamma(E^*) \leqq m.$$

Ici l'égalité a lieu si et seulement si $l(E) = 2$.

Démonstration. Nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow E^\circ \longrightarrow E \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0$$

et la suite duale

$$0 \longrightarrow E_1^* \longrightarrow E^* \xrightarrow{\mu} (E^\circ)^* \longrightarrow 0.$$

Puisque E^* est indécomposable et puisque $(E^\circ)^*$ est trivial on obtient, d'après le Lemme 5.8,

$$\dim \Gamma(E^*) = \dim \Gamma(E_1^*).$$

Puisque E_1 est défini par une représentation unipotente, d'après le Lemme 5.7, E_1^* est aussi défini par une représentation unipotente de Π de dégré $m - m_1$, m_1 étant $\dim \Gamma(E)$. Alors d'aprés le Lemme 5.3 on a $\dim \Gamma(E_1^*) \leqq m - m_1$. On obtient finalement

$$\dim \Gamma(E) + \dim \Gamma(E^*) = \dim \Gamma(E) + \dim \Gamma(E_1^*) \leqq m.$$

Ici l'égalité a lieu si et seulement si $\dim \Gamma(E_1^*) = m - m_1$ i.e. E_1^* est trivial (Corollaire 5.1) i.e. E_1 est trivial ou bien $E_2 = 0$ c.à.d. $l(E) = 2$ et la proposition est démontrée.

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 5.3. *Soit $E=E_\varphi$ un espace fibré vectoriel de longueur 2, alors l'espace fibré dual E^* est aussi de longueur 2.*

En effect, on peut supposer, d'après le Lemme 5.9, que E soit indécomposable. Alors le corollaire résulte immédiatement de la proposition précédente.

Pour terminer ce paragraphe nous généralisons le Corollaire 5.3.

PROPOSITION 5.4. *Soit φ une représentation unipotente de Π et soit E^* le dual de $E=E_\varphi$. Alors on a*

$$l(E^*)=l(E).$$

Remarquons d'abord que $l(E^*)$ est bien défini d'aprés le Lemme 5.7. Pour démontrer la proposition nous démontrons d'abord le lemme suivant.

LEMME 5.10. *Soient φ et φ' deux représentations unipotentes de Π. Supposons qu'on ait une suite exacte suivante:*

$$0 \longrightarrow E_{\varphi'} \xrightarrow{j} E_\varphi \xrightarrow{\mu} E'' \longrightarrow 0$$

telle que E'' soit trivial. Alors on a l'inégalité suivante:

$$l(E_\varphi) \leqq l(E_{\varphi'})+1.$$

Démonstration par récurrence sur la dimension de fibre de $E_{\varphi'}$. Si $E'=E_{\varphi'}=0$, alors le lemme est trivial car E_φ est trivial. Soient E° (resp. E'°) le plus grand sous-espace fibré vectoriel trivial de E (resp. de E') et soit $E^\circ_{u_0}$ la fibre de E° au-dessus d'un point $u_0 \in T^n$. Prenons une base $\{e_1, \ldots, e_{m_1}\}$ de $E^\circ_{u_0}$ telle que $\mu(e_i)=0$ $(i>p)$ et que $\mu(e_1), \ldots, \mu(e_p)$ soient linéairement indépendants. Soit $\sigma_i \in \Gamma(E^\circ)$ tel que $\sigma_i(u_0)=e_i$ pour $i=1, 2, \ldots, m_1$ et soit V le sous-espace de $\Gamma(E^\circ)$ engendré par $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m_1}$. Alors on peut montrer que $jE' \cap E^\circ = j_\varphi(T^n \times V) = j(E'^\circ)$. En effet, il est clair que

$$j_\varphi(T^n \times V) \subset jE' \cap E^\circ \quad \text{et} \quad j(E'^\circ) \supset j_\varphi(T^n \times V)$$

car $j_\varphi(T^n \times V)$ est un sous-espace fibré trivial de E et $\mu(j_\varphi(T^n \times V))=0$. Montrons maintenant que

$$jE' \cap E^\circ \subset j_\varphi(T^n \times V).$$

Pour cela soit $e \in jE' \cap E^\circ$, alors $\mu(e)=0$ et par suite e s'écrit comme suit:

$$e = \sum_{i=p+1}^{m_1} a_i \cdot \sigma_i(u),$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

car $\sigma(x)=0$ pour un point $u\in T^n$ entraîne $\sigma=0$ pour $\sigma\in\Gamma(E)$. Par conséquent $e=j_\varphi(u, \sum_i a_i\sigma_i)\in j_\varphi(T^n\times V)$ on a donc montré que

$$j(E'^\circ)\subset j_\varphi(T^n\times V)=jE'\cap E^\circ.$$

D'autre part il est évident que $j(E'^\circ)\subset jE'\cap E^\circ$. On obtient finalement $j(E'^\circ)=jE'\cap E^\circ$. Prenons maintenant un sous-espace fibré vectoriel trivial F de E° tel que

$$E^\circ=j(E'^\circ)\oplus F.$$

Alors on a la suite exacte suivante:

$$0\to E'/E'^\circ\to E/E^\circ\to E''/\mu F\to 0. \tag{5.5}$$

L'espace fibré vectoriel μF étant isomorphe à F, μF est ensuite $E''/\mu F$ est trivial. On peut donc utiliser l'hypothèse du récurrence pour la suite exacte (5.5) et on sait que

$$l(E)-1=l(E/E^\circ)\leqq l(E'/E'^\circ)+1=l(E')$$

et le lemme est ainsi démontré.

Démonstration de la proposition 5.4 par récurrence sur le degré de φ. La proposition est triviale si le degré de φ est 1. Soit φ une représentation unipotente de degré $m>1$. Pour l'espace fibré E_φ nous avons la suite exacte suivante:

$$0\to E_\varphi^\circ\to E_\varphi\to E_1\to 0,$$

d'où on a la suite exacte duale:

$$0\to E_1^*\to E_\varphi^*\to E_\varphi^{\circ *}\to 0.$$

D'après le Lemme 5.10 et l'hypothèse du récurrence pour E_1 on obtient l'inégalité suivante:

$$l(E_\varphi^*)\leqq l(E_1^*)+1=l(E_1)+1=l(E_\varphi).$$

De même on a $l(E_\varphi)=l(E_\varphi^{**})\leqq l(E_\varphi^*)$ et la proposition est ainsi établie.

§ 6. Classification de $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{3})$

Notations. Soit $J(T^n; m_1, \dots, m_l)$ le sous-ensemble de $N(T^n, m)$ $(m=\sum_i m_i)$ des espaces fibrés E_φ tels que E_φ est de type $(m_1, \dots, m_l)$ et soit $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; \mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_l)$ le sous-ensemble de $\mathbf{N}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$ des classes qui contiennent

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

des espaces fibrés dans $J(T^n;\ m_1, \ldots, m_l)$. On a évidemment:

$$N(T^n, m) = \bigcup_{m=\sum_i m_i} J(T^n;\ m_1, \ldots, m_l)$$

$$J(T^n;\ m_1, \ldots, m_l) \cap J(T^n;\ m'_1, \ldots, m'_{l'}) = \phi$$

si $(m_1, \ldots, m_l) \neq (m'_1, \ldots, m'_{l'})$ (cf. §5 en particulier Déf. 5.3). Puisqu'il existe une correspondance bi-univoque entre $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$ et $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{1}) \times \mathbf{N}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$, pour classifier l'ensemble $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$ il suffit d'étudier $\mathbf{N}(\mathbf{T}^n, \mathbf{m})$ (cf. [6]). Pour cela il suffit de classifier l'ensemble $J(T^n;\ m_1, \ldots, m_l)$ pour $m = \sum_i m_i$. Dans ce paragraphe nous étudierons la classification de $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, \mathbf{3})$. Dans ce cas on sait que

$$\mathbf{N}(\mathbf{T}^n, \mathbf{3}) = \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \cup \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}, \mathbf{2}) \cup \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{2}, \mathbf{1}).$$

Soit φ une représentation unipotente de Π de degré m, on peut alors uniquement prolonger φ à un homomorphisme de A dans $N(m, C)$ *que nous désignerons encore par* φ (cf. Lemme 3.2). Pour toute représentation unipotente φ de degré 3 nous posons

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2^* \\ 0 & 0 & \varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.0}$$

Remarquons que φ_1, φ_3 et φ_2^* sont des fonctions R-linéaires de A dans C. En général, pour un homomorphisme ψ de Π dans C, nous désignerons enore par ψ la fonction R-linéaire prolongée de ψ definie sur A_0 à valeurs dans C. En utilisant les notations de la fin du §2 nous désignerons par $\bar{\psi}$ l'image de ψ par l'homomorphisme canonique de A_0^{*C} sur $\tilde{A} = A_0^{*C}/A^*$. Alors le Lemme 2.2. dit que $F(\varphi)$ n'est pas vide si et seulement si $\bar{\varphi} = 0$. Remarquons enfin que $\tilde{A}$ est un espace vectoriel complexe de dimension n.

(*A*) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

LEMME 6.1. *Soit* φ *une représentation unipotente de* Π *de degré* 3. *Si* $\bar{\varphi}_1 = 0$, *on a* $\dim \Gamma(E_\varphi) \geqq 2$.

En effet, puisque $\overline{-\varphi_1} = 0$, $F(-\varphi_1)$ contient une fonction f_1 et par suite l'espace vectoriel $\Gamma(\varphi)$ (notations du Lemme 5.2) contient des ξ tels que $\xi(x) = (\xi_2 \cdot f_1(x) + \xi_1, \xi_2, 0)$ pour tout $\xi_1, \xi_2 \in C$, et par suite on a

$$\dim \Gamma(E_\varphi) = \dim \Gamma(\varphi) \geqq 2,$$

Lemme 6.2. *Soit* $E_\varphi \in J(T^n;\ 1,\ 1,\ 1)$, *alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' *de la forme suivante*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2' \\ 0 & 1 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

où $\bar{\varphi}_1 \neq 0$. *Réciproquement pour toute représentation* φ' *de la forme* (6.1) *telle que* $\bar{\varphi}_1 \neq 0$ *l'espace fibré* $E_{\varphi'} \in J(T^n;\ 1,\ 1,\ 1)$.

Démonstration. Puisque $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$, on sait, d'après le Lemme 6.1, que $\bar{\varphi}_1 \neq 0$—à fortiori, $\varphi_1 \neq 0$. Nous allons montrer qu'il existe un nombre $k \in C$ tel que $\varphi_3 = k\varphi_1$. En comparant les (1.3)-composantes des deux membres de l'égalité $\varphi(b) \cdot \varphi(b') = \varphi(b') \cdot \varphi(b)$ pour $b, b' \in \Pi$ on obtient l'égalité suivante:

$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_3(b') = \varphi_1(b') \cdot \varphi_3(b).$$

Puisqu'il existe un $b_0 \in \Pi$ tel que $\varphi_1(b_0) \neq 0$, on voit que

$$\varphi_3(b) = (\varphi_3(b_0)/\varphi_1(b_0)) \cdot \varphi_1(b) = k \cdot \varphi_1(b) \qquad \text{pour} \quad b \in \Pi$$

en posant $k = \varphi_3(b_0)/\varphi_1(b_0)$. Nous allons montrer que $k \neq 0$. En effet, si $k = 0$, l'espace fibré quotient $E_1 = E_\varphi/E_\varphi^\circ$ (notation de la Définition 5.3) est isomorphe à l'espace fibré trivial de fibre C^2 i.e. $\dim \Gamma(E_1) = 2$, ce qui est absurde car E_φ est de type (1, 1, 1). Soit maintenant f la matrice suivante

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Alors on a l'égalité suivante:

$$f \cdot \varphi \cdot f^{-1} = \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \frac{1}{k}\varphi_2 \\ 0 & 1 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le Lemme 5.1 on sait que $\varphi \sim \varphi'$.

Soit réciproquement $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ une représentation de Π telle que $\bar{\varphi}_1 \neq 0$. Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ un élément de $\Gamma(\varphi)$. On a alors les trois égalités suivantes:

$$\xi_1(x+b) = \xi_1(x) + \varphi_1(-b)\xi_2(x) + \varphi_2(-b)\xi_3(x), \tag{6.2}$$

$$\xi_2(x+b) = \xi_2(x) + \varphi_1(-b)\xi_3(x), \tag{6.3}$$

$$\xi_3(x+b) = \xi_3(x), \tag{6.4}$$

pour tout $b \in \Pi$ et $x \in A$. On voit, d'après (6.4), que $\xi_3 = \text{const.}$ Puisque $\overline{\varphi}_1 \neq 0$, $\Gamma(-\varphi_1) = \phi$ et par suite on sait que $\xi_3 = 0$ et $\xi_2 = \text{const}$, d'après (6.3). Par le même raisonnement on sait, d'après (6.2), que $\xi_2 = 0$ et $\xi_1 = \text{const.}$ Par conséquent on a $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$. Puisque $E_\varphi / E_\varphi^0 \simeq E_{\varphi'}$ où $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on sait par la même raison que $\dim \Gamma(E_{\varphi'}) = 1$, ce qui dit que E_φ est de type (1, 1, 1), et le lemme est démontré.

LEMME 6.3. *Soit* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 & \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_2' \\ 0 & 1 & \varphi_1' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $\overline{\varphi}_1 \neq 0$, $\overline{\varphi_1'} \neq 0$. *Alors pour que* $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$, *il faut et il suffit qu'il existe deux nombres complexes* c *et* α *tels que* $c \neq 0$ *et que*

$$\overline{\varphi_1'} = c\overline{\varphi}_1, \qquad \overline{\varphi_2'^*} = c^2\overline{\varphi_2^*} + \alpha\overline{\varphi}_1. \tag{6.5}$$

Démonstration. Supposons que $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$. Il existe, d'après le Lemme 5.1, une application holomorphe f de A dans $GL(3, C)$ telle que

$$\varphi(b) \cdot f(x+b) = f(x) \cdot \varphi'(b) \qquad \text{pour tout} \quad b \in \Pi \text{ et } x \in A. \tag{6.6}$$

Soit $f = (f_{ij}) = (f_1, f_2, f_3)$, f_i étant i-ème colonne de f. Alors (6.6) est équivalent aux trois égalités suivantes:

$$\varphi(b) \cdot f_1(x+b) = f_1(x) \tag{6.7}$$

$$\varphi(b) \cdot f_2(x+b) = f_1(x) \cdot \varphi_1'(b) + f_2(x) \tag{6.8}$$

$$\varphi(b) \cdot f_3(x+b) = f_1(x) \cdot \varphi_2'(b) + f_2(x) \cdot \varphi_1'(b) + f_3(x) \tag{6.9}$$

pour tout $b \in \Pi$ et $x \in A$. L'égalité (6.7) dit que $f_1 \in \Gamma(\varphi)$ et par suite $f_1 = {}^t(c_1, 0, 0)$ où c_1 est constant parce que $\dim \Gamma(\varphi) = 1$. Pour simplifier les notations nous poserons comme suit:

$f' = f(x+b)$, $f = f(x)$, $\varphi = \varphi(b)$, $\varphi' = \varphi'(b)$ pour $b (\in \Pi)$ et $x (\in A)$ fixés. D'après (6.8) on a

$$f_{12}' + \varphi_1 \cdot f_{22}' + \varphi_2 \cdot f_{32}' = c_1 \cdot \varphi_1' + f_{12}, \tag{6.10}$$

$$f_{22}' + \varphi_1 \cdot f_{32}' = f_{22}, \tag{6.11}$$

$$f_{32}' = f_{32}. \tag{6.12}$$

D'après (6.12) et (6.11) on sait que $f_{32} = 0$ et $f_{22} = c_2 = \text{const.}$ D'après (6.10) on a

$$f_{12}(x+b) = c_1\varphi_1'(b) - c_2\varphi_1(b) + f_{12}(x) \qquad \text{pour} \quad b \in \Pi \text{ et } x \in A.$$

Par suite on sait que

$$\psi_1 = c_1\varphi_1' - c_2\varphi_1 \in A^*$$

et que $f_{12} \in F(\psi_1)$. D'après (6.9) on a les égalités suivantes:

$$f_{13}' + \varphi_1 \cdot f_{23}' + \varphi_2 \cdot f_{33}' = c_1\varphi_2' + f_{12} \cdot \varphi_1' + f_{13}, \tag{6.13}$$

$$f_{23}' + \varphi_1 \cdot f_{33}' = c_2\varphi_1' + f_{23}, \tag{6.14}$$

$$f_{33}' = f_{33}. \tag{6.15}$$

On sait, d'après (6.15) et (6.14), que $f_{33} = c_3 = \text{const.}$ et que

$$\psi_2 = c_2\varphi_1' - c_3\varphi_1 \in A^*$$

et $f_{23} \in F(\psi_2)$. En remplaçant f, au besoin, par $\frac{1}{c_1} \cdot f$ nous pouvons supposer que $c_1 = 1$. Puisque $\bar{\psi}_1 = 0$ et $\bar{\psi}_2 = 0$ on a les deux égalites

$$\overline{\varphi_1'} = c_2\bar{\varphi}_1, \qquad c_2\overline{\varphi_1'} = c_3\bar{\varphi}_1$$

et par suite $c_3\bar{\varphi}_1 = c_2^2\bar{\varphi}_1$. On a donc $c_3 = c_2^2$. Posons $c = c_2$. On voit alors que $\psi_2 = c\varphi_1' - c^2\varphi_1 = c\psi_1$. Puisque $f_{12} \in F(\psi_1)$ et $f_{23} \in F(\psi_2)$, il existe donc un nombre complexe α tel que

$$f_{23} = c \cdot f_{12} + \alpha. \tag{6.16}$$

Considérons maintenant l'égalité (6.13). En remarquant (6.16) on obtient, par un calcul direct, l'égalité suivante

$$f_{13}' = f_{13} + \varphi_2' - c^2\varphi_2 - \alpha\varphi_1 + \varphi_1 \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot f_{12}. \tag{6.17}$$

D'autre part pour la fonction $g = \frac{1}{2}f_{12}^2$ on a évidemment l'égalité suivante:

$$g(x+b) = g(x) + \psi_1(b) \cdot f_{12}(x) + \frac{1}{2}\psi_1(b)^2. \tag{6.18}$$

En combinant (6.17) et (6.18) on obtient:

$$(f_{13} - g)(x+b) = (f_{13} - g)(x) + \psi(b),$$

où

$$\begin{aligned}
\psi &= \varphi_2' - c^2\varphi_2 - \alpha\varphi_1 + c\varphi_1 \cdot \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_1^2 \\
&= \varphi_2' - c^2\varphi_2 - \alpha\varphi_1 + c\varphi_1(c\varphi_1 - \varphi_1') - \frac{1}{2}(c\varphi_1 - \varphi_1')^2 \\
&= \varphi_2' - c^2\varphi_2 - \alpha\varphi_1 + \frac{1}{2}c^2\varphi_1^2 - \frac{1}{2}\varphi_1'^2 \\
&= \varphi_2'^* - c^2\varphi_2^* - \alpha\varphi_1
\end{aligned}$$

car $\varphi_2^* = \varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2$ (cf. (6.0)). Puisque $f_{13} - g$ est une fonction holomorphe sur A on a $\psi \in A^*$ i.e. $\bar{\psi} = 0$ (Lemme 2.2). Par conséquent $\overline{\varphi_2'^*} = c^2\overline{\varphi_2^*} + \alpha\bar{\varphi}_1$, Réciproquement si φ et φ' satisfont à la condition (6.5) on peut définir une application holomorphe f de A dans $GL(m, C)$ satisfaisant à (6.6) par la formule suivante:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & c & cf_{12} + \alpha \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

où $f_{13} = \frac{1}{2} f_{12}^2 + h$, f_{12} étant un élément de $F(\psi_1)$ et h étant un élément de $F(\psi)$ où l'on a posé

$$\psi_1 = \varphi_1' - c\varphi_1$$

et

$$\psi = \varphi_2'^* - c^2 \varphi_2^* - \alpha\varphi_1.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Puisque $\tilde{A} = A_0^{*C}/A^*$ est un espace vectoriel complexe de dimension n, nous avons démontré la proposition suivante d'après les Lemmes 6.2 et 6.3.

Proposition 6.1. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 1, 1)$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(1)$ *de* $(C^n - \{0\}) \times C^n$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$(v_1, v_2) \sim (v_1', v_2')$ *si et seulement s'il existe deux nombres complexes* $c(\neq 0)$ *et* α *tels que*

$$v_1' = cv_1, \qquad v_2 = c^2 v_2 + \alpha v_1$$

pour

$$v_1, v_1' \in C^n - \{0\} \quad \text{et} \quad v_2, v_2' \in C^n.$$

Remarque. Nous pouvons fabriquer un espace fibré vectoriel holomorphe $\tilde{\mathbf{E}}$ de base $\mathbf{E}(1) \times T^n$ et de fibre C^3 tel que pour tout point $v \in \mathbf{E}(1)$ l'espace fibré $\tilde{E}_v$ de base $\{v\} \times T^n$ induit par l'injection $\{v\} \times T^n \to \mathbf{E}(1) \times T^n$ soit isomorphe à E_φ, où $\{\varphi\} \longleftrightarrow v$ est la correspondance biunivoque définie dans la Proposition 6.1, $\{\varphi\}$ signifiant la classe d'équivalence de φ. En effet, identifions C^n avec l'espace vectoriel complexe $\overline{A^*}$ constitué par les conjuguées complexes $\bar{\psi}$ des applications linéaires complexes $\psi \in A^*$. Pour deux éléments $v_1, v_2 \in C^n$, désignons par $\varphi = \varphi_{(v_1, v_2)}$ la représentation de Π définie par:

$$\varphi_{(v_1, v_2)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & v_1(b) & v_2(b) + \frac{1}{2} v_1(b)^2 \\ 0 & 1 & v_1(b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose $f(c, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & \alpha \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ pour deux nombres $c(\neq 0)$ et α, on voit facilement:

$$\varphi_{(v_1, v_2)}(b) \cdot f(c, \alpha) = f(c, \alpha) \cdot \varphi_{(cv_1, c^2v_2+\alpha v_1)}(b)$$

pour tout $b \in \Pi$. Considérons l'espace quotient $\tilde{\mathbf{E}}$ de $(C^n - \{0\}) \times C^n \times A \times C^3$ par la relation d'équivalence:

$$(b_1, v_2, x, \xi) \sim (v_1', v_2', x', \xi')$$

si et seulement s'il existe un élément $b \in \Pi$ et deux nombres $c(\neq 0)$ et α tels que $v_1' = cv_1$, $v_2' = c^2 v_2 + \alpha v_1$ et que

$$\begin{cases} x' = x + b \\ \xi' = \varphi_{(v_1', v_2')}(-b) \cdot (f(c, \alpha))^{-1}\xi. \end{cases}$$

Nous pouvons sans difficulté voir que $\tilde{\mathbf{E}}$ possède la structure d'espace fibré holomorphe cherché. *L'espace fibré* $\tilde{\mathbf{E}}$ *est une famille holomorphe des espace fibrés vectoriels holomorphes paramétrisée par la variété* $\mathbf{E}(1)$.

La remarque analogue est valable pour toutes les propositions dans la suite qui traiterons la classification de $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_l)$ et nous ne la répéterons pas.

PROPOSITION 6.2. *L'espace quotient* $\mathbf{E}(1)$ *défini dans la Proposition* 6.1 *se munit d'une structure d'espace fibré vectoriel holomorphe de fibre* C^{n-1} *de base l'espace projectif complexe* P_{n-1} *de dimension* $n-1$.

En effet, définissons la projection π de $\mathbf{E}(1)$ sur P_{n-1} par

$$\pi(\{(v_1, v_2)\}) = p(v_1)$$

pour la classe $\{(v_1, v_2)\}$ contenant (v_1, v_2), p étant la projection canonique de $C^n - \{0\}$ sur P_{n-1}. On peut facilement vérifier que $\mathbf{E}(1)(P_{n-1}, C^{n-1}, \pi)$ est un espace fibré vectoriel.

(*B*) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; \mathbf{1}, \mathbf{2})$

LEMME 6.4. *Soit* $E_\varphi \in J(T^n; 1, 2)$. *Alors* $\varphi_3 = 0$ *et les deux éléments* $\bar{\varphi}_1$ *et* $\bar{\varphi}_2$ *de* $\tilde{A}$ *sont linéairement indépendants. Réciproquement pour une représentation unipotente* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *telle que* $\bar{\varphi}_1$ *et* $\bar{\varphi}_2$ *soient linéairement indépendants, l'espace fibré vectoriel* E_φ *est de type* $(1, 2)$.

Démonstration. Supposons que $E_\varphi \in J(T^n; 1, 2)$. D'après le Lemme 6.1

on sait que $\overline{\varphi}_1 \neq 0$ et qu'il existe un nombre k tel que $\varphi_3 = k\varphi_1$. Si $k \neq 0$, d'après le Lemme 6.2 on sait que $E_\varphi \in J(T^n; 1, 1, 1)$, ce qui est absurde. Par suite on a $\varphi_3 = 0$. Nous allons montrer que $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\varphi}_2$ sont linéairement indépendants. Supposons qu'on ait deux nombres complexes α et β tels que $\alpha\overline{\varphi}_1 + \beta\overline{\varphi}_2 = 0$. Si $\beta = 0$, alors $\alpha\overline{\varphi}_1 = 0$ i.e. $\alpha = 0$. On peut donc supposer que $\beta = 1$. Posons $\psi = \alpha\varphi_1 + \varphi_2$. Puisque $\overline{\psi} = 0$, on a $F(\psi) \neq \phi$. Soit $f_1 \in F(\psi)$. Alors $\Gamma(\varphi)$ contient des ξ tels que

$$\xi(x) = (cf(x) + c', c\alpha, c) \qquad \text{pour tout } c \text{ et } c' \in C.$$

Par suite on a $\dim \Gamma(\varphi) \geqq 2$, ce qui est contradictoire. Réciproquement si $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\varphi}_2$ sont linéairement indépendants on peut voir que E_φ est de type $(1, 2)$ et le lemme est démontré.

LEMME 6.5. *Soient E_φ et $E_{\varphi'} \in J(T^n; 1, 2)$. Pour que $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$ il faut et il suffit que*

$$\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2\}_C = \{\overline{\varphi'_1}, \overline{\varphi'_2}\}_C$$

où $\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2\}_C$ désigne le sous-espace complexe de $\tilde{A}$ engendré par $\overline{\varphi}_1$ et $\overline{\varphi}_2$.

Démonstration. Supposons que $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$. Il existe alors une application holomorphe $f = (f_{ij})$ de A dans $GL(3, C)$ telle que (6.6) soit satisfaite. Par le raisonnement analogue de la démonstration du Lemme 6.3 on voit tout de suite que $f_{31} = 0$, $f_{21} = 0$ et f_{32}, f_{33}, f_{22}, f_{11} et f_{23} sont constants. En utilisant les notations de la démonstration du Lamme 6.4 nous obtenons les deux égalités suivantes:

$$f'_{12} + f_{22}\varphi_1 + f_{32}\varphi_2 = f_{11}\varphi'_1 + f_{12} \tag{6.19}$$

$$f'_{13} + f_{23}\varphi_1 + f_{33}\varphi_2 = f_{11}\varphi'_2 + f_{13}. \tag{6.20}$$

On voit d'abord que $f_{11} \neq 0$ car $f_{21} = f_{31} = 0$ et $\det f \neq 0$. On peut donc supposer $f_{11} = 1$, car on peut remplacer f au besoin par $\frac{1}{f_{11}} \cdot f$. D'après (6.19) et (6.20) on sait que

$$f_{22}\varphi_1 + f_{32}\varphi_2 - \varphi'_1 \in A^*$$
$$f_{23}\varphi_1 + f_{33}\varphi_2 - \varphi'_2 \in A^*.$$

Par suite on obtient les égalités suivantes:

$$\overline{\varphi'_1} = f_{22}\overline{\varphi}_1 + f_{32}\overline{\varphi}_2$$
$$\overline{\varphi'_2} = f_{23}\overline{\varphi}_1 + f_{33}\overline{\varphi}_2$$

i.e. $\{\overline{\varphi_1'}, \overline{\varphi_2'}\}_C \subset \{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2\}_C$. D'autre part, puisque $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_2'}$ sont linéairement indépendants (Lemme 6.4) on obtient finalement

$$\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2\}_C = \{\overline{\varphi_1'}, \overline{\varphi_2'}\}_C.$$

Puisque l'on peut faire le raisonnement ci-dessus tout à fait réciproquement, le lemme est bien démontré.

D'après les Lemmes 6.4 et 6.5 nous avons démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 6.3. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre l'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 2)$ *et la variété grassmannienne* $\mathrm{G}_{n,2}$ *des sous-espaces vectoriels complexes de dimension* 2 *dans* C^n.

(C) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 2, 1)$

PROPOSITION 6.4. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre* $J(T^n; 1, 2)$ *et* $J(T^n; 2, 1)$.

Démonstration. Soit $E = E_\varphi \in J(T^n; 1, 2)$ et soit E^* le dual de E. Nous allons montrer que $E^* \in J(T^n; 2, 1)$. Il est clair d'abord que E^* est indécomposable. Il suffit donc de montrer que E^* est de type (2.1). Soit E° le plus grand sous-espace fibré trivial de E. On a alors la suite exacte:

$$0 \to E^\circ \to E \to E_1 \to 0, \tag{6.21}$$

où E_1 est trivial car $\dim \Gamma(E_1) = 2$ (Cor. 5.1). On a la suite duale de (6.21):

$$0 \to E_1^* \to E^* \to E^{\circ *} \to 0.$$

Puisque E_1^* est trivial, E_1^* est le plus grand sous-espace fibré trivial de E^* et par suite on sait que $E^* \in J(T^n; 2, 1)$. Réciproquement, soit $E \in J(T^n; 2, 1)$. On a alors les deux suites exactes:

$$0 \to E^\circ \to E \to E_1 \to 0$$
$$0 \to E_1^* \to E^* \to E^{\circ *} \to 0.$$

D'après la Proposition 5.4 on voit que $\dim \Gamma(E^*) = 1$, et par suite on sait que E_1^* est le plus grand sous-espace fibré trivial de E^*. Puisque $E^{\circ *}$ est trivial on sait que $E^* \in J(T^n; 1, 2)$. Puisque $(E^*)^* \simeq E$ nous avons obtenu, en prenant le dual des espaces fibrés, une correspondence bi-univoque entre $J(T^n; 1, 2)$ et $J(T^n; 2, 1)$ et la proposition est démontrée.

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

En combinant les Proposition 6.1—4 nous avons établi le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *L'ensemble* $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, 3) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{T}^n, 1) \times \mathbf{N}(\mathbf{T}^n, 3)$ *est classifié comme suit:*

$\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, 1) \simeq T'^n$: *la variété de Picard de* T^n.

$\mathbf{N}(\mathbf{T}^n, 3) = \mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 1, 1) \cup \mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 2) \cup \mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 2, 1)$ (*somme disjointe*)

$\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 1, 1) \simeq \mathbf{E}(1)$: *l'espace fibré vectoriel de fibre* C^{n-1} *de base* P_{n-1} *défini par la Proposition* 6.2.

$\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 2) \simeq \mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 2, 1) \simeq \mathbf{G}_{n,2}$: *la variété grassmannienne des sous-espaces vectoriels complexes de dimension* 2 *dans* C^n.

§7. Classification de $\mathbf{E}(\mathbf{T}^n, 4)$

Notations 1. Soient φ et φ' deux représentations unipotentes de Π de degré m. Pour simplifier les notations nous écrivons

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$$

s'il existe une application holomorphe f de A dans $GL(m, C)$ telle que $\varphi(b) \cdot f(x+b) = f(x) \cdot \varphi'(b)$ pour tout $b \in \Pi$ et $x \in A$.

Nous poserons $\varphi = (\varphi_{ij}) = \exp(\varphi^*_{ij})$.

Soient ψ et ψ' deux homorphismes de Π dans C c.à.d. $\psi, \psi' \in \mathrm{Hom}(\Pi, C)$. Nous dirons que ψ et ψ' sont linéairement indépendants si $\alpha \cdot \psi(b) + \beta \cdot \psi'(b) = 0$ $(b \in \Pi)$ entraîne $\alpha = \beta = 0$. Nous désignerons par $\tilde{\psi}$ la fonction C-linéaire de C^{2n} dans C qui est définie par la formule suivante:

$$\tilde{\psi}\Big(\sum_{i=1}^{2n} c_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{2n} c_i \psi(b_i),$$

où $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ est une base choisie de C^{2n} et $\{b_1, \ldots, b_{2n}\}$ est un système de générateurs de Π. Alors on sait que ψ et ψ' sont linéairement indépendants si et seulement si $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\psi}'$ sont linéairement independants en tant que deux éléments de l'espace dual $(C^{2n})^*$ de C^{2n}. L'application de $\mathrm{Hom}(\Pi, C)$ dans $(C^{2n})^*$ ainsi definie est clairement un isomorphisme de $\mathrm{Hom}(\Pi, C)$ sur $(C^{2n})^*$. Pour deux éléments g et g' de $(C^{2n})^*$ nous désignerons par $g \wedge g'$ la fonction bi-linéaire anti-symétrique suivante:

$$(g \wedge g')(u, v) = g(u) g'(v) - g(v) \cdot g'(u) \qquad \text{pour} \quad u, v \in C^{2n}.$$

LEMME 7.1. *Soient* $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ *des éléments de* $\mathrm{Hom}(\Pi, C)$ *tels que*

$$\psi_1(b) \cdot \psi_3(b') + \psi_2(b) \cdot \psi_4(b') = \psi_1(b') \cdot \psi_3(b) + \psi_2(b') \cdot \psi_4(b)$$

pour tout $b, b' \in \Pi$. Si ψ_1 et ψ_2 sont linéairement indépendants, alors il existe trois nombres (complexes) α, β, γ tels que

$$\psi_3 = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \qquad \psi_4 = \beta\psi_1 + \gamma\psi_2.$$

En effet, il est immédiat de voir que $\tilde{\psi}_1 \wedge \tilde{\psi}_3 + \tilde{\psi}_2 \wedge \tilde{\psi}_4 = 0$. Puisque $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ sont linéairement indépendants, il existe une base $\{g_1, \ldots, g_{2n}\}$ de $(C^{2n})^*$ telle que $g_1 = \tilde{\psi}_1$ et $g_2 = \tilde{\psi}_2$. Posons $\tilde{\psi}_3 = \sum_i c_i g_i$, $\tilde{\psi}_4 = \sum_i d_i g_i$. Alors on a l'égalité suivante:

$$c_2 \cdot g_1 \wedge g_2 + g_1 \wedge \sum_{i>2} c_i g_i + d_1 \cdot g_2 \wedge g_1 + g_2 \wedge \sum_{i>2} d_i g_i = 0.$$

Puisque $g_i \wedge g_j$ $(i<j)$ sont linéairement indépendants on obtient

$$c_2 = d_1 \text{ et } c_i = d_i = 0 \qquad \text{pour} \quad i > 2$$

et le lemme est démontré.

(A) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1, 1, 1, 1)$

LEMME 7.2. *Soit E_φ un espace fibré de type* $(1, 1, 1, 1)$. *Alors φ est équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ & 1 & \varphi'_1 & \varphi'_2 \\ & & 1 & \varphi'_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.1}$$

où $\overline{\varphi'_1} \neq 0$. *Réciproquement pour toute représentation φ' de la forme* (7.1) *telle que* $\overline{\varphi'_1} \neq 0$, *l'espace fibré $E_{\varphi'}$ est de type* (1, 1, 1, 1).

Démonstration. Posons $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * & * \\ & 1 & \varphi_2 & * \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que ψ (resp. ρ) est aussi une représentation unipotente de Π. Puisque $E_\varphi/E_\varphi^\circ \simeq E_\psi$, E_φ° étant le plus grand sous-espace fibré trivial et puisque $\dim \Gamma(E_\psi) = 1$, on sait, d'après le Lemme 6.1, que $\overline{\varphi}_2 \neq 0$ et qu'il existe un nombre $k \neq 0$ tel que $\varphi_3 = k\varphi_2$. De même puisque E_ρ est un sous-espace de E_φ on sait que $\overline{\varphi}_1 \neq 0$ et que $\varphi_2 = k'\varphi_1$, $k' \neq 0$. Soit f la matrice suivante

$$f = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & k & \\ 0 & & & kk' \end{pmatrix}.$$

Alors on peut écrire $\varphi' = f\varphi f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_4' \\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_3' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Il nous donc suffit de considérer la représentation φ de la forme suivante: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_4 \\ & 1 & \varphi_1 & \varphi_3 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. En comparant des deux membres de (1.4)-composantes de l'égalité

$$\varphi(b) \cdot \varphi(b') = \varphi(b') \cdot \varphi(b) \qquad \text{pour} \quad b, b' \in \Pi$$

on obtient l'égalité suivante:

$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_3(b') + \varphi_2(b) \cdot \varphi_1(b') = \varphi_1(b') \cdot \varphi_3(b) + \varphi_2(b') \cdot \varphi_1(b).$$

d'où on obtient l'égalité suivante:

$$\widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi_3^*} + \widetilde{\varphi_2^*} \wedge \widetilde{\varphi}_1 = 0,$$

où $\varphi_2^* = \varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1^2$, $\varphi_3^* = \varphi_3 - \frac{1}{2}\varphi_1^2$ (cf. Notations 1). Par suite on a $(\widetilde{\varphi_3^*} - \widetilde{\varphi_2^*}) \wedge \widetilde{\varphi}_1 = 0$ et il existe donc un nombre α tel que $\widetilde{\varphi_3^*} - \widetilde{\varphi_2^*} = \alpha\widetilde{\varphi}_1$. D'autre part $\widetilde{\varphi_3^*} - \widetilde{\varphi_2^*} = \widetilde{\varphi_3^* - \varphi_2^*} = \widetilde{\varphi_3 - \varphi_2}$. Il en résulte que $\varphi_3 - \varphi_2 = \alpha\varphi_1$ i.e. $\varphi_3 = \varphi_2 + \alpha\varphi_1$. Soit f_1 la matrice suivante

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & \alpha \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Alors on a l'équivalence suivante

$$\varphi \underset{f_1}{\sim} \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3' \\ & 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, soit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ où $\overline{\varphi}_1 \neq 0$. Alors d'après le même raisonnement que la démonstration du Lemme 6.2 on sait que $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$ et que $E_\varphi / E_\varphi^\circ = E_\psi$. Alors d'après le Lemme 6.2 encore E_ψ est de type (1, 1, 1) et par suite E_φ est de type (1, 1, 1, 1) et le lemme est démontré.

LEMME 7.3. *Soient φ et φ' deux représentations de la forme* (7.1) *telles que $\overline{\varphi}_1 \neq 0$, $\overline{\varphi_1'} \neq 0$. Alors pour que $\varphi \sim \varphi'$ il faut et il suffit qu'il existe trois* *nombres* $c(\neq 0)$, α, β *tels que les trois égalites suivantes soient satisfaites:*

$$(7.3)\qquad \begin{cases} \overline{\varphi_1'} = c\overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi_2'^*} = c^2\overline{\varphi_2^*} + \alpha\overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi_3'^*} = c^3\overline{\varphi_3^*} + 2\alpha c\overline{\varphi_2^*} + \beta\overline{\varphi}_1. \end{cases}$$

(cf. Notations 1.)

Démonstration. Soit $E_\varphi \simeq E_{\varphi'}$ et soit f une application holomorphe de A dans $GL(4, C)$ telle que

$$(7.4)\qquad \varphi(b)\cdot f(x+b) = f(x)\cdot\varphi'(b) \qquad \text{pour} \quad b\in\Pi \text{ et } x\in A.$$

Posons $f=(f_{ij})=(f_1f_2f_3f_4)$, f_i étant la i-ème colonne de f. D'après (7.4) on sait que $f\in\Gamma(\varphi)$ et par suite on a $f={}^t(c_1, 0, 0, 0)$ $c_1\in C$ car $\dim\Gamma(\varphi)=1$. Nous pouvons donc supposer $f=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & g\end{pmatrix}$. Alors il est clair que l'on a l'égalité suivante:

$$(7.5)\qquad \psi(b)\cdot g(x+b) = g(x)\cdot\psi'(b) \qquad \text{pour} \quad b\in\Pi \text{ et } x\in A,$$

où l'on a posé $\varphi=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & \psi\end{pmatrix}$ et $\varphi'=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & \psi'\end{pmatrix}$. Alors on sait d'après le Lemme 6.3 que $\frac{1}{c}g=\begin{pmatrix}1 & & * \\ 0 & c & \\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}$. Par suite on peut encore poser $f=\begin{pmatrix}h & * \\ 0 & c^3\end{pmatrix}$ et on a l'égalité suivante:

$$\psi(b)\cdot h(x+b) = h(x)\cdot\psi'(b) \qquad \text{pour} \quad b\in\Pi \text{ et } x\in A,$$

car $\varphi=\begin{pmatrix}\psi & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Alors on sait, d'après le Lemme 6.3, que $\frac{1}{c}h=\begin{pmatrix}1 & f_{12} & f_{13} \\ 0 & c & cf_{12}+\alpha \\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}$ et que

$$(7.6)\qquad \begin{cases} \overline{\varphi_1'} = c\overline{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi_2'^*} = c^2\overline{\varphi_2^*} + \alpha\overline{\varphi}_1 \end{cases}$$

pour un $c\neq 0$ et $\alpha\in C$. De même d'après (7.5) on sait qu'il existe un nombre γ tel que

$$g=\begin{pmatrix} c & cf_{12}+\alpha & f_{24} \\ 0 & c^2 & c(cf_{12}+\alpha)+\gamma \\ 0 & 0 & c^3\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas on obtient l'égalité

$$\overline{\varphi_2'^*} = c^2\overline{\varphi_2^*} + \gamma\overline{\varphi}_1, \qquad \text{d'où} \quad \alpha=\gamma.$$

Quant à la fonction f_{24}, d'après la démonstration du Lemme 6.3 on sait que $f_{24}-\frac{1}{2}(cf_{12}+\alpha)^2\in F(\psi_1)$, où $\psi_1=\varphi_2'^{*}-c^2\varphi_2^{*}=\alpha\varphi_1$ D'autre part on sait que $f_{13}-\frac{1}{2}f_{12}^2\in F(\psi_1)$. Par suite il existe un nombre γ_1 tel que

$$f_{24}-\frac{1}{2}(cf_{12}+\alpha)^2=f_{13}-\frac{1}{2}f_{12}^2+\gamma_1.$$

et par conséquent il existe un nombre β tel que

$$f_{24}=cf_{13}+\alpha f_{12}+\beta.$$

Considérons maintenant l'égalité suivante obtenue par comparant les deux membres des $(1,4)$-composantes de l'égalité (7.4):

$$\begin{aligned}f_{14}(x+b)+\varphi_1(b)\cdot f_{24}(x+b)+\varphi_2(b)\cdot f_{34}(x+b)+\varphi_4(b)\cdot f_{14}(x+b)\\ =\varphi_3'(b)+f_{12}(x)\cdot\varphi_2'(b)+f_{13}(x)\cdot\varphi_1'(b)+f_{14}(x)\end{aligned}$$

pour tout $b\in\Pi$ et $x\in A$. Prenons la fonction suivante

$$g=f_{14}-\left(f_{13}-\frac{f_{12}}{2}\right)^2\cdot f_{12}-\frac{1}{6}f_{12}^3.$$

D'après un calcul direct—nous ne donnerons pas le calcul en détail car c'est très long et très embarrassé—nous obtenons l'égalité suivante:

$$g(x+b)=g(x)+\psi(b)\qquad\text{pour}\quad b\in\Pi\ \text{et}\ x\in A,$$

où on a $\psi=\varphi_3'^{*}-c^3\varphi_3^{*}-2\alpha c\varphi_2^{*}-\beta\varphi_1$. Par conséquent d'après le Lemme 2.2 on a démontré la nécessité de la condition (7.3). D'autre part si la condition (7.3) est satisfaite pour deux représentations φ et φ', nous pouvons raisonner tout à fait à l'envers et nous pouvons fabriquer une application holomorphe f satisfaisant aux conditions (7.4) et le lemme est démontré.

D'après les Lemmes 7.2 et 7.3 nous avons démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 7.1. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre l'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;1,1,1,1)$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(2)$ *de* $(C^n-\{0\})\times C^n\times C^n$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$(v_1,v_2,v_3)\sim(v_1',v_2',v_3')$ *si et seulement s'il existe trois nombres* c,α,β *tels que*

$$\begin{cases}v_1'=c\cdot v_1\\ v_2'=c^2\cdot v_2+\alpha v_1\\ v_3'=c^3\cdot v_3+2\alpha cv_2+\beta v_1\end{cases}$$

pour $v_1, v_1' \in C^n - (0)$, $v_2, v_3, v_2', v_3' \in C^n$.

PROPOSITION 7.2. *L'espace quotient* $\mathbf{E}(2)$ *défini dans la Proposition* 7.1 *se munit d'une structure d'un espace fibré vectoriel de fibre* C^{n-1} *de base* $\mathbf{E}(1)$ *qui est défini dans la Proposition* 6.2.

En effet, nous pouvons définir la projection naturelle de $\mathbf{E}(2)$ sur $\mathbf{E}(1)$ dont la définition et démonstration nous ometterons ici car le raisonnement est tout à fait analogue à celui de Prop. 6.2.

(B) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$

PROPOSITION 7.3. *L'ensemble* $J(T^n;\ 1, 1, 2)$ *est vide.*

Démonstration. Supposons qu'on ait un espace fibré E_φ de type $(1, 1, 2)$. Posons $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & & * \\ & 1 & \varphi_2 & \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$, on sait que $\bar{\varphi}_1 \neq 0$ et que $E_\varphi / E_\varphi^\circ \simeq E_{\varphi'}$, où $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_2 & * \\ & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\dim \Gamma(E_{\varphi'}) = 1$, on a encore $\bar{\varphi}_2 \neq 0$, en particulier $\varphi_2 \neq 0$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * \\ 0 & 1 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une représentation de Π, il existe un nombre $k \neq 0$ tel que $\varphi_2 = k\varphi_1$ (cf. Lemme 6.2). Puisque $E_{\varphi'} / E_{\varphi'}^\circ \simeq E_{\varphi''}$, où $\varphi'' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et puisque $\dim \Gamma(E_{\varphi''}) = 2$; on obtient $\bar{\varphi}_3 = 0$. Par suite on sait que $\varphi_3 = 0$, sinon il existe un nombre $k' \neq 0$ tel que $\varphi_3 = k'\varphi_2$ ce qui est absurde. On peut donc écrire comme suit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * & * \\ & 1 & k\varphi_1 & \varphi_2 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Par la matrice constante $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & k & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ φ est transformée dans une représentation de la forme suivante:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * & * \\ & 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérant les $(1, 4)$-composantes de l'égalité $\varphi(b) \cdot \varphi(b') = \varphi(b') \cdot \varphi(b)$ on obtient l'égalité suivante:

$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_2(b') = \varphi_1(b') \cdot \varphi_2(b) \qquad \text{pour} \quad b, b' \in \Pi.$$

Il en résulte qu'il existe un nombre c tel que $\varphi_2 = c\varphi_1$. Alors φ est transformée

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

par la matrice (7.2) dans la représentation φ de la forme suivante:

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ & 1 & \varphi_1 & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}.$$

On voit alors facilement que φ est équivalente à φ' suivante

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_2\\ & 1 & 0 & \varphi_1\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix},$$

où $f=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 0 & 1\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$. Posons $\varphi'=\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & \psi\end{pmatrix}$ et considérons l'espace $E_{\varphi'}/E^{\circ}_{\varphi'}\simeq E_{\psi}$. Il est clair que $\dim\Gamma(E_{\psi})=2$. Par consèquent on sait que $E_{\varphi'}$ est de type $(1, 2, 1)$ ce qui est absurde et la proposition est démontrée.

(*C*) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1, 2, 1})$

LEMME 7.4. *Toute représentation φ dont l'espace fibré associé E_φ est de type* $(1, 2, 1)$ *est équivalente à une* (*et une seule*) *des deux représentations de la forme suivante*

$$(C_1):\ \begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_4\\ & & 1 & \varphi_3\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\qquad (C_2):\ \begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_2\\ & 1 & \varphi_1 & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix},$$

où $\bar\varphi_1, \bar\varphi_2$ (resp. $\bar\varphi_3, \bar\varphi_4$) *sont linéairement indépendants* (*resp. dans le cas* (C_1)). *Réciproquement toute représentation de la forme* (C_1) *ou* (C_2) *satisfaisant aux conditions ci-dessus est de type* $(1, 2, 1)$.

Démonstration. Posons $\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & & *\\ & 1 & \varphi_2 & \\ & & 1 & \varphi_3\\ 1 & & & 0\end{pmatrix}$. Puisque $\dim\Gamma(E_\varphi)=1$, on sait que $\bar\varphi_1\neq 0$. Si $\varphi_2\neq 0$, $\varphi_3\neq 0$, alors il existe comme toujours, deux nombres k et k' tels que $\varphi_2=k\varphi_1$, $\varphi_3=k'\varphi_1$ $(k\cdot k'\neq 0)$. On sait alors, d'après le Lemme 7.2, que $E_\varphi\in J(T^n;\ 1, 1, 1, 1)$ ce qui est contradictoire. Dans le cas où $\varphi_2=0$, démontrons que $\bar\varphi_1$ et $\bar\varphi_2$ sont linéairement indépendants en posant $\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_4\\ & & 1 & \varphi_3\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$. En effet, d'après le Lemme 6.4 on sait que $\bar\varphi_1$ et $\bar\varphi_2$ sont linéairement indépendants parce que $E_{\varphi'}$ est un sous-espace fibré vectoriel de E_φ où $\varphi'=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_2\\ & 1 & 0\\ 0 & & 1\end{pmatrix}$. D'après le Lemme 7.1 il existe trois nombres α, β, γ tels que

$$\varphi_4=\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2, \qquad \varphi_3=\beta\varphi_1+\gamma\varphi_2.$$

Supposons que $\tilde\varphi_3$ et $\tilde\varphi_4$ soient linéairement dépendants. Supposons, par exemple, $\varphi_3=k\varphi_4$, $k\in C$. Alors φ est équivalente à la représentation φ' suivante:

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1' & \varphi_2 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_4\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix},\ \text{où}\ \varphi_1'=\varphi_1+k\varphi_2\ \text{et où}\ f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & -k & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$ Ensuite on a l'équivalence suivante

$$\varphi' \underset{g}{\sim} \varphi''=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1' & \varphi_5 & \varphi_2\\ & 1 & \varphi_4 & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix},$$

où $g=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 0 & 1\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$. C'est le cas (C_2). Nous pouvons raisonner de la même manière dans le cas où $\varphi_4=k\varphi_3$.

Supposons maintenant que $\tilde\varphi_3$ et $\tilde\varphi_4$ soient linéairement indépendants. Nous allons démontrer que $\bar\varphi_3$ et $\bar\varphi_4$ sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe deux nombres a et b tels que

$$a\bar\varphi_3+b\bar\varphi_4=0.$$

Alors on a $a(\beta\bar\varphi_1+\gamma\bar\varphi_2)+b(\alpha\bar\varphi_1+\beta\bar\varphi_2)=0$ et par suite $a\beta+b\alpha=0$, $a\gamma+b\beta=0$ car $\bar\varphi_1$ et $\bar\varphi_2$ sont linéairement indépendants. Par conséquent on a $a\varphi_3+b\varphi_4=0$. D'autre part, on a supposé que φ_3 et φ_4 sont linéairement indépendants, d'où on obtient $a=b=0$ et on a démontré que $\bar\varphi_3$ et $\bar\varphi_4$ sont linéairement indépendants, ce qui est la cas (C_1).

Il suffit donc de considérer une représentation φ de la forme suivante: $\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & * & *\\ & 1 & \varphi_2 & *\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$. Dans ce cas on sait comme dans la Prop. 7.3 que φ est équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:

$$\varphi\sim\varphi'=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_2\\ & 1 & \varphi_1 & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

Il suffit maintenant de démontrer que $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ sont linéairement indépendants. Puisque

$$\varphi' \underset{g}{\sim} \varphi'' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & 0 & \varphi_1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où g est la matrice (7.7) et puisque E_ψ est un sous-espace fibré de $E_{\varphi''}$ où $\psi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. d'après le Lemme 6.4 $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ sont linéairement indépendants car $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$. La partie réciproque du lemme étant facile à verifier, le lemme sera complètement dèmontrè si le lemme suivant est démontré.

Lemme 7.5. *Si φ est de la forme (C_1). Alors le dual E^*_φ de E_φ est de type* (1, 2, 1). *Si φ est de la forme (C_2), alors E^*_φ est de type* (2, 1, 1). *En particulier une représentation de la forme (C_1) n'est équivalente à aucune représentation de la forme (C_2).*

Démonstration. Soit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. D'après le Lemme 5.7 on sait que $\varphi^* \sim {}^s\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_3 & -\varphi_4 & \varphi_5' \\ & 1 & 0 & -\varphi_2 \\ & & 1 & -\varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Il est immédiat de voir que ${}^s\varphi^{-1}$ est de la forme (C_1), en particulier, ${}^s\varphi^{-1}$ est de type (1, 2, 1). Soit maintenant $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ & 1 & \varphi_1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Considérons ${}^s\varphi^{-1}$. Il est maintenant facile de montrer que $E_{{}^s\varphi^{-1}}$ est de type (2, 1, 1) et le lemme est démontré.

Notation 2. Nous désignerons par $J(T^n;\ m_1, \dots, m_l\ ;\ m_1' \dots m_{l'}')$ le sous-ensemble de $J(T^n;\ m_1, \dots, m_l)$ des espaces E dont le dual E^* est de type $(m_1' \dots m_{l'}')$. Cet ensemble est vide si $l \neq l'$ d'après la Proposition 5.4.

(C_1) **J(T^n; 1, 2, 1 ; 1, 2, 1)**

Lemme 7.6. *Soit* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *une représentation de la forme (C_1). Alors φ est équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ & 1 & 0 & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $\varphi_4 = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_3$, $\varphi_2 = \beta\varphi_1 + \gamma\varphi_3$ (cf. Lemme 7.1)

(a) Le cas $\alpha = \gamma = 0$. $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \beta\varphi_3 \\ & & 1 & \beta\varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Alors on a

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \frac{1}{\beta}\varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_3 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $f = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \beta \end{pmatrix}$.

(b) Le cas $\alpha \neq 0$. Posons $c_2 = \sqrt{\alpha}$, $c_3 = \sqrt{\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}}$, $c_3' = 0$, $c_2' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$, ($\sqrt{\alpha}$ signifie une des racines carrés de α) et posons

$$(7.7) \qquad \begin{cases} \varphi_1' = c_2\varphi_1 + c_2'\varphi_3 \\ \varphi_3' = c_3'\varphi_1 + c_3\varphi_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3' & 0 \\ 0 & c_2' & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors verifier que

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_3' & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_1' \\ & & 1 & \varphi_3' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Le cas $\gamma \neq 0$. En posant $c_3 = \sqrt{\gamma}$, $c_3' = \frac{\beta}{\sqrt{\gamma}}$, $c_2' = 0$, $c_2 = \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}}$ et φ_1', φ_3', f comme ci-dessus dans (7.7), nous pouvons verifier

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'.$$

Pour démontrer le lemme il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

LEMME 7.7. *Soit* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_1 \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *telle que* $\bar{\varphi}_1$ *et* $\bar{\varphi}_3$ *soient linéairement indépendants. Alors il existe une représentation* φ' *telle que*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_3' & \varphi_5' \\ & 1 & 0 & \varphi_3' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Posons comme suit:

$\varphi_1' = \dfrac{\sqrt{-1}}{2}\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varphi_3$, $\quad \varphi_3' = \dfrac{-\sqrt{-1}}{2}\varphi_1 + \dfrac{1}{2}\varphi_3$, $\quad \varphi_5' = \dfrac{1}{2}\varphi_5$ et

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{-1}}{2} & -\dfrac{\sqrt{-1}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alors on a l'équivalence suivante:

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$$

et le lemme est démontré.

LEMME 7.8. *Soient* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & 0 & \varphi_2 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' \\ & 1 & 0 & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $\bar{\varphi}_1$ *et* $\bar{\varphi}_2$ (*resp.* $\overline{\varphi_1'}$ *et* $\overline{\varphi_2'}$) *soient linéairement indépendants. Alors pour que* $\varphi \sim \varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe* 4 *nombres* c, c', α, β *tels qu'une des deux conditions suivantes soit satisfaite*:

$$(7.8) \qquad \begin{cases} \overline{\varphi_1'} = c\bar{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi_2'} = c'\bar{\varphi}_2 \\ \overline{\varphi_3'^*} = c \cdot c' \cdot \overline{\varphi_3^*} + \alpha\bar{\varphi}_1 + \beta\bar{\varphi}_2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \overline{\varphi_1'} = c\bar{\varphi}_2 \\ \overline{\varphi_2'} = c'\bar{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi_3'^*} = c \cdot c' \cdot \overline{\varphi_3^*} + \alpha\bar{\varphi}_1 + \beta\bar{\varphi}_2. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que $\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$. Posons $f = (f_{ij}) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, où f_i est la i-ème colonne de f. On a alors

$$(7.9) \qquad \varphi(b) \cdot f_1(x+b) = f_1(x)$$

$$(7.10) \qquad \varphi(b) \cdot f_2(x+b) = f_1(x) \cdot \varphi_1'(b) + f_2(x)$$

$$(7.11) \qquad \varphi(b) \cdot f_3(x+b) = f_1(x) \cdot \varphi_2'(b) + f_3(x)$$

$$(7.12) \qquad \varphi(b) \cdot f_4(x+b) = f_1(x) \cdot \varphi_3'(b) + f_2(x)\varphi_2'(b) + f_3(x)\varphi_1'(b) + f_4(x);$$

pour $x \in A$ et $b \in \Pi$.

D'après (7.9) $\sim$ (7.11) on sait que $f_1 = {}^t(c_1, 0, 0, 0)$, $f_2 = {}^t(f_{12}, c_2, c_2', 0)$, $f_3 = {}^t(f_{13}, c_3', c_3, 0)$ où c_1, c_2, c_2', c_3, $c_3' \in C$ et où

$$f_{12} \in F(\psi_1), \qquad \psi_1 = \varphi_1' - c_2\varphi_1 - c_2'\varphi_2,$$
$$f_{13} \in F(\psi_2), \qquad \psi_2 = \varphi_2' - c_3'\varphi_1 - c_3\varphi_2.$$

D'après (7.12) on sait que $f_4 = {}^t(f_{14}, f_{24}, f_{34}, c_4)$ où $c_4 \in C$ et où

$$f_{24} \in F(\psi_3), \qquad \psi_3 = c_2\varphi_2' - c_3\varphi_1' - c_4\varphi_2,$$
$$f_{34} \in F(\psi_4), \qquad \psi_4 = c_2'\varphi_2' + c_3\varphi_1' - c_4\varphi_1.$$

Puisque $\bar{\psi}_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$, on a les égalités suivantes:

$$\begin{cases} \overline{\varphi_1'} = c_2\bar{\varphi}_1 + c_2'\bar{\varphi}_2, & c_4\bar{\varphi}_1 = c_2'\overline{\varphi_2'} + c_3\overline{\varphi_1'}, \\ \overline{\varphi_2'} = c_3'\bar{\varphi}_1 + c_3\bar{\varphi}_2, & c_4\bar{\varphi}_2 = c_3'\overline{\varphi_1'} + c_2\overline{\varphi_2'}. \end{cases}$$

Puisque $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_3'}$ sont linéairement indépendants nous avons:

$$\frac{1}{c_4} \cdot \begin{pmatrix} c_2 & c_2' \\ c_3' & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_3 & c_2' \\ c_3' & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où on a

$$\begin{cases} c_4 = c_2 \cdot c_3 + c_2' \cdot c_3' \\ c_2 \cdot c_2' = c_3 \cdot c_3' = 0. \end{cases}$$

Puisque det $(f) \neq 0$ il n'y a que deux possibilités suivantes:

$$(1) \quad \begin{cases} c_2 = c_3 = 0 \\ c_4 = c_2' \cdot c_3', \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} c_2' = c_3' = 0 \\ c_4 = c_2 \cdot c_3. \end{cases}$$

Le cas (1). Dans ce cas on sait que:

$$\begin{cases} \psi_1 = \varphi_1' - c_2'\varphi_2 = \dfrac{1}{c_3'}\psi_3, \\[2ex] \psi_2 = \varphi_2' - c_3'\varphi_1 = \dfrac{1}{c_2'}\psi_4. \end{cases}$$

Par suite il existe deux nombres α et β tels que

$$\begin{cases} f_{24} = c_3' f_{12} + \alpha, \\ f_{34} = c_2' f_{13} + \beta. \end{cases}$$

D'après (7.12) nous obtenons l'égalité suivante:

$$f_{14}(x+b) + \varphi_1(b)f_{24}(x+b) + \varphi_2(b)f_{34}(x+b) + c_4 \cdot \varphi_3(b)$$
$$= \varphi_3'(x) + f_{12}(x) \cdot \varphi_2'(b) + f_{13}(x) \cdot \varphi_1'(b) + f_{14}(x)$$

pour $b \in \Pi$ et $x \in A$.

Considérons maintenant la fonction g suivante:

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$$g = f_{14} - f_{12} \cdot f_{13}.$$

D'après un calcul direct nous obtenons l'égalité suivante:

$$g(x+b) = g(x) + \psi(b) \qquad \text{pour} \quad b \in \Pi \text{ et } x \in A,$$

où $\psi = c_4 \cdot \varphi_3^* - \varphi_3'^* + \alpha\varphi_1 - \beta\varphi_2$. Il en résulte que

$$\overline{\varphi_3'^*} = c_4 \cdot \overline{\varphi_3^*} + \alpha\overline{\varphi}_1 + \beta\overline{\varphi}_2.$$

Le cas (2). Dans ce cas nous arriverons de la même manière aux égalités suivantes:

$$\overline{\varphi_1'} = c_2\overline{\varphi}_1, \quad \overline{\varphi_2'} = c_3\overline{\varphi}_2$$
$$\overline{\varphi_3'^*} = c_2c_3\overline{\varphi_3^*} + \alpha\overline{\varphi}_1 + \beta\overline{\varphi}_2.$$

Réciproquement si, pour deux représentations φ et φ', les conditions (7.8) sont satisfaites nous pouvons fabriquer une application holomorphe f de A dans $GL(4, C)$ telle que $\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$ et le lemme est ainsi démontré.

Notation 3. Nous désignerons par $\mathbf{S}_{n,r}$ la variété de Stiefel des couples des r vecteurs linéairement indépendants $(v_1, \ldots, v_r)$ dans C^n.

PROPOSITION 7.4. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre l'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, 2, 1; 1, 2, 1)$ *et l'espace* quotient $\mathbf{E}(3)$ *de* $\mathbf{S}_{n,2} \times C^n$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$$((v_1, v_2), w) \sim ((v_1', v_2'), w')$$

si et seulement s'il existe 4 *nombres* c, c', α, β *tels que*

$$\begin{cases} v_1' = cv_1 \\ v_2' = c'v_2 \\ w' = c \cdot c'w + \alpha v' + \beta v_2 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} v_1' = cv_2 \\ v_2' = c'v_1 \\ w' = c \cdot c'w + \alpha v_1 + \beta v_2, \end{cases}$$

pour $(v_1, v_2), (v_1', v_2') \in S_{n,2}$ *et* $w, w' \in C^n$.

PROPOSITION 7.5. *L'espace quotient* $\mathbf{E}(3)$ *défini dans la Proposition* 7.4 *se munit d'une structure d'espace fibré vectoriel holomorphe de fibré* C^{n-2} *de base le produit symétrique* $P_{n-1} * P_{n-1}$ *de l'espace projectif complexe* P_{n-1} i.e. $P_{n-1} * P_{n-1}$ *est l'espace quotient de* $P_{n-1} \times P_{n-1} - \Delta$ *par la relation d'équivalence* $(y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$ *où* Δ *désigne le sous-ensemble fermé des éléments* (y, y) $(y \in P_{n-1})$ *de* $P_{n-1} \times P_{n-1}$.

Remarquons, en effet, que deux vecteurs v_1 et v_2 dans C^n sont linéairement indépendants si et seulement si $p(v_1) \neq p(v_2)$ où p désigne la projection canonique de $C^n - (0)$ sur P_{n-1}. Définissons la projection π de $\mathbf{E}(3)$ sur $P_{n-1} * P_{n-1}$ par $\pi(\{((v_1, v_2), w)\}) = \rho(p(v_1), p(v_2))$, où ρ désigne la projection canonique de $P_{n-1} \times P_{n-1} - \Delta$ sur $P_{n-1} * P_{n-1}$ et où $\{((v_1, v_2), w)\}$ désigne la classe de $\mathbf{E}(3)$ contenant $((v_1, v_2), w)$. Il n'est pas difficile de verifier que $\mathbf{E}(3)$ $(P_{n-1} * P_{n-1}, C^{n-2}, \pi)$ est un espace fibré vectoriel holomorphe.

(C_2) $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1, 2, 1;\ 2, 1, 1)$

LEMME 7.9. *Soient* $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & \varphi_1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 \\ & 1 & \varphi'_1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_3$ *(resp.* $\bar{\varphi}'_1, \bar{\varphi}'_3$*) soient linéairement indépendants. Pour que* $\varphi \sim \varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe* 6 *nombres* $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ *tels que* $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$ *et que*

$$\begin{cases} \bar{\varphi}'_1 = c_1 \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}'_3 = c_2 \bar{\varphi}_3 + c_4 \bar{\varphi}_1 \\ \overline{\varphi'^*_2} = c_3 \overline{\varphi^*_2} + c_5 \bar{\varphi}_1 + c_6 \bar{\varphi}_3. \end{cases}$$

Puisque la démonstration sera faite tout à fait de la même manière que celle du Lemme 7.8 nous ometterons la démonstration en détail.

PROPOSITION 7.6. *Il existe une correspondance bi-univoque bien determinée entre l'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1, 2, 1;\ 2, 1, 1)$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(4)$ *de* $\mathbf{S}_{n,2} \times C^n$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$$((v_1, v_2), w) \sim ((v'_1, v'_2), w')$$

si et seulement s'il existe 6 *nombres* $c_1, c_2, c_3, \alpha, \beta, \gamma$ *tels que* $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \neq 0$ *et que*

$$\begin{cases} v'_1 = c_1 v_1, \\ v'_2 = c_2 v_2 + \alpha v_1, \\ w' = c_3 w + \beta v_1 + \gamma v_2. \end{cases}$$

(D) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 2, 1, 1)$

En prenant l'espace fibré vectoriel dual l'un de l'autre nous pouvons facilement démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 7.7. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée* *entre* $J(T^n;\ 2, 1, 1;\ 1, 2, 1)$ *et* $J(T^n;\ 1, 2, 1;\ 2, 1, 1)$.

PROPOSITION 7.8. $J(T^n;\ 2, 1, 1) = J(T^n;\ 2, 1, 1;\ 1, 2, 1)$.

Démonstration. Soit $E_\varphi \in J(T^n;\ 2, 1, 1)$ et soit E^* le dual de $E = E_\varphi$. D'après la Proposition 5.4 E^* est de longueur 3 et par suite E^* est de type $(1, 1, 2)$ où de type $(1, 2, 1)$ où de type $(2, 1, 1)$. D'après la Proposition 7.3 E^* n'est pas de type $(1, 1, 2)$. Supposons que E^* soit de type $(2, 1, 1)$. Nous allons montrer que E^* est décomposable. Pour le montrer nous allons d'abord démontrer le lemme suivant:

LEMME 7.10. *Soient* E_φ *et* E_φ^* *de type* $(2, 1, 1)$. *Alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' *de* Π *de la forme suivante:*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & 0 & \varphi_1 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $\bar{\varphi}_1 = 0$ *et* $\bar{\varphi}_2 \neq 0$.

Démonstration. Posons $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * & * \\ & 1 & \varphi_2 & * \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Si $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi_3 \neq 0$, alors il existe deux nombres k et k' tels que $\varphi_2 = k\varphi_1$ et $\varphi_3 = k'\varphi_1$. Si, de plus, $\bar{\varphi}_1 \neq 0$, alors on voit que E_φ est de type $(1, 1, 1, 1)$ (Lemme 7.2). Si au contraire $\bar{\varphi}_1 = 0$, alors E_φ est de type $(2, 2)$ ou $\dim \Gamma(E_\varphi) \geqq 3$ parce que $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ définit un fibré trivial $E_{\varphi'}$.

(1) Examinons le cas où $\varphi_1 = 0$. Dans ce cas $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_4 & \varphi_6 \\ & 1 & \varphi_2 & \varphi_5 \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ où $\bar{\varphi}_3 \neq 0$, sinon φ n'est pas de type $(2, 1, 1)$. Par suite d'après le même raisonnement que le Lemme 7.3 on sait que φ est équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \varphi_3' \\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons voir que $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_3'}$ sont linéairement indépendants. Supposons que $\overline{\varphi_3'} = \alpha \cdot \overline{\varphi_1'}$. Posons $\psi_1 = \varphi_3' - \alpha\varphi_1'$. Alors on a les équivalences suivantes:

$$\varphi' \underset{f}{\sim} \varphi'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \psi_1 \\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \underset{g}{\sim} \varphi''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, $g_1 \in F(\psi_1)$. L'espace fibré $E_{\varphi'''}$ étant décomposable, $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_3'}$ devont être linéairement indépendants. Considérons le dual $E_{\varphi'^*}$ de $E_{\varphi'}$. Puisque ${}^s\varphi'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\varphi_1' & \varphi_2' & -\varphi_3' \\ & 1 & -\varphi_3' & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, on sait, d'après le Lemme 7.4, que φ'^* est de type (1, 2, 1) ce qui est absurde.

(2) Examinons maintenant le cas où $\varphi_3 = 0$. Si $\bar\varphi_1 = 0$, alors φ n'est pas de type (2, 1, 1). φ doit donc être équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & 0 & \varphi_1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\bar\varphi_1 \neq 0$, on sait que $\bar\varphi_2$ est dépendant à $\bar\varphi_1$ car $\dim \Gamma(E_{\varphi'}) = 2$ et par suite nous pouvons supposer que $\bar\varphi_2 = 0$. Alors

$$\varphi' \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ & 1 & \varphi_1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \underset{g}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & 0 \\ & 1 & \varphi_1 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $f = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et où $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, $g_1 \in F(\varphi_2)$.

(3) Il nous reste donc d'examiner le cas où $\varphi_2 = 0$. Changeant les notations nous poserons $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Nous pouvons supposer que φ_1 et φ_3 sont linéairement indépendants car, sinon φ est réduit au cas (1). De même on peut supposer que φ_2 et φ_4 sont linéairement indépendants. Puisque $\varphi(b) \cdot \varphi(b') = \varphi(b') \cdot \varphi(b)$ pour $b, b' \in \Pi$, on obtient l'égalité suivante:

$$\varphi_1(b) \cdot \varphi_4(b') + \varphi_3(b)\varphi_2(b') = \varphi_1(b')\varphi_4(b) + \varphi_3(b') \cdot \varphi_2(b)$$

pour $b, b' \in \Pi$. D'après le Lemme 7.1 il existe 3 nombres α, β, γ tels que

$$(7.13) \qquad \begin{cases} \varphi_4 = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_3, \\ \varphi_2 = \beta\varphi_1 + \gamma\varphi_3. \end{cases}$$

Si $\bar\varphi_1 = \bar\varphi_3 = 0$ alors on a $\dim \Gamma(E_\varphi) \geqq 3$. Montrons maintenant que, si $\bar\varphi_1$ et $\bar\varphi_3$ sont linéairement indépendants alors $\bar\varphi_2$, $\bar\varphi_4$ le sont aussi. En effet soit

$$a \cdot \bar\varphi_4 + b \cdot \bar\varphi_2 = 0.$$

Alors on a $a(\alpha\bar\varphi_1 + \beta\bar\varphi_3) + b(\beta\bar\varphi_1 + \gamma\bar\varphi_3) = 0$, d'où on a $a\alpha + b\beta = a\beta + b\gamma = 0$ et par suite $a\varphi_4 = b\varphi_2 = 0$ et on a donc $a = b = 0$ car φ_4 et φ_2 sont linéairement indépendants. D'autre part si $\bar\varphi_1$ et $\bar\varphi_3$ (resp. $\bar\varphi_4$ et $\bar\varphi_2$) sont linéairement indépendants, on voit que E_φ est de type $(1, 2, 1)$. On peut donc supposer que $\bar\varphi_1 = a\bar\varphi_3$ et ensuite on peut supposer que $\bar\varphi_1 = 0$. Dans ce cas on a $\bar\varphi_4 = \beta\bar\varphi_3$, $\bar\varphi_2 = \gamma\bar\varphi_3$. Or, on a $\gamma \neq 0$, car $E_\varphi / E_\varphi^0 \simeq E_{\varphi'}$ où $\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E_{\varphi'}$ est de type $(1, 1)$. Puisque $\gamma \neq 0$ on a l'équivalence suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 + \dfrac{\beta}{\gamma}\varphi_1 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 - \dfrac{\beta}{\gamma}\varphi_2 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \dfrac{\beta}{\gamma} & 0 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent on peut supposer que

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \bar\varphi_1 = \bar\varphi_4 = 0,\ \bar\varphi_3 \neq 0,\ \bar\varphi_2 \neq 0.$$

Maintenant d'après (7.13) on a $\bar\varphi_4 = \alpha\bar\varphi_1 + \beta\bar\varphi_3 = \beta\bar\varphi_3$ d'où on a $\beta = 0$ et $\varphi_4 = \alpha\varphi_1$ et $\varphi_2 = \gamma\varphi_3$ où $\alpha \neq 0$ car $\varphi_4 \neq 0$. Il est donc facile de voir que

$$\varphi \underset{g}{\sim} \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \sqrt{\dfrac{\alpha}{\gamma}}\varphi_1 \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

où $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$. Le lemme est ainsi démontré.

Démonstration de la proposition 7.8. Posons, maintenant comme suit :

$$\varphi_1' = \varphi_2, \qquad \varphi_2' = \varphi_3 - \frac{1}{2}\varphi_1^2 - \varphi_2$$

$$f = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 & \frac{1}{2}h^2 \\ 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_2' \\ & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $h \in F(\varphi_1)$. Alors pour $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ & 1 & 0 & \varphi_2 \\ & & 1 & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ on a l'équivalence suivante :

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$$

et la proposition est démontrée.

(*E*) *L'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n\,;\ 2,\ 2)$

Lemme 7.11. *Soit* E_φ *de type* (2,2), *alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' *de la forme suivante :*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ & 1 & * & * \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.14}$$

Posons, en effet, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & * & * \\ & 1 & \varphi_2 & * \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Si $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_3 \neq 0$ on sait que $\varphi \sim \varphi'$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_3 & * \\ & 1 & 0 & * \\ & & 1 & \varphi_3 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $E_\varphi/E_\varphi^\circ$ est trivial on a $\bar{\varphi}_3 = 0$ alors $\dim \Gamma(E_\varphi) \geqq 3$, ce qui est absurde. De même il n'arrive pas au cas $\varphi_1 \neq 0$ et $\varphi_3 = 0$. Si $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_3 \neq 0$ et si $\varphi_2 = 0$, nous pouvons poser

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 \\ & 1 & 0 & \varphi_4 \\ & & 1 & \varphi_2 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons supposer que φ_1, φ_3 (resp. φ_2, φ_4) sont linéairement indépendants, sinon φ est réduit aux cas déjà considérés. Si $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_3$ sont linéairement indépendants, $\bar{\varphi}_2$ et $\bar{\varphi}_4$ le sont aussi (cf. la démonstration du lemme 7.10) et par suite on sait que E_φ est de type (1, 2, 1). Nous pouvons donc supposer que $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_3$ (resp. φ_2, φ_4) sont linéairement dépendants et ensuite que $\bar{\varphi}_1=0$. Dans ce cas $\bar{\varphi}_2=0$ car E_φ est de type (2, 2). Puisqu'on peut écrire comme suit:

$$\varphi_4=\alpha\varphi_1+\beta\varphi_3, \qquad \varphi_2=\beta\varphi_1+\gamma\varphi_3$$

on obtient $\gamma=0$. On peut donc poser $\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_4\\ & & 1 & \varphi_1\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$ où $\varphi_4=\varphi_3+\alpha\varphi_1$. Maintenant on sait que

$$\varphi \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3+\frac{\alpha}{2}\varphi_1 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_3+\frac{\alpha}{2}\varphi_1\\ & & 1 & \varphi_1\\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \text{ où } f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & \frac{\alpha}{2} & 0\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

Par conséquent on n'a qu'à considérer une φ telle que

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5\\ & 1 & 0 & \varphi_3\\ & & 1 & \varphi_1\\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{\varphi}_3\neq 0,\ \bar{\varphi}_1=0.$$

Par un calcul direct nous avons l'équivalence suivante:

$$\varphi \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & \varphi_3 & \varphi_5'\\ & 1 & 0 & \varphi_3\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix},$$

où $\varphi_5'=\varphi_5-\varphi_1\cdot\varphi_3$ et où $f=\begin{pmatrix}1 & f_1 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0\\ & & 1 & f_1\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$ avec $f_1\in F(\varphi_1)$. Lorsque $\varphi_1\neq 0$, $\varphi_2\neq 0$, $\varphi_3\neq 0$, d'après le même raisonnement que celui de la démonstration du Lemme 7.2 φ est équivalente à une représentation φ' de la forme suivante:

$$\varphi\sim\varphi'=\begin{pmatrix}1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3\\ & 1 & \varphi_1 & \varphi_2\\ & & 1 & \varphi_1\\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \bar{\varphi}_1=0.$$

Dans ce cas aussi il n'est pas difficile de démontrer que φ' est équivalente à une représentation de la forme (7.14) et le lemme est démontré.

Notations 4. Si $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_1 & \varphi_4 \\ & 1 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ est une représentation de Π nous écrivons $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ et $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_4 \\ \bar{\varphi}_3 & \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}$ (matrice des éléments de $\tilde{A}$ (cf. commencement du § 6)), φ_i étant clairement un homomorphisme de A dans C. De même nous désignerons par $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_4 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix}$ la matrice $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_1 & f_4 \\ 0 & 1 & f_3 & f_2 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Posons $d(\varphi) = d(E_\varphi) = \dim \{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_4\}_C$.

LEMME 7.12. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$. *Si* $\bar{\varphi}_{i_0} = 0$ *pour un indice* i_0, *alors* $\varphi \sim \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_4' \\ \varphi_3' & \varphi_2' \end{bmatrix}$ *où* $\varphi_i' = \varphi_i$ *pour* $i \neq i_0$ *et où* $\varphi_{i_0}' = 0$.

En effet, puisque $\begin{bmatrix} f_1 & f_4 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1' & f_4' \\ f_3' & f_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1+f_1' & f_4+f_4' \\ f_3+f_3' & f_2+f_2' \end{bmatrix}$, il est facile de voir que

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$$

par $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_4 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix}$ tel que $f_i = 0$ $(i \neq i_0)$ et que $f_{i_0} \in F(\varphi_{i_0})$.

Le lemme suivant est facile à démontrer.

LEMME 7.13. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ *une représentation de* Π. *Alors on a les équivalences suivantes*:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4+\alpha\varphi_1 \\ \varphi_3 & \varphi_2+\alpha\varphi_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_1 \\ \varphi_3+\alpha\varphi_1 & \varphi_2+\alpha\varphi_4 \end{bmatrix}.$$

LEMME 7.14. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$. *Si* $d(\varphi) \leqq 1$, *alors* E_φ *est décomposable.*

En effet, si $d(\varphi) = 0$, d'après le Lemme 7.12 le lemme est trivialement verifié. Soit $d(\varphi) = 1$. Alors, d'après les Lemme 7.12 et 7.13. $\varphi \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 \end{bmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \varphi_1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ et E_φ est décomposable.

LEMME 7.15. *Soient* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ *et* $\varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_4' \\ \varphi_3' & \varphi_2' \end{bmatrix}$ *telles que* $d(\varphi) \geqq 2$, $d(\varphi') \geqq 2$. *Alors, si* $\varphi \sim \varphi'$ *on a* $d(\varphi) = d(\varphi')$.

Démonstration. Soit $\varphi \underset{F}{\sim} \varphi'$. Posons $F = \begin{pmatrix} f & g \\ h & k \end{pmatrix}$, où f, g, h, k sont des (2.2)-matrices. Puisque $\varphi(b) \cdot F(x+b) = F(x) \cdot \varphi'(b)$ pour $b \in \Pi$ et $x \in A$, on obtient l'égalité suivante

$$(7.15)\quad \begin{pmatrix} f(x+b) + \varphi(b) \cdot h(x+b) & g(x+b) + \varphi(b) k(x+b) \\ h(x+b) & k(x+b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) & f(x)\varphi'(b) + g(x) \\ h(x) & h(x)\varphi'(b) + k(x) \end{pmatrix}$$

pour $b \in \Pi$ et $x \in A$, où $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{pmatrix}$ et $\varphi' = \begin{pmatrix} \varphi_1' & \varphi_4' \\ \varphi_3' & \varphi_2' \end{pmatrix}$. On sait d'abord $h = (h_{ij})$ est constant. Puisque

$$k(x+b) = h \cdot \varphi'(b) + k(x),$$

on a

$$(k_{ij}(x+b)) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(b) & \varphi_4'(b) \\ \varphi_3'(b) & \varphi_2'(b) \end{pmatrix} + (k_{ij}(x)).$$

D'après le Lemme 2.1 on obtient alors

$$(7.16)\quad \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1'} & \overline{\varphi_4'} \\ \overline{\varphi_3'} & \overline{\varphi_2'} \end{pmatrix} = 0.$$
$$\text{i.e.} \quad h \cdot \overline{\varphi'} = 0.$$

Nous considérons séparément plusieurs cas suivants :

(1) $d(\varphi') = 4$. Alors $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_3'}$ sont linéairement indépendants. D'après (7.16) on a les égalités suivantes :

$$h_{11}\overline{\varphi_1'} + h_{21}\overline{\varphi_3'} = 0, \qquad h_{21}\overline{\varphi_1'} + h_{22}\overline{\varphi_3'} = 0.$$

Par suite on sait que $h = 0$ et que k est aussi constant. Alors d'après (7.15) l'application f de A dans $GL(2, C)$ est aussi constante et on obtient finalement :

$$g(x+b) + \varphi(b) \cdot k = f \cdot \varphi'(b) + g(x)$$

pour $b \in \Pi$ et $x \in A$. Par conséquent on a $\bar{\varphi} \cdot k = f \cdot \overline{\varphi'}$ et $\bar{\varphi} = f \cdot \bar{\varphi}' \cdot k^{-1}$ ce qui entraîne que $d(\varphi) = d(\varphi') = 4$ car $\det(k) \cdot \det(f) = \det(F) \neq 0$.

(2) $d(\varphi') = 3$. D'après le Lemme 7.13 on peut supposer que $\overline{\varphi_1'}$ et $\overline{\varphi_3'}$ sont linéairement indépendants. Après cela nous pouvons raisonner comme dans le cas (1) et on obtient $d(\varphi) = 3$.

(3) $d(\varphi') = 2$. Si $d(\varphi) \geqq 3$, alors, d'après (1) et (2) $d(\varphi') = d(\varphi)$ en ramplaçant le rôle de φ' par φ ce qui est absurde et le Lemme est ainsi démontré.

D'après le raisonnement du (1) dans la démonstration du Lemme 7.14 on sait que le lemme suivant est vrai :

LEMME 7.16. *Soient* $\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_4\\ \varphi_3 & \varphi_2\end{bmatrix}$ *et* $\varphi'=\begin{bmatrix}\varphi_1' & \varphi_4'\\ \varphi_3' & \varphi_2'\end{bmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $\bar{\varphi}_1$ *et* $\bar{\varphi}_3$ *soient linéairement indépendants. Si* $\varphi\sim\varphi'$, *il existe deux matrices* f *et* $k\in GL(2, C)$ *telles que*

$$f\cdot\bar{\varphi}\cdot k=\varphi'.$$

Réciproquement, s'il existe deux $f, k\in GL(2, C)$ *telles que la condition ci-dessus soit satisfaite, alors* $\varphi\sim\varphi'$.

LEMME 7.17. *Si* $\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_4\\ \varphi_3 & \varphi_2\end{bmatrix}$ *est décomposable, alors* $d(\varphi)\leqq 2$.

En effet, puisque E_φ est de longueur 2, si E_φ est décomposable E_φ est isomorphe à $E_1\oplus E_2$ où E_1 et E_2 sont de longueur $\leqq 2$. i.e. φ est equivalente à une des représentations suivantes :

$$(1)\begin{pmatrix}1 & \varphi_1' & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0\\ & & 1 & \varphi_1''\\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \text{ où } (2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & \varphi_1' & \varphi_2'\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix} \text{ où } (3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & \varphi_1'\\ & & 1 & \varphi_2'\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}.$$

Dans le cas (1), $\begin{pmatrix}1 & \varphi_1' & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0\\ & & 1 & \varphi_2''\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & \varphi_1' & 0\\ & 1 & 0 & \varphi_2''\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$.

Dans le cas (3), $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & \varphi_1'\\ & & 1 & \varphi_2'\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \varphi_1'\\ & 1 & 0 & \varphi_2'\\ & & 1 & 0\\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$.

Dans tous les cas on obtient $d(\varphi)\leqq 2$.

Remarque. Si $d(\varphi)=2$, E_φ n'est pas toujours décomposable. Nous rencontrerons ce cas dans la suite.

LEMME 7.18. *Soient* φ *et* φ' *deux représentations de* Π *telles que* $d(\varphi)=d(\varphi')=4$. *Pour que* $\varphi\sim\varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe deux matrices* $f, k\in GL(2, C)$ *telles que* $\bar{\varphi}\cdot f=k\cdot\bar{\varphi}'$.

En effet, c'est un corollaire du Lemme 7.16.

PROPOSITION 7.9. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre le sous-ensemble* $\mathbf{J}_4(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{2}, \mathbf{2})$ *de* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{2}, \mathbf{2})$ *des* E_φ *tels que* $d(\varphi)=4$ *et l'espace* *quotient* $\mathbf{E}(5)$ *de* $\mathbf{S}_{n,4}$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \sim (v_1', v_2', v_3', v_4')$$

si et seulement s'il existe deux matrices $f, k \in GL(2, C)$ *telles que* $f \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_4 \\ v_3 & v_2 \end{pmatrix} \cdot k = \begin{pmatrix} v_1' & v_4' \\ v_3' & v_2' \end{pmatrix}$.

LEMME 7.19. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ *une représentation de* Π *telle que* $d(\varphi) = 3$. *Alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' ou φ'' *de la forme suivante:*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_3' \\ \varphi_3' & \varphi_2' \end{bmatrix} \cdots (1) \quad ou$$

$$\varphi \sim \varphi'' = \begin{bmatrix} \varphi_1'' & 0 \\ \varphi_3'' & \varphi_2'' \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_2'' & \varphi_3'' \\ 0 & \varphi_1'' \end{bmatrix} \cdots (2)$$

De plus $\varphi' \nsim \varphi''$.

En effet, on peut supposer, d'après le Lemme 7.13, que $\bar{\varphi}_4 \in \{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3\}_C$, soit $\bar{\varphi}_4 = a\bar{\varphi}_1 + b\bar{\varphi}_2 + c\bar{\varphi}_3$. Supposons, d'abord, que $ab + c \neq 0$. Soit $f = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ a & c \end{pmatrix} \in GL(2, C)$. Alors on a $f \cdot \bar{\varphi} = \begin{pmatrix} * & f_{11}\bar{\varphi}_4 + f_{12}\bar{\varphi}_2 \\ f_{21}\bar{\varphi}_1 + f_{22}\bar{\varphi}_3 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \bar{\varphi}_3' \\ \bar{\varphi}_3' & * \end{pmatrix} = \bar{\varphi}'$. D'après le Lemme 7.16 on sait que $\varphi \sim \varphi'$. Supposons, maintenant que $ab + c = 0$. Alors $\bar{\varphi}_4 = a\bar{\varphi}_1 + b\bar{\varphi}_2 - ab\bar{\varphi}_3$ et on voit, d'après le lemme 7.13, que

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1 & b\varphi_2 + c\varphi_3 \\ \varphi_3 & \varphi_2 - a\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & b(\varphi_2 - a\varphi_3) \\ \varphi_3 & \varphi_2 - a\varphi_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_1 - b\varphi_3 & 0 \\ \varphi_3 & \varphi_2 - a\varphi_3 \end{bmatrix}$$

ce qui est les cas (2). Nous allons démontrer que $\varphi' \nsim \varphi''$. D'après le Lemme 7.16, pour que $\varphi' \sim \varphi''$ il faut exister deux matrices $f, k \in GL(2, C)$ telles que $f\bar{\varphi}'k = \bar{\varphi}''$ où

$$\bar{\varphi}' = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1' & \bar{\varphi}_3' \\ \bar{\varphi}_3' & \bar{\varphi}_2' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}'' = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1'' & 0 \\ \bar{\varphi}_3'' & \bar{\varphi}_2'' \end{pmatrix}.$$

Or, $f\bar{\varphi}'k = \begin{pmatrix} * & f_{11}(\bar{\varphi}_1 k_{12} + \bar{\varphi}_3 k_{22}) + f_{12}(\bar{\varphi}_3 k_{12} + \bar{\varphi}_2 k_{22}) \\ * & * \end{pmatrix}$. Par suite on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{cases} f_{11}k_{12} = 0, & f_{12}k_{22} = 0 \\ f_{11}k_{22} + f_{12} \cdot k_{12} = 0. \end{cases}$$

Maintenant il est facile de voir que $\det(f) = 0$ ou que $\det(k) = 0$ ce qui est absurde et le lemme est démontré.

Notations 5. Soit $\tilde{N}(m, C)$ le sous-groupe de $GL(m, C)$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} c_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c_m \end{pmatrix}$.

Prenons une matrice $\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, C)$. Definissons une représentation ρ de $GL(2, C)$ dans $GL(3, C)$ par la formule suivante:

$$\rho(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta+\beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons verifier que $\rho(\mu \cdot \mu') = \rho(\mu) \cdot \rho(\mu')$ pour $\mu, \mu' \in GL(2, C)$ et que $\rho(\mu) \in GL(3, C)$.

Lemme 7.20. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix}$, $\varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_3' \\ 0 & \varphi_2' \end{bmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $d(\varphi) = d(\varphi') = 3$. *Pour que* $\varphi \sim \varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe deux matrices* f *et* $k \in \tilde{N}(2, C)$ *telles que*

$$f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \varphi'.$$

où l'on a posé $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_3 \\ 0 & \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}$, $\bar{\varphi}' = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1'} & \overline{\varphi_3'} \\ 0 & \overline{\varphi_2'} \end{pmatrix}$.

En effet, si $f, k \in GL(2, C)$ satisfont à la condition $f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \varphi'$, alors on peut voir aisément que $f, k \in \tilde{N}(2, C)$.

Nous avons donc démontré la proposition suivante:

Proposition 7.10. *Soit* $\mathbf{J}_3'(\mathbf{T}^n;\ 2, 2)$ *le sous-ensemble de* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 2, 2)$ *des* E_φ *tels que* $d(\varphi) = 3$ *et que* φ *est de la forme* (2) *dans le Lemme* 7.19. *Il existe alors une correspondance bi univoque bien déterminée entre* $\mathbf{J}_3'(\mathbf{T}^n;\ 2, 2)$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(6)$ *de* $\mathbf{S}_{n,3}$ *par le relation d'équivalence definie comme suit:*

$(v_1, v_2, v_3) \sim (v_1', v_2', v_3')$ *si et seulement s'il existe deux matrices* $f, k \in \tilde{N}(2, C)$ *telles que*

$$f \cdot \begin{pmatrix} v_1 & v_3 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \cdot k = \begin{pmatrix} v_1' & v_3' \\ 0 & v_2' \end{pmatrix}.$$

Lemme 7.21. *Soient* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ et $\varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_3' \\ \varphi_3' & \varphi_2' \end{bmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $d(\varphi) = d(\varphi') = 3$. *Pour que* $\varphi \sim \varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe un nombre* $\varepsilon \neq 0$ *et une matrice* $f \in GL(2, C)$ *tels que l'égalité suivante soit satisfaite:*

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi_1'} \\ \varphi_2' \\ \varphi_3' \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \rho(f) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_3 \end{pmatrix}. \tag{7.17}$$

Démonstration. Supposons que $\varphi \sim \varphi'$. D'après le Lemme 7.16 il existe deux matrices f et $k \in GL(2, C)$ telles que

$$f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \overline{\varphi'}. \tag{7.18}$$

L'égalité (7.18) s'écrit par les composantes comme suit:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(\bar{\varphi}_1 k_{11} + \bar{\varphi}_3 k_{21}) + f_{21}(\bar{\varphi}_3 k_{11} + \bar{\varphi}_2 k_{21}) & f_{11}(\bar{\varphi}_1 k_{12} + \bar{\varphi}_3 k_{22}) + f_{12}(\bar{\varphi}_3 k_{12} + \bar{\varphi}_2 k_{22}) \\ f_{21}(\bar{\varphi}_1 k_{11} + \bar{\varphi}_3 k_{21}) + f_{22}(\bar{\varphi}_3 k_{11} + \bar{\varphi}_2 k_{21}) & f_{21}(\bar{\varphi}_1 k_{12} + \bar{\varphi}_3 k_{22}) + f_{22}(\bar{\varphi}_3 k_{12} + \bar{\varphi}_2 k_{22}) \end{pmatrix} = \varphi'. \tag{7.19}$$

Puisque la (1.2)-composante et la (2.1)-composante sont égales à $\bar{\varphi}'_3$ et puisque $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3$ sont linéairement indépendants on obtient les égalités suivantes:

$$\begin{cases} f_{21} k_{11} = f_{11} \cdot k_{12} \\ f_{21} k_{21} + f_{22} k_{11} = f_{11} k_{22} + f_{12} \cdot k_{12} \\ f_{22} k_{21} = f_{12} \cdot k_{22}. \end{cases} \tag{7.20}$$

En résolvant les équations (7.20) par rapport aux k_{ij} on voit aisément qu'il existe un nombre $\varepsilon \neq 0$ tel que

$$k = \varepsilon \cdot {}^t f.$$

D'après (7.19) on obtient, par un calcul facile, l'égalité (7.17). Si, réciproquement, l'égalité (7.17) est satisfaite on peut raisonner tout à l'envers et le lemme est démontré.

PROPOSITION 7.11. *Soit* $\mathbf{J}_3(\mathbf{T}^n; \mathbf{2}, \mathbf{2})$ *le sous-ensemble de* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; \mathbf{2}, \mathbf{2})$ *des* E_φ *tels que* $d(\varphi) = 3$ *et que* φ *est de la forme* (1) *dans le Lemme* 7.19. *Il existe alors une correspondance bi-univoque bien déterminée entre* $\mathbf{J}_3(\mathbf{T}^n; \mathbf{2}, \mathbf{2})$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(7)$ *de* $\mathbf{S}_{n,3}$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$(v_1, v_2, v_3) \sim (v'_1, v'_2, v'_3)$ *si et seulement s'il existe un nombre* $\varepsilon \neq 0$ *et une matrice* $f \in GL(2, C)$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \rho(f) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

LEMME 7.22. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_3 & \varphi_1 + \beta\varphi_3 \end{bmatrix}$, $\beta \neq 0$, *alors* E_φ *est décomposable.*

En effet, posons $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\varphi' = \begin{bmatrix} -\beta\varphi_1 & 0 \\ 0 & \beta\varphi_2 \end{bmatrix}$. Alors on obtient l'égalité suivants:

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$$f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \overline{\varphi'}.$$

D'après le Lemme 7.16 on sait que $\varphi \sim \varphi'$. D'autre part il est clair que $E_{\varphi'}$ est décomposable. Le lemme est ainsi démontré.

LEMME 7.23. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_3 & \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_3 \end{bmatrix}$ *tel que* $\beta^2 + 4\alpha \neq 0$. *Alors* E_φ *est décomposable.*

En effet, l'équation $x^2 + \beta x - \alpha = 0$ ayant deux racines différentes δ et δ' la matrice $k = \begin{pmatrix} \delta & \delta' \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, C)$. Prenons $f = {}^t k$ et posons $\varphi_1' = (\delta^2 + \alpha)\varphi_1 + (2\delta + \beta)\varphi_3$ et $\varphi_3' = (\delta'^2 + \alpha)\varphi_1 + (2\delta' + \beta)\varphi_3$. Alors on obtient

$$f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1'} & 0 \\ 0 & \overline{\varphi_3'} \end{pmatrix}.$$

Puisque $E_{\varphi'}$ est décomposable pour $\varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & 0 \\ 0 & \varphi_3' \end{bmatrix}$, le lemme est démontré.

LEMME 7.24. *Soit* $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_4 \\ \varphi_3 & \varphi_2 \end{bmatrix}$ *telle que* $d(\varphi) = 2$. *Supposons que* E_φ *soit indécomposable. Alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' *de la forme suivante :*

$$\varphi \sim \varphi' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \varphi_3' \\ \varphi_3' & 0 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

Rèciproquement pour une représentation φ' *de la forme ci-dessus telle que* $d(\varphi') = 2$, $E_{\varphi'}$ *est indécomposable.*

Démonstration. Utilisant le Lemme 7.13 plusieurs fois, on voit qu'une représentation φ dont $d(\varphi) = 2$ est équivalente à une des représentations dans les Lemmes 7.20 ou 7.21. Puisque E_φ est supposé indécomposable et puisque $\begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_3 & \varphi_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \varphi_3 & \varphi_1 \\ \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$ il suffit de montrer que $\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_3 \\ \varphi_3 & \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_3 \end{bmatrix}$ tel que $\beta^2 + 4\alpha = 0$ est équivalente à une représentation de la forme (7.21). Pour cela, posons $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\beta}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $k = {}^t f$, $\varphi_3' = -\frac{\beta}{2}\varphi_1 + \varphi_3$ alors on obtient l'égalité suivante :

$$f \cdot \bar{\varphi} \cdot k = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \overline{\varphi_3'} \\ \overline{\varphi_3'} & 0 \end{pmatrix},$$

d'où le lemme résulte. Réciproquement si φ est de la forme (7.21) et si E_φ est décomposable il doit exister deux matrices f et $k \in GL(2, C)$ telles que

$$f \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_3 \\ \bar{\varphi}_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot k = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1'} & 0 \\ 0 & \overline{\varphi_3'} \end{pmatrix},$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

où $\overline{\varphi_1'}$, $\overline{\varphi_3'}$ sont linéairement indépendants. Pourtant il est facile, dans ce cas, de voir que $\det(f)=0$ où $\det(k)=0$, ce qui est absurde et le lemme est ainsi démontré.

LEMME 7.25. *Soient* $\varphi=\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_3\\ \varphi_3 & 0\end{bmatrix}$ *et* $\varphi'=\begin{bmatrix}\varphi_1' & \varphi_3'\\ \varphi_3' & 0\end{bmatrix}$ *deux représentations de* Π *telles que* $d(\varphi)=d(\varphi)=2$. *Pour que* $\varphi\sim\varphi'$ *il faut et il suffit qu'il existe trois nombres* c, c' *et* ε *tels que* $c\cdot c'\neq 0$ *et que*

$$\left\{\begin{aligned}\overline{\varphi_1'}&=c\cdot c'\cdot\overline{\varphi}_1+\varepsilon\cdot\overline{\varphi}_3\\ \overline{\varphi_3'}&=c\cdot\overline{\varphi}_3.\end{aligned}\right.\tag{7.22}$$

Démonstration. Supposons que $\varphi\sim\varphi'$. Alors il existe deux matrices f et $k\in GL(2,C)$ telles que

$$f\cdot\overline{\varphi}\cdot k=\overline{\varphi'}.$$

Par un calcul facile nous pouvons verifier que f et k sont de la forme suivante:

$$f=\begin{pmatrix}\alpha\beta & \gamma\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\qquad k=\begin{pmatrix}\alpha\delta & 0\\ \varepsilon & \delta\end{pmatrix},$$

où α, β, γ, δ sont des nombres complexes convenablement choisis. Il est maintenant facile de voir que

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_1'&=\alpha^2\beta\delta\varphi_1+\alpha(\beta\varepsilon+\gamma\delta)\varphi_3\\ \varphi_3'&=\alpha\beta\delta\varphi_3\end{aligned}\right.$$

En prenant $c=\alpha\beta\delta$, $\alpha=c'$, $\varepsilon=c'(\beta\varepsilon+\gamma\delta)$ on obtient les égalités (7.22). Puisque le raisonnement ci-dessus sera fait tout réciproquement le lemme est démontré.

D'après les Lemmes 7.24 et 7.25 nous avons démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 7.12. *Soit* $\mathbf{J}_2(\mathbf{T}^n;\ 2,\ 2)$ *le sous-ensemble de* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 2,\ 2)$ *des* E_φ *tels que* $d(\varphi)=2$. *Alors il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre l'ensemble* $\mathbf{J}_2(\mathbf{T}^n;\ 2,\ 2)$ *et l'espace quotient* $\mathbf{E}(8)$ *de* $\mathbf{S}_{n,2}$ *par la relation d'équivalence définie comme suit:*

$(v_1, v_2)\sim(x_1', v_2')$ *si et seulement s'il existe 3 nombres* c, c', α *tels que* $c\cdot c'\neq 0$ *et que*

$$\left\{\begin{aligned}v_1'&=cv_1\\ v_2'&=c\cdot c'v_2+\alpha v_1.\end{aligned}\right.$$

(*F*) *L'ensembles* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1},\ \mathbf{3})$ *et* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{3},\ \mathbf{1})$.

PROPOSITION 7.13. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1},\ \mathbf{3})$ *et la variété grassmannienne* $\mathbf{G}_{n,3}$.

PROPOSITION 7.14. *En prenant l'espace fibré vectoriel dual l'un de l'autre il existe une correspondance bi-univoque entre* $J(T^n;\ 1,\ 3)$ *et* $J(T^n;\ 3,\ 1)$.

Nous ne donnerons pas la démonstration des Propositions 7.13 et 7.14 parceque nous démontrerons dans le paragraphe suivant des propositions qui traiteront l'ensemble $J(T^n;\ 1,\ m)$ et $J(T^n;\ m,\ 1)$ pour m quelconque.

Notation 5. Soit $\mathbf{D}_{n,r}$ la variété de drapeaux constituée par des chaines $(V_1, \ldots, V_r)$ de sous-espaces vectoriels V_i de C^n tels que $V_1 \subset \cdots \subset V_r$ et que $\dim V_i = i$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$.

Nous énumérons deux propositions suivantes dont nous ne donnerons pas la démonstration.

PROPOSITION 7.15. $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{1};\ \mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$ *se munit d'une structure d'un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre* C^{n-2} *et de base* $\mathbf{D}_{n,2}$.

PROPOSITION 7.16. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre* $\mathbf{J}_2(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{2},\ \mathbf{2})$ *et* $\mathbf{D}_{n,2}$.

Pour terminer ce paragraphe nous résumons dans le théorème suivant les résultats obtenus.

THÉORÈME 4. *L'ensemble* $E(T^n;\ 4)$ *des espaces fibrés vectoriels holomorphes indécomposables de fibre de dimension* 4 *sur un tore complexe* T^n *admettant des connexions holomorphes est complètement classifié de la facon suivante en utilisant les notations introduites dans ce paragraphe.*

$\mathbf{E}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{4}) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}) \times \mathbf{N}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{4})$.

$\mathbf{E}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1}) \simeq T'^n$: *La variété de Picard de* T^n.

$\mathbf{N}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{4}) = \bigcup_{\substack{\Sigma m_i = 4 \\ l \geqq 2 \\ m_i > 0}} \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_l)$,

$\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_l) \cap \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{m}'_1, \ldots, \mathbf{m}'_{l'}) = \phi$ si $(m_1, \ldots, m_l) \neq (m'_1, \ldots, m'_{l'})$.

$\mathbf{J}(\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_l) = \mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_l)$ *est classifié comme suit:*

$\mathbf{J}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1}) \simeq \mathbf{E}(\mathbf{2})$: *Un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre* C^{n-1} *et de base* $\mathbf{E}(\mathbf{1})$ (cf. Th. 3).

$\mathbf{J}(\mathbf{1},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2}) = \phi$ (*vide*).

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$\mathbf{J}(1, 2, 1) = \mathbf{J}(1, 2, 1; 1, 2, 1) \cup \mathbf{J}(1, 2, 1; 2, 1, 1)$ (*Somme disjointe*).

$\mathbf{J}(1, 2, 1; 1, 2, 1) \simeq \mathbf{E}(3)$: *Un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre* C^{n-2} *et de base* $P_{n-1} * P_{n-1}$ (Prop. 7.5).

$\mathbf{J}(1, 2, 1; 2, 1, 1) \simeq \mathbf{E}(4)$: *Un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre* C^{n-2} *et de base* $\mathbf{D}_{n,2}$ (Prop. 7.15).

$\mathbf{J}(2, 1, 1) \simeq \mathbf{J}(1, 2, 1; 2, 1, 1)$.

$\mathbf{J}(2, 2) = \mathbf{J}_4(2, 2) \cup \mathbf{J}_3(2, 2) \cup \mathbf{J}_3'(2, 2) \cup \mathbf{J}_2(2, 2)$ (*Somme disjointe*).

$\mathbf{J}_4(2, 2) \simeq \mathbf{E}(5)$: *Un espace quotient de* $\mathbf{S}_{n,4}$.

$\mathbf{J}_3'(2, 2) \simeq \mathbf{E}(6)$: *Un espace quotient de* $\mathbf{S}_{n,3}$.

$\mathbf{J}_3(2, 2) \simeq \mathbf{E}(7)$: *Un espace quotient de* $\mathbf{S}_{n,3}$.

$\mathbf{J}_2(2, 2) \simeq \mathbf{D}_{n,2}$: *Une variété de drapeaux.*

$\mathbf{J}(1, 3) \simeq \mathbf{J}(3, 1) \simeq \mathbf{G}_{n,3}$: *Une variété grassmannienne.*

§ 8. Classification de $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, \mathbf{m})$ et de $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n; 1, \ldots, 1)$.

Notation 1. Soit φ une représentation unipotente de Π de degré m. Soit $\Gamma(\varphi)$ l'espace vectoriel complexe défini dans le Lemme 5.2 et prenons un élément $\xi \in \Gamma(\varphi)$. Soit $(\xi_1(x), \ldots, \xi_m(x))$ les composantes de $\xi(x) \in C^m$. Désignons par $\Gamma_i(\varphi)$ le sous-espace vectoriel de $\Gamma(\varphi)$ des éléments ξ tels que $\xi_{i+1}(x) = \cdots = \xi_m(x) = 0$ pour tout $x \in A$. Si $\xi \in \Gamma_i(\varphi)$, alors on voit que ξ_i est constant. L'application ρ_i de $\Gamma_i(\varphi)$ dans C définie par $\rho_i(\xi) = \xi_i$ est clairement une application linéaire. Il est aussi clair que le noyau de ρ_i est égal a l'espace $\Gamma_{i-1}(\varphi)$. On sait donc que

$$\dim \Gamma_i(\varphi)/\Gamma_{i-1}(\varphi) \leqq 1. \tag{8.1}$$

De plus, puisque $\Gamma(\varphi) = \Gamma_m(\varphi) \supset \Gamma_{m-1}(\varphi) \supset \cdots \supset \Gamma_1(\varphi) \supset \Gamma_0(\varphi) = (0)$, on a

$$\dim \Gamma(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \dim \Gamma_i(\varphi)/\Gamma_{i-1}(\varphi). \tag{8.2}$$

D'après (8.1) et (8.2) on sait que $\dim \Gamma(\varphi) = m$ si et seulement si $\dim \Gamma_i(\varphi)/\Gamma_{i-1}(\varphi) = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, m$. Ceci étant dit, nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME 8.1. *Soit φ une représentation unipotente de Π de degré $m+1$ telle que $E_\varphi \in J(T^n; 1, m)$, alors φ s'ecrit comme suit:*

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.3}$$

où $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_m$ *sont linéairement indépendants. Réciproquement pour toute représentation* φ *de* Π *de la forme* (8.3) *telle que* $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_m$ *soient linéairement indépendants* $E_\varphi \in J(T^n;\ 1, m)$.

Démonstration. Posons $\varphi = (\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1^1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \varphi_1^2 & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \varphi_1^m \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \varphi' \end{pmatrix}$. Remarquons d'abord que $\overline{\varphi_1^1} \neq 0$ car E_φ contient l'espace fibré vectoriel $E_{\varphi^{(1)}}$ comme un sous-espace fibré vectoriel, où $\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\dim \Gamma(E_\varphi) = 1$ on sait que $E_\varphi / E_\varphi^\circ \simeq E_{\varphi'}$, où E_φ° désigne comme toujours le plus grand sous-espace fibré trivial de E_φ. Puisque $\dim \Gamma(E_{\varphi'}) = m$, on peut appliquer la remarque faite dans la Notation 1 et on sait que

$$\dim \Gamma_i(\varphi')/\Gamma_{i-1}(\varphi') = 1 \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m. \tag{8.4}$$

Nous allons maintenant montrer que $\overline{\varphi_1^2} = \overline{\varphi_1^3} = \cdots = \overline{\varphi_1^m} = 0$. En effet, puisque $\Gamma_m(\varphi')/\Gamma_{m-1}(\varphi') \neq (0)$ il existe un élément $\xi \in \Gamma_m(\varphi') = \Gamma(\varphi')$ tel que $\xi_m \neq 0$. On sait alors que

$$\xi_{m-1}(x+b) = \xi_{m-1}(x) - \varphi_1^m(b) \qquad \text{pour tout} \quad b \in \Pi \text{ et } x \in A,$$

ce qui entraine que $\overline{\varphi_1^m} = 0$. De la même manière nous pouvons montrer que $\overline{\varphi_1^{m-1}} = \overline{\varphi_1^{m-2}} = \cdots = \overline{\varphi_1^2} = 0$. Puisque $\bar{\varphi}_1^1 \neq 0$ il existe un nombre k tel que $\bar{\varphi}_1^2 = k\bar{\varphi}_1^1$. On sait que $k = 0$, car $\overline{\varphi_1^2} = k\overline{\varphi_1^1} = 0$. Montrons maintenant que φ' est la matrice l'unité. Supposons qu'on ait démontré que $\varphi_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $2 \leqq i < j \leqq l$, et démontrons que $\varphi_{i,l+1} = 0$ pour tout $i < l+1$. Pour cela considérons la représentation ψ suivante

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{12} & \cdots & \cdots & \varphi_{1l} & \varphi_{1l+1} \\ & 1 & \varphi_{23} & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \varphi_{l,l+1} \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdots & \cdots & \varphi_{l-1} & \varphi_l \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 & \psi_1 \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & \vdots \\ & & & & 1 & \psi_{l-1} \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $\varphi_1=\varphi_{12}, \ldots, \varphi_{l-1}=\varphi_{1l}, \varphi_l=\varphi_{1,l+1}, \varphi_{2,l+1}=\psi_1, \ldots, \varphi_{l,l+1}=\psi_{l-1}$. Par le même raisonnement que dans la démonstration de $\overline{\varphi_1^m}=0$, on sait que $\bar{\psi}_1=\cdots=\bar{\psi}_{l-1}=0$. Il est facile de voir que $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{l-1}$ sont linéairement indépendants à cause que $\dim \Gamma(E_\varphi)=1$. Comparant les $(1, l+1)$-composantes des deux membres de l'égalité

$$\psi(b)\cdot\psi(b')=\psi(b')\cdot\psi(b),$$

on obtient l'égalité suivante:

$$\begin{aligned}\varphi_1(b)\cdot\psi_1(b')+\varphi_2(b)\cdot\psi_2(b')+\cdots+\varphi_{l-1}(b)\cdot\psi_{l-1}(b')\\ =\varphi_1(b')\cdot\psi_1(b)+\varphi_2(b')\cdot\psi_2(b)+\cdots+\varphi_{l-1}(b')\cdot\psi_{l-1}(b)\end{aligned} \tag{8.5}$$

pour $b, b'\in \Pi$.

D'où on obtient l'égalité suivante:

$$\tilde{\varphi}_1\wedge\tilde{\psi}_1+\cdots+\tilde{\varphi}_{l-1}\wedge\tilde{\psi}_{l-1}=0,$$

(cf. Notation 1 §7). Puisque $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{l-1}$ sont linéairement indépendants on peut écrire $\tilde{\psi}_i=\sum_{j=1}^{l-1}a_i^j\tilde{\varphi}_j$ pour $i=1, \ldots, l-1$, d'où $\psi_i=\sum_{j=1}^{l-1}a_i^j\varphi_j$ (cf. Lemme 7.1). Puisque $\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{l-1}$ sont linéairement indépendants et puisque $\bar{\psi}_i=0$ on obtient donc $a_i^j=0$ d'où $\psi_i=0$ pour $i=1, \ldots, l-1$ et le lemme est ainsi démontré.

Notation 2. Soit φ une représentation de Π de la forme (8.3). Nous désignerons par $\tilde{\varphi}(b)$ la ligne $(\varphi_1(b), \ldots, \varphi_m(b))$ et par $\bar{\varphi}$ la ligne $(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_m)$.

LEMME 8.2. *Soient φ et φ' deux représentations de Π telles que $E_\varphi, E_{\varphi'}\in J(T^n;\ 1, m)$. Pour que $\varphi\sim\varphi'$ il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite*

$$\{\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_m\}_C=\{\overline{\varphi'_1}, \ldots, \overline{\varphi'_m}\}_C. \tag{8.6}$$

Démonstration. Soit $\varphi \gamma \varphi'$ i.e.

$$\varphi(b)\cdot f(x+b)=f(x)\cdot\varphi'(b)\qquad \text{pour}\quad b\in\Pi \text{ et } x\in A. \tag{8.7}$$

On sait d'abord que $f(x)=(f_{ij}(x))\in\tilde{N}(m+1, C)$ (cf. Notation 3 §7), et que $f_{ii}(x)$ est constant pour $i=1, \ldots, m+1$. Posons

$$f=\begin{pmatrix} f_{11} & f_1\\ 0 & f_0\end{pmatrix}.$$

D'après (8.7) on sait que $f_0(x+b)=f_0(x)$ pour $b\in\Pi$ et $x\in A$. Il en résulte que f_0 est constants. Nous obtenons encore par (8.7) l'égalité suivante:

$$f_1(x+b)+\tilde{\varphi}(b)\cdot f_0=\tilde{\varphi}'(b)+f_1(x) \qquad \text{pour} \quad b\in\Pi,\ x\in A.$$

Ceci entraine que $\bar{\varphi}\cdot f=\overline{\varphi'}$ et par conséquent on obtient l'égalité (8.6). Puisqu'on peut raisonner tout réciproquement le lemme est démontré.

D'après les lemmes 8.1 et 8.2 nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Il existe une correspondance bi-univoque bien déterminée entre l'ensemble* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ \mathbf{1},\ \mathbf{m})$ *et la variété grassmannienne* $\mathbf{G}_{n,m}$ *des sous-espaces vectoriels complexes de dimension m dans* C^n, *en particulier si* $n<m$, $J(T^n;\ 1,\ m)$ *est vide.*

Nous pouvons démontrer la proposition suivante comme dans le cas $m=2$ (cf. Proposition 6.4).

PROPOSITION 8.1. *En prenant le dual l'un de l'autre il existe une correspondance bien-déterminée entre l'ensemble* $J(T^n;\ 1,\ m)$ *et l'ensemble* $J(T^n;\ m,\ 1)$.

Notation 3. Pour simplifier les notations nous désignerons par $J(T^n;\ 1\times m)$ l'ensemble $J(T^n;\ 1,\ldots,1)$ où 1 paraît m fois. Soit φ une représentation unipotente de Π de degré $m+1$. Nous poserons $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi^{(1)} & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & \varphi^{(2)}\end{pmatrix}$. Alors il est clair que $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ sont aussi des représentations de Π de degré m. Si, de plus, φ s'écrit comme suit:

$$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ & 1 & \varphi_1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_2 \\ & & & & \varphi_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.8}$$

alors nous poserons $\varphi=\exp\begin{pmatrix} 0 & \varphi_1 & \varphi_2^* & \cdots & \varphi_m^* \\ & 0 & \varphi_1 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_2^* \\ & & & & \varphi_1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$

LEMME 8.3. *Soit* φ *une représentation unipotente de* Π *de degré* $m+1$ *telle que* $E_\varphi\in J(T^n;\ 1\times(m+1))$, *alors* φ *est équivalente à une représentation* φ' *de la forme* (8.8):

$$(8.9) \qquad \varphi \underset{f}{\sim} \varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdots & \cdots & \varphi_m' \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_1' \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

où $\overline{\varphi_1'} \neq 0$ *et où* f *est une matrice constante. Réciproquement pour une représentation unipotente* φ *de la forme* (8.8) *telle que* $\bar{\varphi}_1 \neq 0$ *l'espace fibré* $E_\varphi \in J(T^n;\ 1 \times (m+1))$.

Démonstration par récurrence sur m. Supposons qu'on ait démontré le lemme dans le cas où le degré de $\varphi < m+1$. Soit f_1 une matrice de $GL(m, C)$ telle que

$$f_1^{-1} \cdot \varphi^{(1)} \cdot f_1 = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdots & \cdots & \varphi_{m-1}' \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_1' \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $\overline{\varphi_1'} \neq 0$. Posons $\varphi' = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \varphi \cdot \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors φ' s'écrit comme suit:

$$\varphi' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdots & \cdots & \varphi_{m-1}' & \psi_{m-1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & \varphi_1' & \psi_1 \\ & & & & 1 & \varphi_1'' \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\varphi_1' \neq 0$ il existe un nombre k tel que $\varphi_1'' = k\varphi_1'$ et nous pouvons supposer que $k=1$ i.e. $\varphi_1'' = \varphi_1'$. Supposons qu'on ait trouvé une matrice f telle que

$$\varphi'' = f^{-1} \cdot \varphi' \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdots & \cdots & \varphi_{m-1}' & \varphi_{m-1}'' \\ & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \varphi_l'' \\ & & & \ddots & \vdots & \varphi_{l-1}' \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \varphi_1' & \vdots \\ & & & & 1 & \varphi_1' \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et montrons qu'il existe une matrice f' telle que

$$
(8.10) \qquad f'^{-1} \cdot \varphi'' \cdot f' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi'_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi'_{m-1} & \varphi''_{m-1} \\ & 1 & \cdot & & & \cdot & \vdots \\ & & \cdot & & & \cdot & \varphi''_{l+1} \\ & & & \cdot & & \cdot & \varphi'_l \\ & & & & \cdot & \cdot & \varphi'_{l-1} \\ & & & & & \varphi'_1 & \vdots \\ & & & & & 1 & \varphi'_1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}.
$$

Pour cela considérons la représentation suivante

$$
\psi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi'_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi'_{l-1} & \varphi'_l & \varphi''_{l+1} \\ & 1 & \cdot & & & & \varphi'_{l-1} & \varphi''_l \\ & & \cdot & \cdot & & & \vdots & \varphi'_{l-1} \\ & & & \cdot & \cdot & & \vdots & \vdots \\ & & & & \cdot & \cdot & \varphi'_1 & \vdots \\ & & & & & & 1 & \varphi'_1 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.
$$

En comparant les $(1, l+2)$-composantes des deux membres de l'égalité $\psi(b) \cdot \psi(b') = \psi(b') \cdot \psi(b)$ $(b, b' \in \Pi)$, nous obtenons l'égalité suivante:

$$
\begin{aligned}
&\varphi'_1(b) \cdot \varphi''_l(b') + \varphi'_2(b) \cdot \varphi'_{l-1}(b') + \cdot \cdot \cdot + \varphi'_l(b) \cdot \varphi'_1(b') \\
&= \varphi'_1(b') \cdot \varphi''_l(b) + \varphi'_2(b') \cdot \varphi'_{l-1}(b) + \cdot \cdot \cdot + \varphi'_l(b') \cdot \varphi'_1(b),
\end{aligned}
$$

d'où on a $\varphi'_1(b) \cdot \varphi''_l(b') - \varphi'_1(b) \cdot \varphi''_l(b) + \varphi'_l(b) \cdot \varphi'_1(b') - \varphi'_l(b') \cdot \varphi'_1(b) = 0$ d'où encore on a

$$
\widetilde{\varphi'_1} \wedge \widetilde{\varphi''_l} + \widetilde{\varphi'_l} \wedge \widetilde{\varphi'_1} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \widetilde{\varphi'_1} \wedge (\widetilde{\varphi''_l} - \widetilde{\varphi'_l}) = 0.
$$

Par suite il existe un nombre α tel que $\widetilde{\varphi''_l} - \widetilde{\varphi'_l} = \alpha \widetilde{\varphi'_1}$ d'où

$$
\varphi''_l = \varphi'_l + \alpha \varphi'_1.
$$

Dans ce cas il n'est pas difficile de trouver une matrice f' satisfaisant à la condition (8.10) et par conséquent on peut trouver une matrice f telle que (8.9) soit satisfaite. L'énoncé réciproque est aussi facilement démontré par récurrence sur m et le lemme est démontré.

Dans la suite nous ne considérons que les représentations φ de la forme (8.8) telles que $\widetilde{\varphi}_1 \neq 0$. Nous appelerons donc telle représentation φ une ***représentation typique***.

LEMME 8.4. *Soient φ et φ' deux représentation typiques. Si $\varphi \sim \varphi'$, alors $\varphi^{(1)} \sim \varphi'^{(1)}$.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

En effet, si $\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$ on sait facilement que $f(x) \in \tilde{N}(m+1, C)$ pour tout $x \in A$ et $f_{ii}(x)$ est constant c_i pour $i=1, \ldots, m+1$. Posons $f = \begin{pmatrix} f^{(1)} & * \\ 0 & c_{m+1} \end{pmatrix}$. Alors on obtient l'équivalence suivante: $\varphi^{(1)} \underset{f^{(1)}}{\sim} \varphi'^{(1)}$ et le lemme est démontré.

Le lemme suivant est facile à prouver.

Lemme 8.5. *Pour tout nombre b_i, b_j ; $i, j = 1, \ldots, m$ on a*

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_m \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \exp\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \cdots & b_m \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \exp\begin{pmatrix} 0 & a_1+b_1 & \cdots & a_m+b_m \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1+b_1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 8.6. *Soient φ et φ' deux représentations typiques de Π de degré $m+1$. Si $\overline{\varphi_i^*} = \overline{\varphi_i'^*}$ pour $i=1, \ldots, m$, alors il existe des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_m$ sur A telles que*

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi' \tag{8.11}$$

où $f = \begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdots & f_m \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, *Réciproquement si la condition* (8.11) *est satisfaite on a $\overline{\varphi_i^*} = \overline{\varphi_i'^*}$ pour $i=1, \ldots, m$.*

En effet, puisque $\rho_i = \varphi_i'^* - \varphi_i^* \in A^*$ nous pouvons prendre une fonction $g_i \in F(\rho_i)$ pour $i=1, \ldots, m$. Posons $f = \exp\begin{pmatrix} 0 & g_1 & \cdots & g_m \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g_1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$. D'après le Lemme 8.5 on obtient l'équivalence (8.11). L'énoncé réciproque étant aussi démontré de la même façon le lemme est démontré.

Lemme 8.7. *Soient φ et φ' deux représentations typiques de degré $m+1$ telles que $\overline{\varphi_i^*} = \overline{\varphi_i'^*}$ pour $i=1, \ldots, m$. Supposons qu'on ait une équivalence suivante*

$$\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$$

Alors il existe un nombre $c \neq 0$ tel que f s'écrit comme suit:

$$\frac{1}{c}f=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_m \\ & 1 & \cdot & & & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & & & \cdot & f_1 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On peut voir d'abord que $f(x)\in\tilde{N}(m+1, C)$ pour tout $x\in A$ et que $f_{ii}(x)=c$ est constant pour tout $i=1, \dots, m+1$. Supposons maintenant qu'on ait démontré que f doit être de la forme suivante:

$$\frac{1}{c}f=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-2} & g & k \\ & 1 & \cdot & & & & f_{m-2} & h \\ & & \cdot & \cdot & & & & f_{m-2} \\ & & & \cdot & \cdot & & & \vdots \\ & & & & \cdot & \cdot & & \vdots \\ & & & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & & & & & \cdot & f_1 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrons que $g=h$, ce qui complètera la démonstration du lemme. Comparant les $(1, m)$-composantes des deux membres de l'égalité

$$\varphi(b)\cdot f(x+b)=f(x)\cdot\varphi'(b) \qquad (b\in\Pi,\ x\in A), \tag{8.12}$$

on obtient

$$\begin{aligned} g(x+b)&+\varphi_1(b)\cdot f_{m-2}(x+b)+\varphi_2(b)f_{m-3}(x+b)+\cdots \\ &+\varphi_{m-2}(b)f_1(x+b)+\varphi_{m-1}(b) \\ &=\varphi'_{m-1}(b)+f_1(x)\varphi'_{m-2}(b)+f_2(x)\cdot\varphi'_{m-3}(b)+\cdots \\ &+f_{m-2}(x)\varphi'_1(b)+g(x). \end{aligned} \tag{8.13}$$

De même en comparant les $(2, m+1)$-composantes des deux membres de l'égalité (8.12) on obtient:

$$\begin{aligned} h(x+b)&+\varphi_1(b)f_{m-2}(x+b)+\varphi_2(b)f_{m-3}(x+b)+\cdots \\ &+\varphi_{m-2}(b)f_1(x+b)+\varphi_{m-1}(b) \\ &=\varphi'_{m-1}(b)+f_1(x)\varphi'_{m-2}(b)+f_2(x)\cdot\varphi'_{m-2}(b)+\cdots \\ &+f_{m-2}(x)\varphi'_1(b)+h(x). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Combinant (8.13) et (8.14) on sait qu'il existe un nombre α tel que

$$h=g+\alpha. \tag{8.15}$$

Maintenant comparons les $(1, m+1)$-composantes de l'égalité (8.12). Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}(8.16)\qquad & k(x+b)+\varphi_1(b)h(x+b)+\varphi_2(b)f_{m-2}(x+b)+\cdots \\ &\quad +\varphi_{m-1}(b)f_1(x+b)+\varphi_m(b) \\ &= \varphi'_m(b)+f_1(x)\varphi'_{m-1}(b)+f_2(x)\cdot\varphi'_{m-2}(b)+\cdots \\ &\quad +f_{m-2}(x)\varphi'_2(b)+g(x)\varphi'_1(b)+k(x).\end{aligned}$$

Or, le premier membre de (8.16) est égal à

$$\begin{aligned}& g(x+b)+\varphi_1(b)f_{m-1}(x+b)+\varphi_2(b)f_{m-2}(x+b)+\cdots \\ &\quad +\varphi_{m-1}(b)f_1(x+b)+\varphi_m(b)+\alpha\varphi_1(b)\end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{m-1} & \varphi_m+\alpha\varphi_1 \\ & 1 & \ddots & & \varphi_{m-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}\cdot f'(x+b)=f'(x)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_m \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \varphi'_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$f'=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdots & f_{m-2} & g & k \\ & 1 & \ddots & & f_{m-2} & g \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & f_{m-2} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & f_1 & \vdots \\ & & & & 1 & f_1 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Il résulte du Lemme 8.6 que $\overline{(\varphi_m+\alpha\varphi_1)^*}=\overline{\varphi'^*_m}$. Puisque $(\varphi_m+\alpha\varphi_1)^*=\varphi^*_m+\alpha\varphi_1$ on obtient

$$\overline{\varphi^*_m}+\alpha\bar\varphi_1=\overline{\varphi'^*_m}=\overline{\varphi^*_m}$$

i.e. $\alpha\bar\varphi_1=0$ et par suite $\alpha=0$ car $\bar\varphi_1\neq 0$. Par conséquent nous avons montré que $h=g$ et le lemme est démontré.

LEMME 8.8. *Soient φ et φ' deux représentations typiques de degré $m+1$ telles que $\overline{\varphi^*_i}=\overline{\varphi'^*_i}$ pour $i=1,\ldots,m-1$. Si $\varphi \underset{f}{\sim} \varphi'$, alors il existe un nombre α tel que*

$$\overline{\varphi'^*_m}=\overline{\varphi^*_m}+\alpha\bar\varphi_1$$

Démonstration. Puisque $\varphi(b)\cdot f(x+b)=f(x)\cdot\varphi'(b)$ on sait d'abord que $f(x)\in\tilde N(m+1, C)$ pour tout $x\in A$ et que f_{ii} sont const. pour $i=1,\ldots,m+1$. Si l'on pose $f=\begin{pmatrix} f^{(1)} & * \\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & * \\ 0 & f^{(2)}\end{pmatrix}$, on obtient les deux équivalences suivantes:

$$\varphi^{(1)}\underset{f^{(1)}}{\sim}\varphi'^{(1)}\ ;\ \varphi^{(1)}\underset{f^{(2)}}{\sim}\varphi'^{(1)}.$$

Utilisant le Lemme 8.7 on peut supposer que

$$f=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-2} & f_{m-1} & g \\ & 1 & \cdot & & & & f_{m-2} & h \\ & & \cdot & \cdot & & & \vdots & f_{m-2} \\ & & & \cdot & \cdot & & \vdots & \vdots \\ & & & & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots \\ & & & & & \cdot & f_1 & \vdots \\ & & & & & & 1 & f_1 \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le même raisonnement que celui du Lemme 8.7 on peut trouver un nombre α tel que $h=f_{m-1}+\alpha$. Posons

$$f'=\begin{pmatrix} 1 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_{m-1} & g \\ & 1 & \cdot & & & & f_{m-1} \\ & & \cdot & \cdot & & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & & \vdots \\ & & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & & & & \cdot & f_1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

alors on obtient:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{m-1} & \varphi_m+\alpha\varphi_1 \\ & 1 & \cdot & & & & \varphi_{m-1} \\ & & \cdot & \cdot & & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & & \vdots \\ & & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & & & & \cdot & \varphi_1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \underset{f'}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_m' \\ & 1 & \cdot & & & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & \vdots \\ & & & & \cdot & \varphi_1' \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après le Lemme 8.6 on a finalement

$$\overline{(\varphi_m+\alpha\varphi_1)^*}=\overline{\varphi_m'^*} \tag{8.17}$$

Le premier membre de (8.17) étant $\overline{\varphi_m^*}+\alpha\bar{\varphi}_1$ le lemme est ainsi démontré,

LEMME 8.9. *Soient φ et φ' deux représentations typiques de degré $m+1$. Si $\varphi^{(1)}\sim\varphi'^{(1)}$, alors il existe une représentation typique φ'' telle que $\varphi''\sim\varphi'$ et que*

$$\overline{\varphi_i''^*}=\overline{\varphi_i^*} \qquad \textit{pour} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Démonstration. Puisque $\varphi^{(1)}\sim\varphi'^{(1)}$ il existe un nombre c tel que $\bar{\varphi}_1'=c\bar{\varphi}_1$. Posons

$$^{(1)}\varphi''=f\cdot\varphi'\cdot f^{-1}$$

où $f=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & c & & & \\ & & c^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & c^m \end{pmatrix}$. Alors on voit que $^{(1)}\varphi''=\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1'' & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ & 1 & \cdot & & & & \vdots \\ & & \cdot & \cdot & & & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot & & * \\ & & & & \cdot & \cdot & \varphi_1'' \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ est une représentation typique de Π et que $\varphi'' = \dfrac{1}{c}\varphi'_1$ i.e. $\overline{\varphi''_1} = \bar{\varphi}_1$. Supposons qu'on ait démontré qu'il existe une représentation typique ${}^{(l)}\varphi''$ telle que

$$\varphi' \sim {}^{(l)}\varphi'' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi''_1 & \cdots & \varphi''_l & \tilde{\varphi} & & * \\ & 1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \tilde{\varphi} \\ & & & \ddots & \ddots & & \varphi''_l \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \varphi''_1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

telle que $\overline{\varphi''^*_i} = \overline{\varphi^*_i}$ pour $i = 1, \ldots, l$. Nous allons montrer qu'il existe une représentation typique ${}^{(l+1)}\varphi''$ telle que $\varphi' \sim {}^{(l+1)}\varphi''$ et que $\overline{\varphi''^*_i} = \overline{\varphi^*_i}$ pour $i = 1, \ldots, l+1$. Pour cela posons $\psi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi''_1 & \cdots & \varphi''_l & \tilde{\varphi} \\ & 1 & \ddots & & \varphi''_l \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi''_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^{(l)}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{l+1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$.

Puisque $\varphi^{(1)} \sim \varphi'^{(1)}$ on obtient $\psi \sim {}^{(l)}\varphi$. Il résulte alors du Lemme 8.8 que $\overline{\varphi^*_{l+1}} = \tilde{\varphi}^* + \alpha\bar{\varphi}_1$ pour un nombre α. Posons maintenant $\varphi''_{l+1} = \tilde{\varphi} + \alpha\varphi''_1$ et

$$f = \begin{pmatrix} \overbrace{1\ 0\ 0 \cdots 0}^{l} & \overbrace{0 \cdots\cdots 0}^{l} & \overbrace{0 \cdots\cdots 0}^{l} & \overbrace{0 \cdots\cdots 0 \cdots}^{l} & \cdots\ 0 \\ \quad 1\ 0 \cdots 0 & \alpha\ 0 \cdots 0 & \alpha^2\ 0 \cdots 0 & \alpha^3\ 0 \cdots 0\ \alpha^4 & \\ \qquad 1\ 0 \cdots & 0\ 2\alpha\ 0 \cdots & 0\ k_1\alpha^2\ 0 \cdots & 0\ k'_2\alpha^3\ 0 \cdots \ddots & \\ \qquad\quad 1\ 0 \cdots & 0\ \ 3\alpha\ 0 \cdots & 0\ \ k_2\alpha^2\ 0 \cdots & 0\ \ k'_3\alpha^3 & \\ \qquad\qquad 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & k'_{m-3l-1}\alpha^3 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & k_{m-2l-1}\alpha^2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & (m-l)\alpha \\ & & & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où $k_i = k_{i-1} + i + 1$, $k'_j = k'_{j-1} + k_j$, $k_0 = k'_0 = k''_0 = \cdots = 1$, alors on obtient l'équivalence suivante:

$${}^{(l)}\varphi'' = \begin{pmatrix} 1 & \varphi''_1 & \cdots & \varphi''_l & \tilde{\varphi} & & * \\ & 1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \tilde{\varphi} \\ & & & \ddots & \ddots & & \varphi''_l \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \varphi''_1 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi''_1 & \cdots & \varphi''_{l+1} & & * \\ & 1 & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & \varphi''_{l+1} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \varphi''_1 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = {}^{(l+1)}\varphi''$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

où ${}^{(l+1)}\varphi''$ est aussi une représentation typique. Puisqu'on peut faire ce procédé jusqu'à $l=m-2$ le lemme est démontré.

LEMME 8.10. *Soient φ ei φ' deux représentations typiques de degré $m+1$ telles que $\overline{\varphi_i^*}=\overline{\varphi_i'^*}$ pour $i=1,\ldots,m-1$. Alors pour que $\varphi\sim\varphi'$ il faut et il suffit qu'il existe un nombre α tel que*

$$\overline{\varphi_m'^*}=\overline{\varphi_m^*}+\alpha\bar{\varphi}_1 \tag{8.18}$$

En effet, la nécessité résulte du Lemme 8.8. Supposons que (8.18) soit satisfaite. On a $\overline{\varphi_m'^*}=\overline{\varphi_m^*}+\alpha\bar{\varphi}_1=\overline{(\varphi_m+\alpha\varphi_1)^*}$. Alors il résulte du Lemme 8.6 que l'on a l'équivalence suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & \varphi_1' & \cdots & \varphi_m' \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \varphi_1' \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_{m-1} & \varphi_m+\alpha\varphi_1 \\ & 1 & \ddots & & \varphi_{m-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \varphi_1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \underset{f}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_m \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \varphi_1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $f=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$. Le lemme est ainsi démontré.

D'après les Lemmes 8.9 et 8.10 nous pouvons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Soit π l'application de* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1\times(\mathbf{m}+1))$ *dans* $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1\times\mathbf{m})$ *définie par $\pi(E_\varphi)=E_{\varphi^{(1)}}$.* Alors $\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1\times(\mathbf{m}+1))$ $(\mathbf{J}(\mathbf{T}^n;\ 1\times\mathbf{m}),\ C^{n-1},\ \pi)$ *se munit d'une structure d'espace fibré vectoriel de fibre C^{n-1}.*

§ 9. Remarques diverses sur des espaces fibrés vectoriels en général.

Dans ce paragraphe nous étudierons des espaces fibrés vectoriels holomorphes sur un tore complexe qui n'admettent pas nécessairement des connexions holomorphes. Nous allons démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 9.1. *Soit L un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre C sur un tore complexe. Soient E et E' deux espaces fibrés vectoriels holomorphes sur le tore complexe admettant des connexions holomorphes. Supposons que $L\oplus E$ soit isomorphe à E'. Alors L admet aussi une connexion holomorphe.*

Démonstration. Soient $E=E_1\oplus\cdots\oplus E_s$, $E'=E_1'\oplus\cdots\oplus E_r'$ les décompo-

https://doi.org/10.1017/S0027763000006693 Published online by Cambridge University Press

sitions de E et E' en les facteurs indécomposables. Alors on peut supposer que $L\otimes E_1$ soit isomorphe à E_1' (cf. [3]). D'après le Théorème 3 de [6] nous pouvons trouver deux espaces fibrés L_1 et L_1' de fibre C admettant des connexions holomorphes et deux espaces fibrés vectoriels F et F' admettant aussi des connexions holomorphes tels que

$$E_1 = L_1 \otimes F, \qquad E_1' = L_1' \otimes F',$$

et tels que det (F) (resp. $\det(F')$) soit un espace fibré trivial I de fibre C, où $\det(F)$ désigne l'espace fibré associé à F par la représentation det de $GL(r, C)$ dans $C^* = GL(1, C)$, $GL(r, C)$ étant le groupe structural de F. Puisque $L\otimes E_1 \simeq E_1'$ on sait que $L\otimes L_1 \otimes L_1'^* \otimes F \simeq F'$ et par suite que

$$(L\otimes L_1 \otimes L_1'^*)^r \simeq I,$$

r étant la dimension de fibre de F car $\det(L\otimes F) \simeq L^r \otimes \det F$. Il nous donc suffit de démontrer le lemme suivant (peut-être bien connu).

Lemme 9.1. *Soit L un espace fibré vectoriel holomorphe de fibre C et de base M. Si L^r est trivial pour un entier $r \neq 0$, alors L admet une connexion holomorphe.*

Démonstration. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement suffisamment fin de M tel que L soit trivial sur U_α et soit $\{g_{\alpha\beta}\}$ le système de fonctions de passage de L par rapport au recouvrement $\{U_\alpha\}$. Posons maintenant comme suit:

$$C_1 = \left\{z \in C^* \,\middle|\, \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{5}{3}\pi\right\},$$

$$C_2 = \left\{z \in C^* \,\middle|\, -\frac{2}{3}\pi < \arg z < \frac{2}{3}\pi\right\}.$$

Il est évident que $C^* = C_1 \cup C_2$. Puisque $L^r \simeq I$ il existe une application holomorphe g_α de U_α dans C^* telle que

$$g_{\alpha\beta}(x)^r = g_\alpha(x)\cdot g_\beta(x)^{-1} \qquad \text{pour tout} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Soit $U_{\alpha_1} = g_\alpha^{-1}(C_1)$ et soit $U_{\alpha_2} = g_\alpha^{-1}(C_2)$. Il est clair que

$$U_\alpha = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}.$$

Soit g_{α_i} la restriction de g_α à U_{α_i} et soit $g_{\alpha_i\beta_j}$ celle de $g_{\alpha\beta}$ à $U_{\alpha_i}\cap U_{\beta_j}$ pour $i, j = 1, 2$. Considérons une branche f_{α_i} des racines r-puissance $g_{\alpha_i}^{1/r}$ de g_{α_i} et posons $g_{\alpha_i\beta_j} = f_{\alpha_i}\cdot f_{\beta_j}^{-1}\cdot c_{\alpha_i\beta_j}$. Puisque $c_{\alpha_i\beta_j}$ est une application holomorphe (à fortiori continue) de $U_{\alpha_i} \cap U_{\beta_j}$ dans C^* et puisque $c^r_{\alpha_i\beta_j} = 1$ on sait que $c_{\alpha_i\beta_j}$ est une application constante sur chaque composante connexe de $U_{\alpha_i} \cap U_{\beta_j}$. Il en résulte que L admet une connexion holomorphe (cf. Prop. 14 [1]) et le lemme est démontré.

PROPOSITION 9.2. *Soit E un espace fibré vectoriel holomorphe indécomposable sur un tore complexe admettant une connexion holomorphe. Soient L et L' deux espaces fibrés vectoriels holomorphe de fibre C tels que $L \otimes E$ soit isomorphe à $L' \otimes E$. Alors $L \simeq L'$.*

Démonstration. D'après le Théorème 3 de [6] on peut écrire:

$$E = L_1 \otimes E_1$$

où $\det E_1 \simeq I$ et où L_1 soit un espace fibré de fibre C. Puisque $L \otimes L_1 \otimes E_1 \simeq L' \otimes L_1 \otimes E_1$ entraine $L \otimes E_1 \simeq L' \otimes E_1$, on voit, d'après la proposition 9.1, que $L \otimes L'^*$ possède une connexion holomorphe et par suite, d'après le Lemme 5.3 de [6] on sait que $L \otimes L'^* \simeq I$ i.e. $L \simeq L'$ et la proposition est ainsi démontrée.

Remarque 1. La Proposition 9.2 n'est pas vraie si l'on ne suppose pas que E soit indécomposable. Par exemple prenons un espace fibré vectoriel de fibre C tel que $L^2 \simeq I$ et que L ne soit pas trivial. Posons

$$E = E_1 \oplus (L \otimes E_1)$$

où E_1 est un espace fibré vectoriel holomorphe admettant une connexion holomorphe. Alors on sait que $L \otimes E \simeq E$.

Remarque 2. Quand on veut classifier les espaces fibrés vectoriels holomorphes qui n'admettent pas nécessairement des connexions holomorphes, on fabriquera d'abord des espaces fibrés vectoriels de la forme $L \otimes E$, où E est un espace fibré vectoriel à connexion holomorphe et où L est un espace fibré vectoriel arbitraire de fibre C. D'après les Propositions 9.1 et 9.2 on voit qu'il existe, dans un sens, beaucoup d'espaces fibrés vectoriels qui n'admettent pas des connexions holomorphes. On se demande donc: "Est-ce que tout espace fibré vectoriel est, par hasard, fabriqué par le procédé comme ci-dessus?" Malheureusement cette conjecture n'est pas vraie même si la base est un tore complexe de dimension 1 ou plus fortement même si la base est une courbe elliptique. Par exemple prenons un espace-fibré vectoriel holomorphe E de fibre

C^2 sur une courbe elliptique dont le degré est égal à 1 (pour la notion de degré de E voir Atiyah [2]). Par un calcul facile des classes de Chern des espaces fibrés de la forme $L \otimes E_1$, on peut voir aisément que E ne peut pas être écrit sous la forme $E = L \otimes E_1$ comme plus haut.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., vol. **85** (1957), pp. 181–207.

[2] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., vol. **7** (1957), pp. 414–452.

[3] M. F. Atiyah, On the Krull-Schmidt theorem with application to sheaves, Bull. Soc. Math. de France, Tome **84** (1956), pp. 307–317.

[4] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. Jour. Math., vol. **79** (1957), pp. 121–138.

[5] K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., vol. **50** (1949), pp. 507–558.

[6] Y. Matsushima, Fibrés holomorphes sur un tore complexe, Nagoya Math. J., vol. **14** (1959), pp. 1-24.

[7] Y. Matsushima, On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, Nagoya Math. J., vol. **2** (1951), pp. 95–110.

[8] A. Morimoto, Sur le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal analytique complexe, Nagoya Math. J., vol. **13** (1958), pp. 157–168.

[9] S. Murakami, Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes, Osaka Math. J., vol. **11** (1959), pp. 43–62.

[10] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, Publication of Math. Soc. of Japan, **2** (1956).

Institut de Mathématiques
Université de Nagoya