Canad. J. Math. Vol. **54** (3), 2002 pp. 533–553

Approximations fortes pour des processus bivariés

Nathalie Castelle

Résumé. Nous établissons un résultat d'approximation forte pour des processus bivariés ayant une partie gaussienne et une partie empirique. Ce résultat apporte un nouveau point de vue sur deux théorèmes hongrois bidimensionnels établis précédemment, concernant l'approximation par un processus de Kiefer d'un processus empirique uniforme unidimensionnel et l'approximation par un pont brownien bidimensionnel d'un processus empirique uniforme bidimensionnel. Nous les enrichissons un peu et montrons que sous leur nouvelle forme ils ne sont que deux énoncés d'un même résultat.

Abstract. We establish a strong approximation result for bivariate processes containing a Gaussian part and an empirical part. This result leads to a new point of view on two Hungarian bidimensional theorems previously established, about the approximation of an unidimensional uniform empirical process by a Kiefer process and the approximation of a bidimensional uniform empirical process by a bidimensional Brownian bridge. We enrich them slightly and we prove that, under their new fashion, they are but two statements of the same result.

1 Introduction

Les constructions hongroises et les approximations fortes (ou principes d'invariance) qui en découlent ont été initiées en [6] par Komlós, Major et Tusnády. Dans leur livre, qui fait suite à celui de Csörgő et Revesz [4], Csörgő et Horváth réalisent une synthèse du sujet et clarifient les résultats antérieurs à [5]. Nous renvoyons à leur ouvrage pour une bibliographie complète sur le sujet.

Soit (X_i, Y_i), $i \geq 1$ une suite de couples aléatoires définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendants et de même loi uniforme sur $[0,1]^2$. Nous supposons Ω suffisamment riche pour qu'il existe sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de la suite (X_i, Y_i), $i \geq 1$. Notons H_n la fonction de répartition empirique associée à (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$:

$$H_n(t,s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i \leq t, Y_i \leq s}$$

pour $(t,s) \in [0,1]^2$, et notons F_n, G_n les fonctions de répartition empirique unidimensionnelles: $F_n(t) = H_n(t,1)$, $G_n(s) = H_n(1,s)$. Rappelons les définitions des processus gaussiens qui interviennent dans les théorèmes d'approximation forte de ces fonctions de répartition empirique.

Définition 1.1 Un pont brownien est un processus gaussien continu sur $[0,1]$ tel que $\mathbb{E}\big(B(t)\big) = 0$, $\mathbb{E}\big(B(t)B(t')\big) = (t \wedge t') - tt'$. Un pont brownien

Reçu par la rédaction le November 9, 2000; revu le March 15, 2001.
Classification (AMS) par sujet: 60F17, 60G15, 62G30.

bidimensionnel est un processus gaussien continu sur $[0,1]^2$ tel que $\mathbb{E}\big(D(t,s)\big) = 0$, $\mathbb{E}\left(D(t,s)D(t',s')\right) = (t \wedge t')(s \wedge s') - tt'ss'$.

Définition 1.2 Un processus de Kiefer sur $[0,1] \times [0,1]$ est un processus gaussien continu tel que $\mathbb{E}\big(K(t,s)\big) = 0$, $\mathbb{E}\left(K(t,s)K(t',s')\right) = (s \wedge s')\big((t \wedge t') - tt'\big)$. Nous appelons processus de Kiefer sur $[0,1] \times \mathbb{N}$ ou sur $[0,1] \times \{0,\dots,n\}$ un processus gaussien tel que $\mathbb{E}\left(K(t,j)\right) = 0$, $\mathbb{E}\left(K(t,j)K(t',j')\right) = (j \wedge j')\big((t \wedge t') - tt'\big)$. Dans ce cas, on peut définir K comme une somme de ponts browniens indépendants: $K(t,0) = 0$, $K(t,j) = \sum_{i=1}^{j} B_i(t)$.

Notre référence de base est le célèbre article de Komlós, Major et Tusnády [6] dans lequel ils établissent le principe des constructions hongroises en dimension 1 et 2. Le théorème d'approximation forte de la fonction de répartitition empirique unidimensionnelle leur est dû. Mason et Van Zwet [7] et Bretagnolle et Massart [2] en donnent une preuve plus complète, ainsi qu'un calcul des constantes (Bretagnolle et Massart) et un raffinement sur un petit intervalle (Mason et Van Zwet). Le théorème d'approximation forte de la fonction de répartitition empirique bidimensionnelle est dû à Tusnády [10], Castelle et Laurent [3] en donnent une preuve plus complète ainsi qu'un raffinement sur un petit pavé. Le théorème 1.1 ci-dessous réunit les résultats unidimensionnel et bidimensionnel. Son énoncé est inhabituel: le même processus gaussien approxime le processus empirique bidimensionnel et ses marges unidimensionnelles. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la construction du processus empirique bidimensionnel, et plus précisément la construction de ses marges à partir des marges du pont brownien bidimensionnel: elle coïncide avec la construction unidimensionnelle (voir par exemple Castelle et Laurent [3, p. 461]). Dans ce théorème et dans toute la suite, nous notons log la fonction $x \to \ln(x \vee e)$.

Théorème 1.1 *Soit H_n la fonction de répartition empirique bidimensionnelle définie précédemment. Pour tout entier n, il existe un pont brownien bidimensionnel $D^{(n)}$ tel que pour tout x positif et pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ on ait:*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le a, 0\le s\le b} |nH_n(t,s) - nts - \sqrt{n}D^{(n)}(t,s)| \ge \big(x + C_1 \log(nab)\big)\log(nab)\Big) \le \Lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \tag{1.1}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le a} |nF_n(t) - nt - \sqrt{n}D^{(n)}(t,1)| \ge x + C_0 \log(na)\Big) \le \Lambda_0 \exp(-\lambda_0 x) \tag{1.2}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b} |nG_n(s) - ns - \sqrt{n}D^{(n)}(1,s)| \ge x + C_0 \log(nb)\Big) \le \Lambda_0 \exp(-\lambda_0 x) \tag{1.3}$$

où C_0, Λ_0, λ_0, C_1, Λ_1, λ_1 sont des constantes universelles strictement positives.

Remarque Dans le cas $a = 1$ (resp. $b = 1$), Bretagnolle et Massart [2] ont obtenu les constantes explicites $C_0 = 12$, $\Lambda_0 = 2$ et $\lambda_0 = 1/6$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

Dans le même article, Komlós, Major et Tusnády démontrent le très puissant théorème d'approximation forte de type Kiefer. Castelle et Laurent [3] en proposent une preuve plus complète ainsi qu'un raffinement sur un petit intervalle et un calcul des constantes que nous ne rappelons pas ici. Ce théorème est généralement énoncé sous la forme suivante:

Théorème 1.2 *Soit* (F_j), $j \geq 1$ *la suite de fonctions de répartition empirique unidimensionnelles définies précédemment. Il existe un processus de Kiefer* K *sur* $[0,1] \times \mathbb{N}$ *tel que pour tout* x *positif et pour tout* $a \in [0,1]$ *on ait:*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leq j \leq n} \sup_{0 \leq t \leq a} |jF_j(t) - jt - K(t,j)| \geq \big(x + C_2 \log(na)\big) \log(na)\Big) \leq \Lambda_2 \exp(-\lambda_2 x)$$

où C_2, Λ_2, λ_2 *sont des constantes universelles strictement positives.*

Comme nous l'avons déjà dit, si l'on ramène le théorème bidimensionnel à la seule inégalité (1.1) on perd une information issue de la construction, information qui peut être résumée par (1.2) et (1.3). De même, en énonçant le théorème de type Kiefer sous la forme du théorème 1.2 on perd une information issue de la construction. En fait, le théorème 1.2 découle du résultat plus riche suivant:

Théorème 1.3 *Soit* (F_j), $j \geq 1$ *la suite de fonctions de répartition empirique unidimensionnelles définies précédemment. Pour tout entier* n*, il existe un processus de Kiefer* $K^{(n)}$ *sur* $[0,1] \times \{1, \dots, n\}$ *tel que pour tout* x *positif, pour tout* $a \in [0,1]$ *et pour tout entier* $m \leq n$ *on ait:*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leq j \leq m} \sup_{0 \leq t \leq a} |jF_j(t) - jt - K^{(n)}(t,j)| \geq \big(x + C_3 \log(ma)\big) \log(ma)\Big) \leq \Lambda_3 \exp(-\lambda_3 x) \tag{1.4}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leq t \leq a} |nF_n(t) - nt - K^{(n)}(t,n)| \geq x + C_0 \log(na)\Big) \leq \Lambda_0 \exp(-\lambda_0 x) \tag{1.5}$$

où C_0, Λ_0, λ_0 *sont les constantes des inégalités (1.2), (1.3) et où* C_3, Λ_3, λ_3 *sont des constantes universelles strictement positives.*

La technique pour supprimer la dépendance en n des processus $K^{(n)}$, et ainsi passer du théorème 1.3 au théorème 1.2, est déjà connue (voir par exemple Komlós, Major et Tusnády [6] ou Castelle et Laurent [3, section 3.2]). Elle consiste à utiliser le théorème 1.3 sur des bandes d'indices $\{2^N, \dots, 2^{N+1} - 1\}$, $N \in \mathbb{N}$, puis à empiler les bandes. Nous ne la rappelons pas ici.

Le passage du théorème 1.2 au théorème 1.3 est impossible (on a perdu une information). La preuve directe du théorème 1.3 est possible mais elle n'a pas été écrite. En ce sens, le théorème 1.3 est un nouveau théorème. Contrairement aux apparences, sa preuve n'est pas identique à la preuve du théorème 1.2. Il apparaît dans le contrôle des probabilités une difficulté technique supplémentaire, inhérente au choix de $\big(x + C_3 \log(ma)\big) \log(ma)$ comme terme minorant la déviation entre les processus gaussien et empirique, au lieu de $\big(x + C_3 \log(na)\big) \log(na)$ (m varie entre 1 et n). Cette remarque vaut également pour les théorèmes 1.5 et 1.6 qui vont suivre. En contrepartie, les résultats obtenus sont plus fins. Pour illustrer l'amélioration apportée, remplaçons l'inégalité (1.4) du théorème 1.3 par l'inégalité suivante: pour tout entier $m \le n$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le m} \sup_{0\le t\le a} |jF_j(t) - jt - K^{(n)}(t, j)| \ge \big(x + C_3 \log(na)\big) \log(na)\Big) \\ \le \Lambda_3 \exp(-\lambda_3 x),$$

inégalité cette fois de même nature que celle qui a présidé la preuve du théorème 1.2. On obtient un nouveau théorème, plus faible, mais qui néammoins suffit pour entraîner le théorème 1.2 par la méthode d'empilement des bandes. Par contre ce nouveau théorème ne permet pas de retrouver le théorème 1.1, alors que celui-ci est une simple conséquence du théorème 1.3. Nous arrivons maintenant au résultat principal de cet article. Non seulement le théorème 1.1 est une simple conséquence du théorème 1.3, mais le théorème 1.3 est lui aussi une simple conséquence du théorème 1.1, ce que nous énonçons comme suit:

Théorème 1.4 *Les théorèmes 1.1 et 1.3 sont conséquences l'un de l'autre.*

Ainsi, les théorèmes 1.1 et 1.3 peuvent être considérés comme énonçés sous leur forme optimale (il n'y a pas de perte d'information). En outre, une telle correspondance pourra s'avérer utile dans l'avenir. Toute amélioration de l'un des deux théorèmes (nous pensons à la réduction de la puissance du logarithme) entraînera automatiquement la même amélioration de l'autre théorème. Un passage du même type est également envisageable en dimension strictement supérieure à deux.

Le passage du théorème 1.1 au théorème 1.3 repose sur une simple permutation d'indices dès lors que l'on dispose du résultat d'approximation forte suivant:

Théorème 1.5 *Soit $V = (V_1, \dots, V_n)$ un vecteur multinômial $\mathcal{M}(n, 1/n, \dots, 1/n)$ et soit $N_j = \sum_{i=1}^{j} V_i$. Soit (B_i), $i \ge 1$ une suite de ponts browniens indépendants et indépendants de V. Nous supposons Ω suffisamment riche pour qu'il existe sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de (B_i), $i \ge 1$ et de V. Alors il existe n ponts browniens (dépendants de n) $B_1^*, \dots, B_n^*$ indépendants et indépendants de V tels que $\sum_{i=1}^{n} B_i^*(t) = \sum_{i=1}^{n} B_i(t)$ et tels que pour tout x positif, pour tout $a \in [0, 1]$ et pour tout entier $m \le n$ on ait l'inégalité suivante:*

$$(1.6)\quad \mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le m} \sup_{0\le t\le a}\Big| \sum_{i=1}^{j} B_i(t) - \sum_{i=1}^{N_j} B_i^*(t)\Big| \ge x + C_4 \log(ma)\Big) \le \Lambda_4 \exp(-\lambda_4 x)$$

où C_4, Λ_4, λ_4 sont des constantes universelles strictement positives.

La forme renversée s'obtient par le théorème de Skorohod [9]: si l'on se donne V et (B_i^*), $i \ge 1$ suite de ponts browniens définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendants et indépendants *de V, et si Ω est suffisamment riche, il existe n ponts browniens (dépendants de n) $B_1, \ldots, B_n$ indépendants et indépendants de V tels que $\sum_{i=1}^n B_i(t) = \sum_{i=1}^n B_i^*(t)$ et tels que l'on ait l'inégalité (1.6).*

Ce résultat possède son propre intérêt. Il reste certainement valide pour des sommes de ponts browniens indexées par d'autres marches aléatoires, par exemple si les variables V_i sont indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Remarquons aussi que cette approximation forte bidimensionnelle est réalisée à la vitesse optimale contrairement aux approximations fortes des théorèmes 1.1, 1.2, 1.3 où l'on voit apparaître un log supplémentaire. La raison en est que lors de la construction nous ne discrétisons pas la variable t. Grâce à une inégalité maximale sur un petit pavé pour les processus de Kiefer (lemme 3.1) on peut également énoncer le théorème 1.5 sous la forme non discrète suivante (c'est sous cette forme que nous l'utiliserons dans la preuve du théorème 1.4):

Théorème 1.6 *Soit G_n la fonction de répartition précédemment définie et soit K un processus de Kiefer sur $[0,1] \times [0,1]$ indépendant de G_n. Supposons Ω suffisamment riche pour qu'il existe sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de G_n et de K. Pour tout entier n, il existe un processus $K_*^{(n)}$ de même loi que K et indépendant de G_n tel que $K_*^{(n)}(t,1) = K(t,1)$ et tel que pour tout x positif et pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$ on ait l'inégalité suivante:*

(1.7)
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq a, 0\leq s\leq b} \sqrt{n}\big|K(t,s) - K_*^{(n)}\big(t, G_n(s)\big)\big| \geq x + C_5 \log(nab)\Big) \leq \Lambda_5 \exp(-\lambda_5 x)$$

où C_5, Λ_5, λ_5 sont des constantes universelles strictement positives.

La forme renversée s'obtient par le théorème de Skorohod [9]: si l'on se donne G_n et K_* processus de Kiefer sur $[0,1] \times [0,1]$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et indépendant de G_n, et si Ω est suffisamment riche, il existe un processus $K^{(n)}$ de même loi que K_* et indépendant de G_n tel que $K^{(n)}(t,1) = K_*(t,1)$ et tel que l'on ait l'inégalité (1.7) en remplaçant K par $K^{(n)}$ et $K_*^{(n)}$ par K_*.

Remarquons aussi qu'en réunissant les théorèmes 1.5 et 1.6 on obtient par une permutation d'indices l'approximation forte du processus $\{\sum_{i=1}^n B_i^*(t)\mathbb{1}_{Y_i\leq s}; (s,t) \in [0,1]^2\}$ où les B_i^*, $i = 1, \ldots, n$ sont des ponts browniens indépendants et indépendants de Y_i, $i = 1, \ldots, n$: si Ω est suffisamment riche, il existe un processus $K^{(n)}$ sur $[0,1] \times [0,1]$ indépendant de Y_i, $i = 1, \ldots, n$ tel que $K^{(n)}(t,1) = \sum_{i=1}^n B_i^*(t)$ et tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq b}\sup_{0\leq t\leq a}\Big|\sum_{i=1}^n B_i^*(t)\mathbb{1}_{Y_i\leq s} - \sqrt{n}K^{(n)}(t,s)\Big| \geq 2x + (C_4 + C_5)\log(nab)\Big)$$
$$\leq 2(\Lambda_4 \vee \Lambda_5)\exp\big(-(\lambda_4 \wedge \lambda_5)x\big).$$

Les théorèmes 1.5 et 1.6 sont démontrés en sections 3 et 4.

2 Preuve du théorème 1.4

Remarquons tout d'abord que les cas où une construction est nécessaire sont ceux où $nab > x + C_1 \log(nab)$ pour le théorème 1.1 et $ma > x + C_3 \log(ma)$ pour le théorème 1.3. En effet, dans les autres cas, ces théorèmes découlent directement d'inégalités exponentielles pour les processus gaussiens et empiriques (pour une illustration de ce genre de technique, voir par exemple la preuve du théorème 1.6 dans les cas $3x + 3C_4 \log(nab) \geq nab$). Pour ne pas citer ici ces inégalités, nous renvoyons à l'article de Castelle et Laurent [3, propositions 3.4, 3.5, 4.1, 4.2].

Soient $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ définis dans l'introduction et soient $I_1, \dots, I_n$ et $R_1, \dots, R_n$ définis par $Y_{I_1} < Y_{I_2} < \cdots < Y_{I_n}$ et

$$R_i = j \text{ si et seulement si } Y_i = Y_{I_j}.$$

Les n-uplets (X_{I_i}, Y_i), $i = 1, \dots, n$ et (X_{R_i}, Y_i), $i = 1, \dots, n$ ont même loi que (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$.

Définissons $\tilde{H}_n$ et $\tilde{F}_j$ par

$$\tilde{H}_n(t,s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_{R_i} \leq t, Y_i \leq s}$$

$$\tilde{F}_j(t) = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_{I_i} \leq t}.$$

L'équivalence des théorèmes 1.1 et 1.3 repose sur les égalités suivantes:

$$nH_n(t,s) = \big(nG_n(s)\big) \tilde{F}_{nG_n(s)}(t); \tag{2.1}$$

$$\big(nG_n(s)\big) F_{nG_n(s)}(t) = n\tilde{H}_n(t,s). \tag{2.2}$$

2.1 Le théorème 1.1 est conséquence du théorème 1.3

Par le théorème 1.3 inégalité (1.5) il existe un pont brownien $B^{(n)}$, construit sur G_n, tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leq s \leq b} |nG_n(s) - ns - \sqrt{n}B^{(n)}(s)| \geq x + C_0 \log(nb)\Big) \leq \Lambda_0 \exp(-\lambda_0 x). \tag{2.3}$$

Par le théorème 1.3 inégalités (1.4) et (1.5) il existe un processus de Kiefer $\tilde{K}^{(n)}$ sur $[0,1] \times \{1, \dots, n\}$, construit sur $(\tilde{F}_j)$, $j = 1, \dots, n$ tel que:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leq j \leq m} \sup_{0 \leq t \leq a} |j\tilde{F}_j(t) - jt - \tilde{K}^{(n)}(t,j)| \geq \big(x + C_3 \log(ma)\big) \log(ma)\Big) \\ &\qquad \leq \Lambda_3 \exp(-\lambda_3 x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \leq t \leq a} |n\tilde{F}_n(t) - nt - \tilde{K}^{(n)}(t,n)| \geq x + C_0 \log(na)\Big) \leq \Lambda_0 \exp(-\lambda_0 x). \tag{2.5}$$

De plus, $(\tilde{F}_j)$, $j = 1, \dots, n$ et G_n étant indépendants, le processus $\tilde{K}^{(n)}$ est indépendant de G_n. Par le théorème de Skorohod [9] il existe un processus de Kiefer $K_*^{(n)}$ sur $[0,1] \times [0,1]$, indépendant de G_n, tel que:

$$K_*^{(n)}\Big(t, \frac{j}{n}\Big) = \frac{\tilde{K}^{(n)}(t,j)}{\sqrt{n}}.$$

Enfin, par le théorème 1.6, il existe un processus de Kiefer $K^{(n)}$ de même loi que $K_*^{(n)}$ et indépendant de G_n (donc indépendant de $B^{(n)}$) tel que $K^{(n)}(t,1) = K_*^{(n)}(t,1)$ et tel que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le s \le b, 0 \le t \le a} \sqrt{n}\big| K^{(n)}(t,s) - K_*^{(n)}\big(t, G_n(s)\big)\big| \ge x + C_5 \log(nab)\Big)\\ \le \Lambda_5 \exp(-\lambda_5 x).\end{aligned} \tag{2.6}$$

On pose alors $D^{(n)}(t,s) = K^{(n)}(t,s) + tB^{(n)}(s)$. L'inégalité (1.2) découle alors de l'inégalité (2.5) puisque $nF_n(t) = n\tilde{F}_n(t)$ et $\sqrt{n}D^{(n)}(t,1) = \sqrt{n}K^{(n)}(t,1) = \sqrt{n}K_*^{(n)}(t,1) = \tilde{K}^{(n)}(t,n)$. L'inégalité (1.3) découle de l'inégalité (2.3) puisque $\sqrt{n}D^{(n)}(1,s) = \sqrt{n}B^{(n)}(s)$. Notons P la probabilité à contrôler pour obtenir l'inégalité (1.1):

$$\begin{aligned}P = \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le s \le b, 0 \le t \le a} |nH_n(t,s) - nts - \sqrt{n}D^{(n)}(t,s)|\\ \ge \big(4x + (C_0 + 4C_3 + C_5)\log(nab)\big)\log(nab)\Big).\end{aligned}$$

Définissons l'événement Θ par $\Theta = \{nG_n(b) \le 2nb\}$. Comme $nb > 3x$, le contrôle de $\mathbb{P}(\Theta^c)$ est une application directe de deux inégalités (Bennett [1] et Wellner [12]) résumées comme suit (Csörgő et Horváth [5, p. 116]):

Lemme 2.1 *Soit Z une binômiale de moyenne m. Alors pour tout y positif et tout signe ϵ on a $\mathbb{P}\big(\epsilon(Z - m) \ge y\big) \le \exp\big(-mh(y/m)\big)$ où h est définie par $h(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$.*

On obtient donc $\mathbb{P}(\Theta^c) \le \exp(-x)$. Utilisant l'égalité (2.1) on obtient $P \le P_1 + P_2 + P_3 + \exp(-x)$, où P_1, P_2, P_3 sont définies par:

$$P_1 = \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le t \le a} \sup_{0 \le s \le b} |t|\, |nG_n(s) - ns - \sqrt{n}B^{(n)}(s)| \ge x + C_0 \log(nab)\Big)$$

$$\begin{aligned}P_2 = \mathbb{P}\Big(\sup_{1 \le j \le (2nb \wedge n)} \sup_{0 \le t \le a} |j\tilde{F}_j(t) - jt - \tilde{K}^{(n)}(t,j)|\\ \ge \big(x + 2C_3 \log(nab)\big) 2\log(nab)\Big)\end{aligned}$$

$$P_3 = \mathbb{P}\Big(\sup_{0 \le s \le b, 0 \le t \le a} \sqrt{n}\big| K^{(n)}(t,s) - K_*^{(n)}\big(t, G_n(s)\big)\big| \ge x + C_5 \log(nab)\Big).$$

Les probabilités P_1, P_2, P_3 sont respectivement contrôlées en (2.3), (2.4), (2.6). Pour P_1 on utilise $\big(\log(nab)\big)/a \ge \log(nb)$, pour P_2 on utilise $2\log(nab) \ge \log(2nab)$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

2.2 Le théorème 1.3 est conséquence du théorème 1.1

Par le théorème 1.1 il existe un pont brownien bidimensionnel $\tilde{D}^{(n)}$ tel que:

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b}\sup_{0\le t\le a}|n\tilde{H}_n(t,s)-nts-\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(t,s)|\ge\big(x+C_1\log(nab)\big)\log(nab)\Big)\le\Lambda_1\exp(-\lambda_1 x)\tag{2.7}$$

$$\mathbb{P}\big(\sup_{0\le s\le b}|nG_n(s)-ns-\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(1,s)|\ge x+C_0\log(nb)\big)\le\Lambda_0\exp(-\lambda_0 x)\tag{2.8}$$

$$\mathbb{P}\big(\sup_{0\le t\le a}|nF_n(t)-nt-\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(t,1)|\ge x+C_0\log(na)\big)\le\Lambda_0\exp(-\lambda_0 x).\tag{2.9}$$

Notons que les processus $\tilde{D}^{(n)}(1,.)$ et $\tilde{D}^{(n)}(.,1)$ sont respectivement construits sur G_n et F_n. On pose $\tilde{K}^{(n)}(t,s)=\tilde{D}^{(n)}(t,s)-t\tilde{D}^{(n)}(1,s)$. Le processus $\tilde{K}^{(n)}$ est un processus de Kiefer indépendant de $\tilde{D}^{(n)}(1,.)$ et donc de G_n. Par le théorème 1.6 il existe un processus de Kiefer $K_*^{(n)}$ indépendant de G_n tel que $K_*^{(n)}(t,1)=\tilde{K}^{(n)}(t,1)$ et tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b,0\le t\le a}\sqrt{n}\big|\tilde{K}^{(n)}(t,s)-K_*^{(n)}\big(t,G_n(s)\big)\big|\ge x+C_5\log(nab)\Big)\le\Lambda_5\exp(-\lambda_5 x).\tag{2.10}$$

On pose alors $K^{(n)}(t,j)=\sqrt{n}K_*^{(n)}(t,j/n)$. L'inégalité (1.5) découle de (2.9) puisque $K^{(n)}(t,n)=\sqrt{n}K_*^{(n)}(t,1)=\sqrt{n}\tilde{K}^{(n)}(t,1)=\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(t,1)$. Notons P la probabilité à contrôler pour obtenir (1.4):

$$P=\mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le m}\sup_{0\le t\le a}|jF_j(t)-jt-K^{(n)}(t,j)|\ge\big(4x+(2C_0+2C_5+4C_1)\log(ma)\big)\log(ma)\Big).$$

Définissons l'inverse d'une fonction par $f^{-1}(v)=\inf\{u/f(u)\ge v\}$. On pose $b=m/n$ et $\Theta=\{G_n^{-1}(b)\le 2b\}$. Utilisant l'égalité (2.2) on obtient $P\le P_1+P_2+P_3+\mathbb{P}(\Theta^c)$ où les probabilités P_1,P_2,P_3 sont définies par:

$$P_1=\mathbb{P}\big(\sup_{0\le t\le a}\sup_{0\le s\le 2b\wedge 1}|t|\,|nG_n(s)-ns-\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(1,s)|\ge x+2C_0\log(ma)\big)$$

$$P_2=\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 2b\wedge 1}\sup_{0\le t\le a}|n\tilde{H}_n(t,s)-nts-\sqrt{n}\tilde{D}^{(n)}(t,s)|\ge\big(x+2C_1\log(ma)\big)2\log(ma)\Big)$$

$$P_3=\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le 2b\wedge 1}\sup_{0\le t\le a}\sqrt{n}\big|K^{(n)}(t,s)-K_*^{(n)}\big(t,G_n(s)\big)\big|\ge x+2C_5\log(ma)\Big).$$

Puisque nous sommes dans le cas $nb>x$, le contrôle de $\mathbb{P}(\Theta^c)$ est une application directe d'une inégalité de Wellner (inégalité 10.3.7 p. 416 du livre de Shorack et Wellner [8]). Utilisant $2\big(\log(ma)\big)/a\ge\log(2nb)$ et $2\log(ma)\ge\log(2nab)$ on contrôle respectivement P_1,P_2,P_3 par (2.8), (2.7), (2.10).

3 Preuve du théorème 1.6

Le théorème 1.6 est une conséquence du théorème 1.5 et du lemme suivant:

Lemme 3.1 *Soit K un processus de Kiefer défini sur $[0,1]\times[0,1]$. Pour tout x positif, pour tout $b\in[0,1]$ et pour tout $a\in[0,1[$ on a:*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b}\sup_{0\le t\le a}\sqrt{n}|K(t,s)|\ge x\Big)\le 2e\exp\Big(-\frac{(1-a)x^2}{2nab}\Big) \tag{3.1}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b}\sup_{0\le t\le 1}\sqrt{n}|K(t,s)|\ge x\Big)\le 4e\exp\Big(-\frac{x^2}{8nb}\Big). \tag{3.2}$$

Preuve du lemme 3.1 La preuve de (3.1) est la même que celle de la proposition 3.5 de Castelle et Laurent [3]. Pour obtenir (3.2) on utilise le fait que $\{K(t,s);0\le t\le 1;0\le s\le 1\}\overset{\mathcal{D}}{=}\{G(t,s);0\le t\le 1;0\le s\le 1\}$ où $G(t,s)$ est défini par $G(t,s)=K(1-t,s)$. De là,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b}\sup_{0\le t\le 1}\sqrt{n}|K(t,s)|\ge x\Big)\le 2\,\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le b}\sup_{0\le t\le 1/2}\sqrt{n}|K(t,s)|\ge x/2\Big).$$

Cette méthode ne donne évidemment pas les constantes optimales dans l'inégalité (3.2). ■

Construction du processus $K_*^{(n)}$ On définit $\tilde K^{(n)}$ processus de Kiefer sur $[0,1]\times\{0,1,\dots,n\}$ par $\tilde K^{(n)}(t,i)=\sqrt{n}K(t,i/n)$ et on définit B_i par $B_i(t)=\tilde K^{(n)}(t,i)-\tilde K^{(n)}(t,i-1)$. Par le théorème 1.5 il existe des ponts browniens indépendants B_i^*, $i=1,\dots,n$, indépendants des accroissements de nG_n, tels que $\sum_{i=1}^n B_i^*(t)=\sum_{i=1}^n B_i(t)$ et tels que

(3.3)
$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1\le j\le m}\sup_{0\le t\le a}\Big|\sum_{i=1}^{j}B_i(t)-\sum_{i=1}^{nG_n(j/n)}B_i^*(t)\Big|\ge x+C_4\log(ma)\Big)\le\Lambda_4\exp(-\lambda_4 x).$$

Si l'espace de probabilité est suffisamment riche, les B_i^*, $i=1,\dots,n$ peuvent être construits indépendants de G_n. On pose alors $\tilde{\tilde K}^{(n)}(t,j/n)=\big(\sum_{i=1}^{j}B_i^*(t)\big)/\sqrt{n}$. Par le théorème de Skohorod [9] on peut affirmer l'existence d'un processus de Kiefer $K_*^{(n)}$ sur $[0,1]\times[0,1]$ indépendant de G_n tel que $K_*^{(n)}(t,j/n)=\tilde{\tilde K}^{(n)}(t,j/n)$.

Contrôle de la probabilité Notons P la probabilité à contrôler:

$$P=\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le t\le a,0\le s\le b}\sqrt{n}\big|K(t,s)-K_*^{(n)}\big(t,G_n(s)\big)\big|\ge 3x+3C_4\log(nab)\Big).$$

Dans les cas où $3x+3C_4\log(nab)\ge nab$ le théorème 1.6 n'est pas constructif. On définit γ et b^* par $na\gamma=3x+3C_4\log(nab)$ et $b^*=\inf(\gamma,1)$. Si $b^*\le 1/2$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

alors $b^* = \gamma$ et $\mathbb{P}\big(G_n(b^*) \geq 2b^*\big) \leq \exp(-x)$ (lemme 2.1), si $b^* > 1/2$ alors $\mathbb{P}\big(G_n(b^*) \geq 2b^*\big) = 0$. On obtient donc

$$P \leq 2\,\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq 2b^*\wedge 1}\ \sup_{0\leq t\leq a} \sqrt{n}|K(t,s)| \geq \big(3x + 3C_4\log(nab)\big)/2\Big) + \exp(-x).$$

Le résultat découle de l'inégalité (3.2) si $a > 1/2$ et de l'inégalité (3.1) si $a \leq 1/2$.

Considérons maintenant les cas où $3x + 3C_4\log(nab) < nab$. Soit γ défini précédemment et soient les entiers B et C définis par $(B-1)/n < b \leq B/n$ et $(C-1)/n < \gamma \leq C/n$. Soit r l'entier tel que $(rC)/n < b \leq \big((r+1)C\big)/n$. On a $P \leq P_1 + P_2 + P_3$ avec

$$P_1 = \sum_{u=0}^{r} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{\frac{uC}{n}\leq s\leq \frac{(u+1)C}{n}}\ \sup_{0\leq t\leq a} \sqrt{n}\Big|K(t,s) - K\Big(t,\frac{uC}{n}\Big)\Big| \geq x + C_4\log(nab)\Bigg)$$

$$P_2 = \sum_{u=0}^{r} \mathbb{P}\Bigg(\sup_{G_n(\frac{uC}{n})\leq s\leq G_n(\frac{(u+1)C}{n})}\ \sup_{0\leq t\leq a} \sqrt{n}\Big|K(t,s) - K\Big(t,\frac{uC}{n}\Big)\Big| \geq x + C_4\log(nab)\Bigg)$$

$$P_3 = \mathbb{P}\Bigg(\sup_{u=1,\dots,r}\ \sup_{0\leq t\leq a} \sqrt{n}\Big|K\Big(t,\frac{uC}{n}\Big) - K_*^{(n)}\Big(t, G_n\Big(\frac{uC}{n}\Big)\Big)\Big| \geq x + C_4\log(nab)\Bigg).$$

Pour contrôler P_1, P_2, rappelons que $\{K(t,s) - K(t,a); t \in [0,1]; s \in [a,b]\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{K(t,s-a); t \in [0,1]; s \in [a,b]\}$. De plus, $\mathbb{P}\big(G_n(\frac{(u+1)C}{n}) - G_n(\frac{uC}{n}) \geq 2C/n\big) \leq \exp(-C/3)$ (lemme 2.1). Ainsi l'on obtient

$$P_1 + P_2 \leq 2r'\,\mathbb{P}\big(\sup_{0\leq s\leq (\frac{2C}{n}\wedge 1)}\ \sup_{0\leq t\leq a} \sqrt{n}|K(t,s)| \geq x + C_4\log(nab)\big)$$
$$+\, r'\exp\Big(-\big(x + C_4\log(nab)\big)\Big)$$

avec $r' = r + 1$. Comme $r' < 2nab$ et $aC < 2na\gamma$, l'inégalité (3.2) si $a > 1/2$ et l'inégalité (3.1) si $a \leq 1/2$ entraînent la majoration souhaitée de $P_1 + P_2$. Pour contrôler P_3 on utilise $rC < B$, $nb > B - 1$ et l'inégalité (3.3). Le résultat s'ensuit.

4 Preuve du théorème 1.5

4.1 Construction du nouveau processus

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cas où $n = 2^N$. Pour alléger l'écriture nous notons $K(t,]m_1, m_2])$ pour $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} B_i(t)$ et nous notons $\{K_*(t,]m_1, m_2]); t \in [0,1]\}$ les accroissements du nouveau processus sur $]m_1, m_2]$. Nous notons $K(t,m)$ (resp. $K_*(t,m)$) pour $K(t,]0,m])$ (resp. $K_*(t,]0,m])$).

À une étape u, $u \in \{0,1,\dots,N\}$, on coupe $\big]0, 2^N\big]$ en 2^{N-u} morceaux de longueur 2^u et l'on note pour $v \in \{1,2,\dots,2^{N-u}\}$, avec la convention $N_0 = 0$:

$$a_v^u =](v-1)2^u, v2^u]$$
$$A_v^u = \big]N_{(v-1)2^u}, N_{v2^u}\big]$$
$$\Delta_v^u = N_{v2^u} - N_{(v-1)2^u}.$$

Construction Pour $u = N$ on pose $K_*(t, A_1^N) = K(t, a_1^N)$ (autrement dit, $K_*(t, n) = K(t, n)$). Pour $u \in \{0, \dots, N-1\}$ on pose:
Si $v = 2w - 1$, $w \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}$,

$$K_*(t, A_v^u) = \frac{\Delta_v^u}{\Delta_w^{u+1}} K_*(t, A_w^{u+1}) + \sqrt{\frac{\Delta_v^u \Delta_{v+1}^u}{\Delta_w^{u+1}}}\, \frac{\left(K(t, a_v^u) - K(t, a_{v+1}^u)\right)/2}{\sqrt{2^{u+1}/4}}$$

si $\Delta_v^u \neq 0$, et

$$K_*(t, A_v^u) = 0$$

si $\Delta_v^u = 0$.
Si $v = 2w$, $w \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}$,

$$K_*(t, A_v^u) = K_*(t, A_w^{u+1}) - K_*(t, A_{v-1}^u).$$

Cohérence des lois On va montrer par récurrence que

$$\left(K_*(t, A_1^u), \dots, K_*(t, A_{2^u}^u), V\right) \overset{\mathcal{D}}{=} \left(K(t, A_1^u), \dots, K(t, A_{2^u}^u), V\right).$$

Nous appelons (H_u) cette égalité en loi. L'égalité (H_N) est vérifiée, nous supposons que l'égalité (H_{u+1}) est vérifiée et nous montrons l'égalité (H_u).

Les processus $K(., n)$ et $\left(K(., a_v^s) - K(., a_{v+1}^s);\, v \text{ impair};\, v \in \{1, \dots, 2^{N-s} - 1\}\right)$ pour $s \in \{0, \dots, N-1\}$ sont mutuellement indépendants. Ceci entraîne l'indépendance des processus $\left(K_*(., A_w^{u+1}); w \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}\right)$ et $\left(K(., a_v^u) - K(., a_{v+1}^u);\, v\right.$ impair; $\left. v \in \{1, \dots, 2^{N-u} - 1\}\right)$ (ce sont les deux vecteurs qui interviennent à l'étape u). Nous appelons (G) cette propriété.

Sur l'atome $\{V = v\}$, $(A_v^u; v \in \{1, \dots, 2^{N-u}\})$ et $(\Delta_v^u; v \in \{1, \dots, 2^{N-u}\})$ sont fixés, notons $(\alpha_v^u; v \in \{1, \dots, 2^{N-u}\})$ et $(\delta_v^u; v \in \{1, \dots, 2^{N-u}\})$ leur valeur respective. L'égalité (H_{u+1}) et la propriété (G) entraînent alors que le vecteur $\left(K_*(., \alpha_v^{u+1});\right.$ $\left. v \in \{1, \dots, 2^{N-u}\}\right)$ est un processus gaussien vectoriel dont il suffit de calculer les covariances $E\left(K_*(t, \alpha_v^u) K_*(t', \alpha_{v'}^u)\right)$ pour δ_v^u et $\delta_{v'}^u$ non nuls (sinon la covariance est nulle).

Si $v \neq v'$ et $v + v' \notin \left\{4k - 1; k \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}\right\}$ on obtient: $\mathbb{E}\left(K_*(t, \alpha_v^u) K_*(t', \alpha_{v'}^u)\right) = 0$.

Si $v = v'$ ou $v + v' \in \left\{4k - 1; k \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}\right\}$, nous définissons r comme l'entier impair parmi $\{v, v-1\}$, et nous posons $w = (r+1)/2$.

Si $v = v'$, on obtient:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(K_*(t, \alpha_v^u) K_*(t', \alpha_{v'}^u)\right) &= \left(\left(\frac{\delta_v^u}{\delta_w^{u+1}}\right)^2 \delta_w^{u+1} + \frac{\delta_r^u \delta_{r+1}^u}{\delta_w^{u+1}}\right)(t \wedge t' - tt') \\ &= \delta_v^u (t \wedge t' - tt').\end{aligned}$$

Si $v + v' \in \left\{4k - 1; k \in \{1, \dots, 2^{N-(u+1)}\}\right\}$, on obtient:

$$\mathbb{E}\left(K_*(t, \alpha_v^u) K_*(t', \alpha_{v'}^u)\right) = \left(\frac{\delta_r^u \delta_{r+1}^u}{(\delta_w^{u+1})^2} \delta_w^{u+1} - \frac{\delta_r^u \delta_{r+1}^u}{\delta_w^{u+1}}\right)(t \wedge t' - tt') = 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

Fin de la construction Pour le moment nous avons construit $\{K_*(t, N_j); j \in \{1, \ldots, n\}; t \in [0,1]\}$, ce qui ne définit pas $B_1^*, \ldots, B_n^*$.

Première méthode On invoque le théorème de Skohorod [9]. Par l'égalité (H_0) on a: $\Big(\big(K_*(., N_j);\ j \in \{1, \ldots, n\}\big), V\Big) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Big(\big(\sum_{i=1}^{N_j} B_i(.);\ j \in \{1, \ldots, n\}\big), V\Big)$. On peut affirmer, si l'espace de probabilité est suffisamment riche, l'existence de n ponts browniens $B_1^*, \ldots, B_n^*$ indépendants entre eux et indépendants de V tels que:

$$\begin{aligned}\Big(\Big(\sum_{i=1}^{N_j} B_i^*(.); j \in \{1, \ldots, n\}\Big), \big(K(., N_j); j \in \{1, \ldots, n\}\big), V\Big)\\ = \Big(\big(K_*(., N_j); j \in \{1, \ldots, n\}\big), \big(K(., N_j); j \in \{1, \ldots, n\}\big), V\Big).\end{aligned}$$

Seconde méthode Nous construisons explicitement $B_1^*, \ldots, B_{2^N}^*$. Nous reprenons les notations précédentes: sur l'atome $\{V = (\delta_1^0, \ldots, \delta_{2^N}^0)\}$, $(A_1^0, \ldots, A_{2^N}^0)$ prend la valeur $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{2^N}^0)$. Puisqu'il n'y a pas de confusion possible, nous notons dorénavant $(\delta_1, \ldots, \delta_{2^N})$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^N})$ ces valeurs. Posons $j_0 = 0$ et $j_r = \inf\{j > j_{(r-1)}; \delta_j \neq 0\}$ $(\inf(\varnothing) = +\infty)$. On pose $d = \sup\{r; j_r < +\infty\}$. Pour le moment nous avons construit $\big(K_*(., \alpha_1), \ldots, K_*(., \alpha_{2^N})\big)$. Si l'espace de probabilité est suffisamment riche (en fait, s'il existe sur cet espace une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de K et de V) alors il existe sur cet espace des ponts browniens $B_1^{**}, \ldots, B_{2^N}^{**}$ indépendants et indépendants de K et de V. Nous construisons, pour chaque $r \in \{1, \ldots, d\}$, un vecteur $\mathcal{B}_r^*$ défini par $\mathcal{B}_r^* = (B^*_{\delta_{j_0}+\delta_{j_1}+\cdots+\delta_{j_{(r-1)}}+1}, \ldots, B^*_{\delta_{j_0}+\delta_{j_1}+\cdots+\delta_{j_r}})$ avec la convention $\delta_{j_0} = 0$. Pour alléger les notations, r étant fixé, on pose $a = \delta_{j_0} + \delta_{j_1} + \cdots + \delta_{j_{(r-1)}} + 1$ et $b = \delta_{j_0} + \delta_{j_1} + \cdots + \delta_{j_r}$.

Si $\delta_{j_r} = 1$ alors $a = b$ et on pose:

$$B_a^*(t) = K_*(t, \alpha_{j_r}).$$

Si $\delta_{j_r} > 1$ on pose:

$$\begin{pmatrix} B_a^*(t) \\ B_{a+1}^*(t) \\ \vdots \\ B_{b-1}^*(t) \end{pmatrix} = \frac{K_*(t, \alpha_{j_r})}{\delta_{j_r}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{\Gamma} \begin{pmatrix} B_a^{**}(t) \\ B_{a+1}^{**}(t) \\ \vdots \\ B_{b-1}^{**}(t) \end{pmatrix}$$

où Γ est la matrice carrée de taille $\delta_{j_r} - 1$ avec $1 - (1/\delta_{j_r})$ sur la diagonale et $-(1/\delta_{j_r})$ hors de la diagonale. La matrice $\sqrt{\Gamma}$ est la matrice telle que $\Gamma = (\sqrt{\Gamma})(\sqrt{\Gamma})^{\mathrm{t}}$. Enfin on pose:

$$B_b^*(t) = K_*(t, \alpha_{j_r}) - \sum_{i=a}^{b-1} B_i^*(t).$$

Les vecteurs $\mathcal{B}_r^*$ sont clairement indépendants entre eux. À r fixé, si $\delta_{j_r} = 1$, B_a^* est un pont brownien, si $\delta_{j_r} > 1$, $\mathcal{B}_r^*$ est un processus gaussien vectoriel dont il suffit d'étudier les covariances. Notons $\mathcal{G}_r^*$ pour le vecteur colonne $(B_a^*, \dots, B_{b-1}^*)^{\mathrm{t}}$ et M la matrice carrée de taille $\delta_{j_r} - 1$ dont tous les éléments valent 1.

$$\mathbb{E}\Big(\mathcal{G}_r^*(t) \big(\mathcal{G}_r^*(t') \big)^t \Big) = \Big(\frac{1}{\delta_{j_r}} M + \Gamma \Big) (t \wedge t' - tt') = \mathrm{Id}(t \wedge t' - tt').$$

En utilisant $\mathbb{E}\left(K_*(t, \alpha_{j_r}) B_i^*(t') \right) = t \wedge t' - tt'$ pour $i \in \{a, \dots, b-1\}$ on obtient:

$$\mathbb{E}\left(B_b^*(t) B_b^*(t') \right) = \left(\delta_{j_r} - 2(\delta_{j_r} - 1) + (\delta_{j_r} - 1) \right) (t \wedge t' - tt') = (t \wedge t' - tt'),$$

et pour $i \in \{a, \dots, b-1\}$:

$$\mathbb{E}\left(B_b^*(t) B_i^*(t') \right) = (1-1)(t \wedge t' - tt') = 0.$$

En conclusion, sur tous les atomes $\{V = (\delta_1, \dots, \delta_{2^N})\}$, $B_1^*, \dots, B_{2^N}^*$ sont des ponts browniens indépendants. Leur loi ne dépend pas de l'atome donc ils sont indépendants de V, de plus ils vérifient $K_*(t, N_j) = \sum_{i=1}^{N_j} B_i^*(t)$ pour tout pour $j \in \{1, \dots, 2^N\}$.

4.2 Contrôle de la distance

Jusqu'au paragraphe *Contrôle de* $P_2(r)$, les arguments sont pratiquement les mêmes que dans la preuve du théorème 1.6. Néanmoins, pour conserver la lisibilité, nous rappelons rapidement la démarche à suivre. Notons P la probabilité à contrôler:

$$P = \mathbb{P}\Big(\sup_{1 \le j \le m} \sup_{0 \le t \le a} \Big| \sum_{i=1}^{j} B_i(t) - \sum_{i=1}^{N_j} B_i^*(t) \Big| \ge 3x + 3D_4 \log(ma) \Big).$$

Définissons μ par $\mu a = 3x + 3D_4 \log(ma)$. Les cas $3x + 3D_4 \log(ma) \ge ma$ se réglent de la même façon que les cas $3x + 3C_4 \log(nab) \ge nab$ dans la preuve du théorème 1.6, il faut poser $M = \inf(\mu, n)$ au lieu de $b^* = \inf(\gamma, 1)$ et remplacer le lemme 3.1 par le lemme suivant:

Lemme 4.1 *Soient B_i, $i \ge 1$ des ponts browniens indépendants. Pour tout x positif, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a \in [0, 1[$ on a:*

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \le m \le n} \sup_{0 \le t \le a} \Big| \sum_{i=1}^{m} B_i(t) \Big| \ge x \Big) \le 2e \exp\Big(-\frac{(1-a)x^2}{2na} \Big) \tag{4.1}$$

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{1 \le m \le n} \sup_{0 \le t \le 1} \Big| \sum_{i=1}^{m} B_i(t) \Big| \ge x \Big) \le 4e \exp\Big(-\frac{x^2}{8n} \Big). \tag{4.2}$$

La preuve de l'inégalité (4.1) se trouve dans Castelle et Laurent [3, proposition 3.5], on montre l'inégalité (4.2) comme l'inégalité (3.2) du lemme 3.1. L'inégalité (4.2) est moins fine que celle de Kolmogorov mais puisque nous ne cherchons pas à optimiser les constantes cela n'a pas d'importance.

Nous considérons maintenant les cas $3x + 3D_4 \log(ma) < ma$. Il existe des entiers L_0, L_1 tels que $2^{L_0 - 1} < \mu \leq 2^{L_0}$ et $2^{L_1 - 1} < m \leq 2^{L_1}$ ($L_0 \leq L_1 \leq N$). Définissons l'événement Θ par:

$$\Theta = \left\{ \frac{2^{L_0}}{2} \leq \Delta_\nu^{L_0} \leq \frac{3 \times 2^{L_0}}{2}; \nu \in \{1, \dots, 2^{L_1 - L_0}\} \right\}$$

et utilisons $\{\sum_{i=1}^{j} B_i(t) - \sum_{i=1}^{k_1} B_i(t); t \in [0,1]; k_1 < k \leq k_2\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{\sum_{i=1}^{j-k_1} B_i(t); t \in [0,1]; k_1 < k \leq k_2\}$. On obtient:

$$P \leq 2^{L_1 - L_0} \big(2P_1 + \sup_{1 \leq r \leq 2^{L_1 - L_0}} P_2(r) \big) + \mathbb{P}(\Theta^c),$$

où P_1, $P_2(r)$ sont définies par:

$$P_1 = \mathbb{P}\Big(\sup_{1 \leq j \leq (\frac{3}{2} \times 2^{L_0}) \wedge n} \sup_{0 \leq t \leq a} \Big| \sum_{i=1}^{j} B_i(t) \Big| \geq x + D_4 \log(ma) \Big)$$

$$P_2(r) = \mathbb{P}\Big(\Big\{ \sup_{0 \leq t \leq a} \Big| \sum_{i=1}^{r2^{L_0}} B_i(t) - \sum_{i=1}^{N_{r2^{L_0}}} B_i^*(t) \Big| \geq x + D_4 \log(ma) \Big\} \cap \Theta \Big).$$

Remarquons que $2^{L_1 - L_0} < 2ma$ et que $3\big(x + D_4 \log(ma)\big) \leq 2^{L_0} a \leq 6\big(x + D_4 \log(ma)\big)$. Le lemme 2.1 fournit le contrôle de $\mathbb{P}(\Theta^c)$ et le lemme 4.1 le contrôle de P_1 (inégalité (4.1) si $a \leq 1/2$ et inégalité (4.2) si $a > 1/2$). Au final il vient, pour $D_4 \geq 144$,

$$P \leq 16e \exp(-x/144) + 2ma \sup_{1 \leq r \leq 2^{L_1 - L_0}} P_2(r) + 2 \exp\big(-3xh(1/2)\big).$$

Si $L_0 = N$ alors par construction $P_2(r) = 0$. Dans la suite nous ne considérons que les cas où $L_0 < N$.

Contrôle de $P_2(r)$ Un sous-ensemble d'indices $\{i_1, \dots, i_d\}$ de $\{1, \dots, 2^N\}$ peut être identifié au vecteur de $\mathbb{R}^{2^N}$ $(x_1, \dots, x_d)$ défini par:

$$x_i = 1 \quad \text{pour } i \in \{i_1, \dots, i_d\}$$
$$x_i = 0 \quad \text{pour } i \notin \{i_1, \dots, i_d\}.$$

L'entier L_0 étant fixé, notons γ_r le vecteur de $\mathbb{R}^{2^N}$ associé à $\{1, \dots, r2^{L_0}\}$ et notons $\mathcal{G}$ le processus vectoriel $(B_1, \dots, B_{2^N})$. Avec ces notations, on a

$$\sum_{i=1}^{r2^{L_0}} B_i(t) = \langle \mathcal{G}(t) \mid \gamma_r \rangle.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

Soit e^u_v le vecteur de $\mathbb{R}^{2^N}$ associé à $\{(v-1)2^u+1,\dots,v2^u\}$. Posons $\tilde{e}^u_v = e^u_v - e^u_{v+1}$ pour $u \in \{0,\dots,N-1\}$, $v \in \{1,\dots,2^{N-u}\}$, v impair. Alors $(e^N_1, \tilde{e}^u_v; u \in \{0,\dots,N-1\}; v \in \{1,\dots,2^{N-u}\}; v$ impair) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^{2^N}$ et

$$\gamma_r = \sum_{u=L_0}^{N-1} c^u_r \tilde{e}^u_{v(u,r)} + \frac{r2^{L_0}}{2^N} e^N_1$$

où $v(u,r)$ est l'unique entier impair tel que

$$r2^{L_0} \in \left]\bigl(v(u,r)-1\bigr)2^u, \bigl(v(u,r)+1\bigr)2^u\right]$$

et où

$$c^u_r = \frac{\langle \gamma_r \mid \tilde{e}^u_{v(u,r)}\rangle}{2^{u+1}}.$$

Ainsi, en reprenant les notations de la section 4.1, on a:

$$\sum_{i=1}^{r2^{L_0}} B_i(t) = \sum_{u=L_0}^{N-1} c^u_r \bigl(K(t, a^u_{v(u,r)}) - K(t, a^u_{v(u,r)+1})\bigr) + \frac{r2^{L_0}}{2^N} K(t,n).$$

De même, notons $\mathcal{G}^*$ le processus vectoriel $(\sum_{i=1}^{N_1} B^*_i, \sum_{i=N_1+1}^{N_2} B^*_i, \dots, \sum_{i=N_{2^N-1}+1}^{2^N} B^*_i)$ avec la convention $\sum_{i=N_j+1}^{N_{j+1}} B^*_i = 0$ si $N_j = N_{j+1}$. On obtient:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N_{r2^{L_0}}} B^*_i(t) &= \langle \mathcal{G}^*(t) \mid \gamma_r\rangle \\ &= \sum_{u=L_0}^{N-1} c^u_r \bigl(K_*(t, A^u_{v(u,r)}) - K_*(t, A^u_{v(u,r)+1})\bigr) + \frac{r2^{L_0}}{2^N} K_*(t,n),\end{aligned}$$

et donc:

$$P_2(r) = \mathbb{P}\Bigl(\Bigl\{\sup_{0\le t\le a}\Bigl|\sum_{u=L_0}^{N-1} c^u_r \mathcal{D}^u_{v(u,r)}(t)\Bigr| \ge x + D_4\log(ma)\Bigr\} \cap \Theta\Bigr)$$

avec

$$\mathcal{D}^u_{v(u,r)}(t) = \bigl(K_*(t, A^u_{v(u,r)}) - K_*(t, A^u_{v(u,r)+1})\bigr) - \bigl(K(t, a^u_{v(u,r)}) - K(t, a^u_{v(u,r)+1})\bigr).$$

Étude du terme $\mathcal{D}^u_v(t)$ dans le cas $\Delta^u_v \neq 0$ et v impair Nous posons $\mathcal{I}^u_v(t) = \bigl(K(t,a^u_v) - K(t,a^u_{v+1})\bigr)/2^{(u+1)/2}$. On a

$$\mathcal{D}^u_v(t) = C^u_v(t) + D^u_v(t) + E^u_v(t),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

où $C_\nu^u(t)$, $D_\nu^u(t)$, $E_\nu^u(t)$ sont définis par

$$C_\nu^u(t) = 2\left(K_*(t, A_\nu^u) - \frac{\Delta_\nu^u}{\Delta_w^{u+1}} K_*(t, A_w^{u+1}) - \sqrt{\frac{\Delta_\nu^u \Delta_{\nu+1}^u}{\Delta_w^{u+1}}}\, \mathcal{I}_\nu^u\right)$$

$$D_\nu^u(t) = 2\left(\frac{\Delta_\nu^u - (\Delta_w^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_w^{u+1}}}\right) \frac{K_*(t, A_w^{u+1})}{\sqrt{\Delta_w^{u+1}}}$$

$$E_\nu^u(t) = 2\left(\sqrt{\frac{\Delta_\nu^u \Delta_{\nu+1}^u}{\Delta_w^{u+1}}} - \sqrt{2^{u-1}}\right) \mathcal{I}_\nu^u(t)$$

avec la convention $w = (\nu+1)/2$. Par construction, $C_\nu^u(t) = 0$. Nous simplifions le terme $E_\nu^u(t)$ et obtenons finalement

$$\mathcal{D}_\nu^u(t) = D_\nu^u(t) + {D'}_\nu^u(t) + {D''}_\nu^u(t),$$

où $D_\nu^u(t)$ est précédemment défini et où ${D'}_\nu^u(t)$, ${D''}_\nu^u(t)$ sont définis par

$${D'}_\nu^u(t) = -2\sqrt{\frac{\Delta_{\nu+1}^u}{\Delta_w^{u+1}}}\left(\frac{\Delta_\nu^u - (\Delta_w^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_\nu^u} + \sqrt{\Delta_w^{u+1}/2}}\right) \mathcal{I}_\nu^u(t)$$

$${D''}_\nu^u(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\Delta_\nu^u - 2^u}{\sqrt{\Delta_\nu^u} + \sqrt{2^u}}\right) \mathcal{I}_\nu^u(t).$$

Retour à $P_2(r)$ Sur Θ et conditionnellement à $\{\Delta_\nu^{L_0}; 1 \le \nu \le 2^{N-L_0}\}$, les processus $\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u T_{\nu(u,r)}^u(t); t \in [0,1]\}$ avec $T \in \{D, D', D''\}$ sont des processus gaussiens dont il va falloir étudier la covariance.

Si $T \in \{D, D'\}$ la covariance est du bon ordre sur l'événement $\Theta_1(r)$ défini par

$$\Theta_1(r) = \left\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u \left(\frac{\Delta_{\nu(u,r)}^u - (\Delta_{w(u,r)}^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}\right)^2 \le x + D_4 \log(ma)\right\}$$

où par convention $w(u,r) = \big(\nu(u,r)+1\big)/2$.

Si $T = D''$ la covariance est du bon ordre sur l'événement $\Theta_2(r)$ défini par

$$\Theta_2(r) = \left\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u \left(\frac{\Delta_{\nu(u,r)}^u - 2^u}{\sqrt{2^u}}\right)^2 \le x + D_4 \log(ma)\right\}$$

avec la même convention pour $w(u,r)$.

Avec ce qui précède, on a

$$P_2(r) \le P_D^1(r) + P_{D'}^1(r) + P_{D''}^2(r) + \mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_1^c(r)\big) + \mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r)\big),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

où $P_T^j(r)$ est définie par

$$P_T^j(r) = \mathbb{P}\Big(\Big\{\sup_{0\le t\le a}\Big|\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u T_{v(u,r)}^u(t)\Big| \ge \big(x + D_4\log(ma)\big)/3\Big\} \cap \Theta \cap \Theta_j(r)\Big).$$

Tout au long des contrôles nous séparons les cas $u < L_1$ et $u \ge L_1$.

Si $u < L_1$ nous utilisons $0 \le c_r^u \le 1/2$ et le fait que sur Θ on a $\frac{2^u}{2} \le \Delta_v^u \le \frac{3}{2} \times 2^u$ pour tout $v \in \{1,\dots,2^{L_1-u}\}$.

Si $u \ge L_1$ nous utilisons $c_r^u = (r2^{L_0})/2^{u+1} \le 2^{L_1}/2^{u+1}$.

Également, nous utilisons lors des contrôles de $\mathbb{P}\big(\Theta\cap\Theta_1^c(r)\big)$ et de $\mathbb{P}\big(\Theta\cap\Theta_2^c(r)\big)$ la majoration $L_1 - L_0 < 2\log(ma)/\ln(2)$ (ici log coincide avec ln mais nous préférons conserver dans tout l'article la notation $\log(ma)$). Nous donnons des constantes explicites partout mais nous n'avons pas du tout cherché à les optimiser.

Contrôle de $P_D^1(r) + P_{D'}^1(r) + P_{D''}^2(r)$ Sur $\Theta \cap \Theta_1(r)$ et conditionnellement à $\{\Delta_v^{L_0}; 1 \le v \le 2^{N-L_0}\}$, le processus $\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u D_{v(u,r)}^u(t); t \in [0,1]\}$ est un processus gaussien de covariance $4\sigma_D^2(t\wedge t' - tt')$ avec

$$\sigma_D^2 = \sum_{u=L_0}^{N-1}(c_r^u)^2\left(\frac{\Delta_{v(u,r)}^u - (\Delta_{w(u,r)}^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}\right)^2 + 2\sum_{u'>u} c_r^u c_r^{u'}\left(\frac{\Delta_{v(u,r)}^u - (\Delta_{w(u,r)}^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\Delta_{v(r,u')}^{u'} - (\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}}\right)\frac{\delta_{w(u,r)}^{u+1}}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}}$$

car si $u' > u$ alors $A_{w(u,r)}^{u+1} \subset A_{w(r,u')}^{u'+1}$. Utilisant $|ab| \le (a^2+b^2)/2$ on a:

$$\sum_{u'>u} c_r^u c_r^{u'}\left|\frac{\Delta_{v(u,r)}^u - (\Delta_{w(u,r)}^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}\right|\left|\frac{\Delta_{v(r,u')}^{u'} - (\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}}\right|\frac{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}{\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}}$$
$$\le \frac{1}{2}\sum_{u=L_0}^{N-1}(\theta_u + \tilde\theta_u)(c_r^u)^{3/2} \times \left|\frac{\Delta_{v(u,r)}^u - (\Delta_{w(u,r)}^{u+1}/2)}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}\right|^2$$

où θ_u, $\tilde\theta_u$ sont définis par

$$\theta_u = \sum_{u'>u}\sqrt{c_r^u}\frac{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}{\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}} \quad \text{et} \quad \tilde\theta_u = \sum_{u'<u}\sqrt{c_r^{u'}}\frac{\sqrt{\Delta_{w(r,u')}^{u'+1}}}{\sqrt{\Delta_{w(u,r)}^{u+1}}}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

avec les conventions $\theta_{N-1} = \tilde\theta_{L_0} = 0$. En séparant les sommes selon que $u' < L_1$ ou $u' \geq L_1$ on obtient $\theta_u, \tilde\theta_u \leq (\sqrt{3/2}+1)(\sqrt{2}+1)$ et donc sur $\Theta \cap \Theta_1(r)$ on a:

$$\sigma_D^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+1\Big)(\sqrt{2}+1)\right) \sum_{u=L_0}^{N-1} (c_r^u)^{3/2} \left(\frac{\Delta^u_{v(u,r)} - (\Delta^{u+1}_{w(u,r)}/2)}{\sqrt{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}}}\right)^2$$
$$\leq 9\big(x + D_4 \log(ma)\big).$$

De même, sur $\Theta \cap \Theta_1(r)$ et conditionnellement à $\{\Delta_v^{L_0}; 1 \leq v \leq 2^{N-L_0}\}$, $\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u {D'}^u_{v(u,r)}(t); t \in [0,1]\}$ est un processus gaussien plus simple à étudier que le précédent car pour tous couples (u,v), (u',v') distincts, les processus $\mathcal{J}_v^u$ et $\mathcal{J}_{v'}^{u'}$ sont des ponts browniens indépendants. La covariance de $\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u {D'}^u_{v(u,r)}(t); t \in [0,1]\}$ vaut $4\sigma^2_{D'}(t \wedge t' - tt')$ avec

$$\sigma^2_{D'} = \sum_{u=L_0}^{N-1} (c_r^u)^2 \frac{\Delta^u_{v(u,r)+1}}{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}} \left(\frac{\Delta^u_{v(u,r)} - (\Delta^{u+1}_{w(u,r)}/2)}{\sqrt{\Delta^u_{v(u,r)}} + \sqrt{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}/2}}\right)^2 \leq x + D_4 \log(ma).$$

Enfin, sur $\Theta \cap \Theta_2(r)$ et conditionnellement à $\{\Delta_v^{L_0}; 1 \leq v \leq 2^{N-L_0}\}$, $\{\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u {D''}^u_{v(u,r)}(t); t \in [0,1]\}$ est un processus gaussien de covariance $2\sigma^2_{D''}(t \wedge t' - tt')$ avec

$$\sigma^2_{D''} = \sum_{u=L_0}^{N-1} (c_r^u)^2 \left(\frac{\Delta^u_{v(u,r)} - 2^u}{\sqrt{\Delta^u_{v(u,r)}} + \sqrt{2^u}}\right)^2 \leq \frac{x + D_4 \log(ma)}{2}.$$

Il s'ensuit, par Kolmogorov, pour $D_4 \geq 162$,

$$P_D^1(r) + P^2_{D'}(r) + P^2_{D''}(r) \leq 6 \exp\big(-x/162 - \log(ma)\big).$$

Contrôle de $\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_1^c(r)\big)$ Le vecteur $(\Delta_v^{L_0}; 1 \leq v \leq 2^{N-L_0})$ suit la loi multinômiale $\mathcal{M}(2^N, 2^{L_0-N}, \dots, 2^{L_0-N})$. Or pour ce type de loi nous disposons du lemme de Tusnády (construction conditionnelle d'un vecteur multinômial) publié en [2] par Bretagnolle et Massart. Seule la première inégalité de ce lemme nous intéresse ici et nous l'énonçons de telle sorte qu'elle soit directement utilisable dans la suite.

Lemme 4.2 *Il existe des variables indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, notées $\{\xi^u_{v(u,r)}; L_0 \leq u \leq N-1\}$, telles que*

$$\left|\Delta^u_{v(u,r)} - \frac{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}}{2}\right| \leq 1 + \frac{\sqrt{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}}}{2} |\xi^u_{v(u,r)}|.$$

Pour des lois où aucune construction hongroise n'aurait été réalisée, il faudrait se contenter d'inégalités exponentielles du type Bernstein. Ici, nous obtenons

$$\sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u \left(\frac{\Delta^u_{v(u,r)} - (\Delta^{u+1}_{w(u,r)}/2)}{\sqrt{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}}} \right)^2 \le 2\Big(\sum_{u=L_0}^{N-1} \frac{c_r^u}{\Delta^{u+1}_{w(u,r)}} + \frac{1}{4} \sum_{u=L_0}^{N-1} c_r^u |\xi^u_{v(u,r)}|^2 \Big) \le 3 + \frac{Z}{4}$$

où Z est définie par

$$Z = \sum_{u=L_0}^{N-1} \gamma_r^u |\xi^u_{v(u,r)}|^2$$

avec $\gamma_r^u = 1$ si $u < L_1$ et $\gamma_r^u = (1/2)^{u-L_1}$ si $u \ge L_1$. Nous contrôlons $\mathbb{P}(Z \ge z)$ par l'inégalité de Cramer-Chernov:

Lemme 4.3 *Soient $\xi_1, \dots, \xi_d$ des variables indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des réels strictement positifs. On a:*

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^d \lambda_i \xi_i^2 \ge z \Big) \le \inf_{0<r<\inf_i 1/(2\lambda_i)} \exp\Big(-rz - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \ln(1 - 2\lambda_i r) \Big).$$

En prenant $r = 2/5$ et en utilisant $\ln(1-x) \ge -1.28x$ si $x \le 2/5$ on obtient, pour $D_4 \ge 5$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_1^c(r)\big) &\le \mathbb{P}\big(Z \ge 4x + 4(D_4 - 3)\log(ma)\big) \\ &\le \exp\Big(-\frac{2}{5}\big(4x + 4(D_4-3)\log(ma)\big) + (L_1 - L_0 + 1)\frac{\ln 5}{2} + 0.512 \Big) \\ &\le 1.67 \exp\big(-8x/5 - \log(ma)\big). \end{aligned}$$

Contrôle de $\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r)\big)$ Définissons l'événement $\Theta_3(r)$ par:

$$\Theta_3(r) = \left\{ |\Delta^u_{v(u,r)} - 2^u| \le \sqrt{2^u}\sqrt{2^{L_0}a} \times \frac{(u - L_1 + 1)}{7}; u \in \{L_1, \dots, N\} \right\}.$$

La fonction h définie dans le lemme 2.1 vérifie $h(t) \ge 3t^2/(6+2t)$ (c'est l'inégalité de Bernstein, voir par exemple Shorack et Wellner [8, p. 441]) que nous simplifions en $h(t) \ge (3/8)\inf(t, t^2)$. De là, pour $D_4 \ge 44$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(\Theta_3^c(r)\big) &\le \sum_{u=L_1}^{N} \exp\left(-\frac{3}{8} \times 2^{L_0} a \times \frac{(u - L_1 + 1)}{49} \right) \\ &\le 1.58 \exp\big(-x/44 - \log(ma)\big). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2002-018-3 Published online by Cambridge University Press

Contrôle de $\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r) \cap \Theta_3(r)\big)$ Nous séparons $\sum_{u=L_0}^{N-1}$ en $\sum_{u=L_0}^{L_1-1} + \sum_{u=L_1}^{N-1}$ avec la convention $\sum_{u=L_0}^{L_0-1} = \sum_{u=N}^{N-1} = 0$. Nous pouvons donc supposer $L_0 < L_1 < N$. Sur $\Theta_3(r)$ on a:

$$\sum_{u=L_1}^{N-1} c_r^u \left| \frac{\Delta_{v(u,r)}^u - 2^u}{\sqrt{2^u}} \right|^2 \leq \frac{2^{L_0} a}{49} \sum_{j \geq 1} j^2 2^{-j} \leq \frac{24}{49}\big(x + D_4 \log(ma)\big).$$

Si nous appliquons le même principe à $\sum_{u=L_0}^{L_1-1}$ nous perdons une puissance de $\log(ma)$. Nous utilisons une autre méthode. En écrivant Δ_v^u sous la forme $\langle (V_1, \dots, V_{2^N}) \mid e_v^u \rangle$ (rappelons que $N_j = \sum_{i=1}^j V_i$), et en développant e_v^u sur la base $\mathcal{B}$ on obtient:

$$\Delta_v^u = \Big(\sum_{u'=u}^{N-1} \frac{2^u}{2^{u'}} \tilde{\Delta}_{s(u', v2^u)}^{u'} \epsilon_{v2^u}^{u'} \Big) + 2^u,$$

où $s(u', v2^u)$ est l'unique entier impair tel que

$$v2^u \in \big] \big(s(u', v2^u) - 1\big) 2^{u'}, \big(s(u', v2^u) + 1\big) 2^{u'} \big],$$

où $\epsilon_{v2^u}^{u'}$ est un signe défini par

$$\epsilon_{v2^u}^{u'} = \begin{cases} +1 & \text{si } v2^u \in \big] \big(s(u', v2^u) - 1\big) 2^{u'}, s(u', v2^u) 2^{u'} \big] \\ -1 & \text{si } v2^u \in \big] s(u', v2^u) 2^{u'}, \big(s(u', v2^u) + 1\big) 2^{u'} \big], \end{cases}$$

et où $\tilde{\Delta}_{s(u', v2^u)}^{u'} = \langle \Delta_v^u \mid \tilde{e}_{s(u', v2^u)}^{u'} \rangle$. Pour simplifier quelque peu, remarquons que $s\big(u', v(u,r) 2^u\big) = v(u', r)$. Comme $u < L_1$ et $v(u', r) = 1$ pour $u' \geq L_1$, nous pouvons écrire

$$\Delta_{v(u,r)}^u - 2^u = \Big(\sum_{u'=u}^{L_1-1} \frac{2^u}{2^{u'}} \tilde{\Delta}_{v(u',r)}^{u'} \epsilon_{v(u,r)2^u}^{u'} \Big) + \frac{2^u}{2^{L_1}} (\Delta_1^{L_1} - 2^{L_1})$$

et donc, en utilisant $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, sur $\Theta_3(r)$,

$$\begin{aligned} \sum_{u=L_0}^{L_1-1} c_r^u \left| \frac{\Delta_{v(u,r)}^u - 2^u}{\sqrt{2^u}} \right|^2 &\leq 2 \sum_{u=L_0}^{L_1-1} \frac{1}{2^u} \Big(\sum_{u'=u}^{L_1-1} \frac{2^u}{2^{u'}} |\tilde{\Delta}_{v(u',r)}^{u'}| \Big)^2 + 2 \sum_{u=L_0}^{L_1-1} \frac{2^u}{2^{L_1}} \left| \frac{\Delta_1^{L_1} - 2^{L_1}}{\sqrt{2^{L_1}}} \right|^2 \\ &\leq \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} \sum_{u'=L_0}^{L_1-1} \frac{1}{2^{u'}} |\tilde{\Delta}_{v(u',r)}^{u'}|^2 + \frac{12}{49}\big(x + D_4 \log(ma)\big). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r) \cap \Theta_3(r)\big) \leq \mathbb{P}\Big(12 \sum_{u'=L_0}^{L_1-1} \frac{1}{2^{u'}} |\tilde{\Delta}_{v(u',r)}^{u'}|^2 \geq \frac{1}{4}\big(x + D_4 \log(ma)\big) \Big),$$

et donc, par le lemme 4.2,

$$\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r) \cap \Theta_3(r)\big) \le \mathbb{P}\Big(Z \ge \frac{4}{3} \times \frac{1}{96}\big(x + (D_4 - 96)\log(ma)\big)\Big)$$

où Z suit la loi du chi-deux à $L_1 - L_0$ degrés de liberté. Le lemme 4.3 permet de conclure, pour $D_4 \ge 694$,

$$\mathbb{P}\big(\Theta \cap \Theta_2^c(r) \cap \Theta_3(r)\big) \le \exp\big(-x/180 - \log(ma)\big).$$

Je remercie Jean Bretagnolle et Emmanuel Rio pour leur écoute attentive et leur disponibilité.

Références

[1] G. Bennett, *Probability inequalities for the sum of independants random variables.* J. Amer. Statist. Assoc. **57**(1962), 33–45.

[2] J. Bretagnolle et P. Massart, *Hungarian constructions from the non asymptotic view point.* Ann. Probab. **17**(1989), 239–256.

[3] N. Castelle et F. Laurent-Bonvalot, *Strong approximations of bivariate uniform empirical processes.* Ann. Inst. Henri Poincaré Prob. Stat. **34**(1998), 425–480.

[4] M. Csörgő et P. Revesz, *Strong approximations in probability and statistics.* Academic Press, New York, 1981.

[5] M. Csörgő et L. Horváth, *Weighted approximations in probability and statistics.* Wiley & Sons, 1993.

[6] J. Komlós, P. Major et G. Tusnády, *An approximation of partial sums of independent RV′- and the sample D. F. I.* Z. Warsch. verw. Gebiete **32**(1975), 111–131.

[7] D. Mason et R. van Zwet, *A refinement of the KMT inequality for the uniform empirical process.* Ann. Probab. **15**(1987), 871–884.

[8] G. R. Shorack et J. A. Wellner, *Empirical processes with applications to statistics.* Wiley & Sons, 1986.

[9] A. V. Skorohod, *On a representation of random variables.* Theory. Probab. Appl. **21**(1976), 628–632.

[10] G. Tusnády, *A remark on the approximation of the sample D.F. in the multidimensional case.* Period. Math. Hungar. **8**(1977), 53–55.

[11] ———, *A Study of Statistical Hypotheses.* Dissertation, The Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1977.

[12] J. Wellner, *Limit theorems for the ratio of the empirical distribution function to the true distribution function.* Z. Warsch. verw. Gebiete. **45**(1978), 73–88.

Laboratoire de Mathématiques—UMR 8628
Bât. 425
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
email: Nathalie.Castelle@math.u-psud.fr