Canad. Math. Bull. Vol. **20** (3), 1977

INSTABILITÉ DES CORPS FORMELLEMENT RÉELS

BY
JEAN-LOUIS DURET

$\|A\|$ désignera le cardinal de A. Soient T une théorie complète du premier ordre dans un langage dénombrable, M un modèle de T, X un sous-ensemble de M; soit $T(X)$ l'ensemble des formules closes à paramètres dans X satisfaites par M; on appelle n-type de T sur X un ensemble consistant avec $T(X)$ et maximal de formules à paramètres dans X à n variables libres. Soit $S_n(X)$ l'ensemble des n-types de T sur X. Soit λ un cardinal; on dit que T est λ-stable si et seulement si, pour tout modèle M de T, pour tout sous-ensemble X de M, pour tout $n \in \omega$, $\|X\| \leq \lambda$ implique $\|S_n(X)\| \leq \lambda$. Une théorie est dite stable si et seulement si elle est stable pour un certain cardinal; instable sinon (Shelah [6]). Soit M une structure; nous dirons que M est instable (resp. stable) si et seulement si la théorie de M est instable (resp. stable).

Nous prenons comme définition de pseudo-anneau, anneau, pseudo-anneau ordonné et anneau ordonné, les définitions de N. Bourbaki livre II. En particulier, un anneau est un pseudo-anneau ayant un élément unité.

On sait (Shelah [6]) que, s'il existe une formule $\phi(x, y)$ et une suite infinie $(a_n)_{n\in\omega}$ d'éléments de M telle que:

$$M \models \phi[a_n, a_m] \Leftrightarrow n < m$$

alors M est instable. Il en résulte qu'une structure infinie totalement ordonnée (c'est-à-dire, dont le langage contient une relation d'ordre total) est instable. On peut se demander si une structure ordonnable est toujours instable. Comme tout groupe abélien est stable (Berthier [3]), on voit qu'il y a des groupes ordonnables stables. Nous montrerons que la situation est différente pour les anneaux.

Etant donné un pseudo-anneau A, $\leq$ est un ordre sur A si et seulement si $\leq$ est une relation d'ordre total sur A compatible avec l'addition et telle que:

$$(\forall x \in A) \qquad (\forall y \in A) \qquad (x \geq 0 \quad \text{et} \quad y \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq 0)$$

Il y a des exemples de pseudo-anneau ordonnable stable et de pseudo-anneau ordonnable instable. Soit, en effet, $(G, +, \leq)$ un groupe abélien ordonné; le pseudo-anneau $(G, +, .)$ où . est la multiplication nulle $(\forall x\, \forall y\ (xy = 0))$ est

Received by the editors September 20, 1976.

ordonnable et stable puisque $(G, +)$ l'est. D'autre part, Baer [2] a démontré:

THÉORÈME. *Soit A un pseudo-anneau tel que toute suite décroissante d'idéaux principaux à gauche (i.e. de la forme Au) et toute suite décroissante d'idéaux principaux à droite (i.e. de la forme uA) soit stationnaire, alors A est un anneau si et seulement si A contient un élément non diviseur de 0 à droite et un élément non diviseur de 0 à gauche.*

Un pseudo-anneau stable satisfait les hypothèses de ce théorème (Felgner [4]) et donc, un pseudo-anneau stable est un anneau si et seulement si il contient un élément non diviseur de 0 à droite et un élément non diviseur de 0 à gauche. Donc, les sous-pseudo-anneaux de $\mathbb{Z}$, $k\,\mathbb{Z}(k \neq 1)$ sont instables, et ordonnables.

Nous allons maintenant établir notre résultat principal:

THÉORÈME. *Soit un anneau non trivial, A, tel qu'il existe une relation d'ordre total, $\leqslant$, compatible avec $+$, et telle que:*

$$(\forall x \in A) \qquad (\forall y \in A) \qquad (x \geqslant 0 \quad et \quad y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0)$$

Alors, A est instable.

Démonstration. L'application $\mathbb{Z} \to A$; $n \mapsto n1$ est un homomorphisme d'anneaux, injectif car l'ordre est compatible avec $+$. Soit $\phi(x, y)$ la formule:

$$(\exists t, u, v, w) \qquad (y = x + t^2 + u^2 + v^2 + w^2) \wedge (x \neq y)$$

et la suite $(n1)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors:

$$M \Vdash \phi[n1, m1] \Leftrightarrow n < m$$

En effet, si $n < m$, $m - n$ est somme de 4 carrés (théorème de Lagrange), donc $m1 - n1$ l'est aussi. Réciproquement, supposons $M \vDash \phi[n1, m1]$; d'une part, comme $\leqslant$ est un ordre total, tout carré (et donc toute somme de carrés) est positif; donc $(n-m)1 \leqslant 0$; d'où $n \leqslant m$, car sinon $(n-m)1$ est la somme de $(n-m)$ éléments positifs (égaux à 1), et donc $(n-m)1 \geqslant 0$; d'autre part $n1 \neq m1$, donc $n \neq m$; en définitive $n < m$.

COROLLAIRE. *Les corps formellement réels sont instables.*

On peut améliorer ces résultats en utilisant la démonstration par Hilbert de la conjecture de Waring: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $g(k) \in \mathbb{N}$, tel que tout élément de $\mathbb{N}$ est somme des puissances $k^{\text{ème}}$ de $g(k)$ éléments de $\mathbb{N}$. La démonstration du théorème avec la formule:

$$(\exists u_1, \ldots, u_{g(k)}) \qquad \left(y = x + \sum_{i=1}^{g(k)} u_i^k\right) \wedge (x \neq y)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-057-2 Published online by Cambridge University Press

donne la proposition:

PROPOSITION. *Soit A un anneau stable de caractéristique* 0, *et $k \in \mathbb{N}$ pair. Il existe un entier strictement négatif qui est somme des puissances $k^{\text{ème}}$ de $g(k)$ éléments de A.*

Les corps formellement réels ne sont évidemment pas les seuls corps instables; en voici un autre exemple:

PROPOSITION. *Soit $K((X))$ le corps des séries formelles sur le corps commutatif K; $K((X))$ est instable.*

Démonstration. En effet, James Ax [1] a donné une formule qui définit $K[[X]]$ (anneau des séries formelles) dans $K((X))$. Or, $K[[X]]$ est un anneau intègre qui n'est pas un corps, et est donc instable (Felgner [4]).

Shelah [7] a observé que la stabilité des corps différentiels clos fournit des exemples de corps non algébriquement clos et stables de caractéristique non nulle. Nous ignorons s'il existe de tels exemples en caractéristique zéro. Il est tentant d'en chercher parmi les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$. Julia Robinson [5] a démontré que si K est une extension de dimension finie de $\mathbb{Q}$, il existe une formule qui définit $\mathbb{Q}$ dans K et donc K est instable. Cette remarque et les considérations sur le problème de Waring conduisent à étudier la stabilité du corps des nombres qui s'écrivent par radicaux.

REFERENCES

1. James Ax, *On the undecidability of power series fields*, Proc. Am. Math. Soc. **16**^{2} (1965) 846.
2. Reinhold Baer, *Inverses and zero-divisors*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942) 630–638.
3. Daniel Berthier, *Stability of non-model-complete theories; products, groups*, J. London Math. Soc. **(2) 11** (1975) 453–464.
4. Ulrich Felgner, *$\aleph_1$-kategorische Theorien nicht-kommutativer Ringe*, Fundamenta Mathematicae **LXXXII** (1975) 331–346.
5. Julia Robinson, *Definability and decision problems in arithmetic*, J. S. L. **14** (1949).
6. Saharon Shelah, *Stability, the f.c.p., and superstability; model theoretic properties of formulas in first order theory*, Ann. Math. Logic **(3) 3** (1971) 271–362.
7. Saharon Shelah, *Differentially closed fields*, Israël J. of Math. **16** (1973) 314–328.

UNIVERSITÉ D'ANGERS
FACULTÉ DES SCIENCES
BOULEVARD LAVOISIER
49045 ANGERS CEDEX

https://doi.org/10.4153/CMB-1977-057-2 Published online by Cambridge University Press