Composito Mathematica **123:** 89–115, 2000. 89

Calculs de facteurs epsilon de paires sur un corps local, II*

(*Calculations of epsilon factors of pairs for GL(n) of a local field*)

COLIN J. BUSHNELL[1] et GUY HENNIART[2]
[1]*Department of Mathematics, King's College, Strand, London WC2R 2LS, U.K. e-mail: bushnell@mth.kcl.ac.uk*
[2]*Département de Mathématiques & UMR 8628 du CNRS, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France. e-mail: Guy.Henniart@math.u-psud.fr*

(Received: 5 January 1999; in final form: 22 July 1999)

Abstract. Let F a locally compact non-Archimedean field, of residue characteristic p, and ψ a nontrivial additive character of F. Let σ, σ' be irreducible representations of the absolute Weil group of F, each of degree a power of p and not induced from a nontrivial unramified extension of F. We give a formula for the value at $s = \frac{1}{2}$ of the ϵ-factor $\epsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s)$, modulo roots of unity in $\mathbb{C}$ of order a power of p. Via the Langlands correspondence, we get an analogous formula for supercuspidal representations of $\mathrm{GL}_n(F)$.

Mathematics Subject Classifications (2000). 22E50.

Key words: local fields, Langlands correspondence, epsilon factors

1. Introduction

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, et soit $\overline{F}$ une clôture séparable algébrique de F; notons p la caractéristique résiduelle de F. Parmi les représentations (complexes) irréductibles du groupe de Weil W_F de $\overline{F}$ sur F, les plus difficiles à étudier et à comprendre sont celles dont la restriction au sous-groupe de ramification sauvage P_F de W_F est encore irréductible. Dans cet article, nous prenons deux telles représentations σ et σ' et nous voulons contrôler le facteur $\epsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s)$ relatif au choix d'un caractère additif non trivial ψ de F et au choix (non indiqué dans la notation) de la mesure de Haar sur F autoduale pour ψ. Plus précisément, notre but est de calculer la valeur $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma') = \epsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, \frac{1}{2})$, modulo le groupe μ des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ d'ordre une puissance de p (cf. [11]).

*Ce travail a été en partie subventionné par le réseau européen TMR 'Arithmetical Algebraic Geometry'.

1.2. Si τ est une représentation de W_F, sans constituant modéré, il existe un élément $c_\tau = c(\tau, \psi)$ de $F^\times$, bien défini modulo U_F^1, tel que l'on ait

$$\epsilon(\chi \otimes \tau, \psi, s) = \chi(c_\tau)^{-1}\epsilon(\tau, \psi, s)$$

pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$ [7]. (Nous identifions quasicaractères de W_F et quasicaractères de $F^\times$ par la théorie du corps de classes.)

Posons $C_F = F^\times/U_F^1$, et définissons la fonction $G_F : C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \to \mathbb{C}^\times$ par les formules de [11] §2 (cf. 3.6 ci-dessous); les valeurs de G_F sont toujours égales à 1 pour $p = 2$, et sont données par des calculs de sommes de Gauss pour p impair.

Si τ est une représentation de W_F dont la restriction à P_F est irréductible, de sorte qu'en particulier sa dimension d est une puissance de p, on a d'après [11], §5, Cor. 2

$$\epsilon'(\tau) \equiv \det \tau(c_\tau)^{-1/d} G_F(c_\tau)^d \pmod{\mu}.$$

Nous voudrions trouver une formule analogue quand τ est le produit tensoriel de deux représentations σ et σ' de W_F dont la restriction à P_F est irréductible. Le problème est que τ sera en général réductible et que les arguments de [11] ne peuvent s'appliquer directement.

1.3. La question est bien sûr différente selon que $\tau = \sigma \otimes \sigma'$ a un constituant modéré ou pas. Le premier cas se présente quand les restrictions à P_F de $\sigma^\vee$ et σ' sont isomorphes, ce qui équivaut à dire que σ' est de la forme $\chi \otimes \sigma^\vee$ pour un quasicaractère modéré χ de $F^\times$. En [1] nous avons prouvé la formule

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee) = \det \sigma(-1)^{\dim \sigma - 1},$$

de sorte qu'on obtient aisément $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')$ (cf. §2.3).

Le cas complémentaire est le plus intéressant.

THÉORÈME. *Soient σ et σ' deux représentations de W_F dont les restrictions à P_F sont irréductibles et non contragrédientes l'une de l'autre, et posons $\tau = \sigma \otimes \sigma'$, $d = \dim \tau$. Alors on a*

$$\epsilon'(\tau) \equiv \det \tau(c_\tau)^{-1/d} G_F(c_\tau)^d \pmod{\mu}.$$

1.4. Le résultat précédent prend son intérêt en vue de la conjecture de Langlands pour GL_n. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, notons $\mathcal{G}_F^0(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de degré n de W_F, et $\mathcal{A}_F^0(n)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathrm{GL}_n(F)$. Il s'agit de construire pour chaque n une bijection $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathcal{G}_F^0(n)$ sur $\mathcal{A}_F^0(n)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) Le déterminant $\det \sigma$ de σ correspond au caractère central $\omega_{\pi(\sigma)}$ de $\pi(\sigma)$ via la théorie du corps de classes; avec nos conventions cela s'écrit $\det \sigma = \omega_{\pi(\sigma)}$ pour $\sigma \in \mathcal{G}_F^0(n)$.

(b) L'application π est compatible au passage aux contragrédientes:

$$\pi(\sigma^\vee) = \pi(\sigma)^\vee \text{ pour } \sigma \in \mathcal{G}_F^0(n).$$

(c) L'application π préserve les facteurs L et ϵ de paires: pour $\sigma \in \mathcal{G}_F^0(n)$ et $\sigma' \in \mathcal{G}_F^0(n')$, on a

$$L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), s)$$

$$\epsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s) = \epsilon(\pi(\sigma) \times \pi(\sigma'), \psi, s),$$

où les facteurs L et ϵ de droite sont ceux définis par Jacquet, Piatetski–Shapiro et Shalika [14] (voir aussi [18, 19]).

1.5. On sait qu'il existe au plus un tel système de bijections de $\mathcal{G}_F^0(n)$ sur $\mathcal{A}_F^0(n)$ [12].

Quand F est de caractéristique p, la conjecture de Langlands, i.e. l'existence d'un tel système, a été prouvée par Laumon, Rapoport et Stuhler [15]. Dans le cas où F est de caractéristique zero, une preuve de cette conjecture a été annoncée récemment par Harris et Taylor [10] (voir aussi [8] et [9]). Une démonstration plus simple est donnée dans [14]. Le Théorème 1.3 implique donc des propriétés analogues des facteurs epsilon de paires pour GL_n.

Le plus important de ces résultats s'énonce de la façon suivante. Soient $\pi \in \mathcal{A}_F^0(d)$ et $\pi' \in \mathcal{A}_F^0(d')$, où d et d' sont des puissances de p. Supposons que pour tout quasicaractère non ramifié non trivial χ de $F^\times$ la représentation π ne soit pas équivalente à $(\chi \circ \det) \otimes \pi$, ni π' `a $(\chi \circ \det) \otimes \pi'$. Deux cas se présentent, selon qu'il existe ou non un quasicaractère modéré χ de $F^\times$ tel que $\pi' \cong (\chi \circ \det) \otimes \pi^\vee$. Dans le premier cas, on a prouvé [1] la formule

$$\epsilon'(\pi \otimes \pi^\vee) = \omega_\pi(-1)^{d-1}$$

et on en tire facilement $\epsilon'(\pi \otimes \pi')$.

Dans le second, nous avons le théorème suivant, conséquence immédiate du Théorème 1.3 et de la conjecture de Langlands.

THÉORÈME. *Soient $\pi \in \mathcal{A}_F^0(d)$, $\pi' \in \mathcal{A}_F^0(d')$, où d et d' sont des puissances de p. Supposons que pour tout quasicaractère non ramifié non trivial χ de $F^\times$ on ait $(\chi \circ \det) \otimes \pi \not\cong \pi$ et $(\chi \circ \det) \otimes \pi' \not\cong \pi'$, et que pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$ on ait $(\chi \circ \det) \otimes \pi^\vee \not\cong \pi'$. Alors il existe un élément $c_{\pi\times\pi'}$ de $F^\times$, bien défini modulo U_F^1, tel qu'on ait*

$$\epsilon((\chi \circ \det) \otimes \pi \times \pi', \psi, s) = \chi(c_{\pi\times\pi'})^{-1} \epsilon(\pi \times \pi', \psi, s),$$

pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$, et on a

$$\epsilon(\pi \times \pi', \psi, \tfrac{1}{2}) \equiv \omega_\pi^{d'} \omega_{\pi'}^{d} (c_{\pi\times\pi'})^{-1/dd'} G_F(c_{\pi\times\pi'})^{dd'} \pmod{\mu}.$$

1.6. Les méthodes de [10], [13] sont de nature globale et géometrique. Une autre approche, due aux auteurs, est de nature plus locale et plus explicite, mais n'a pas donné pour l'instant le résultat complet. Nous avons défini dans [2] des applications $\mathcal{G}_F^0(n) \to \mathcal{A}_F^0(n)$ dans le cas (le plus difficile) où n est une puissance de p. La préservation des facteurs epsilon de paires par ces applications n'est pas encore connue. Mais nous avons des renseignements partiels. Si les applications de [2] satisfont une certaine relation 'de Davenport-Hasse' pour les facteurs epsilon de paires, alors elles redonnent la correspondance de Langlands [3]. De plus, dans l'article préliminaire [4] nous avons montré que la relation de Davenport-Hasse et le Théorème 1.5 impliquent, *sans recours à* [10] ou [13], la préservation des facteurs epsilon de paires pour les applications de [2]. Donc une démonstration directe du Théorème 1.5 donnerait une preuve locale de la conjecture de Langlands pour GL_n sur F, quand n est une puissance de p.

1.7. La majeure partie de l'article est consacrée à la démonstration du Théorème 1.3. La difficulté, déjà signalée, est que la représentation $\sigma \otimes \sigma'$ est en général réductible. Même pis, ses composants irréductibles auront en général des pentes (de ramification) différentes, de sorte que $\sigma \otimes \sigma'$ n'est pas homogène au sens de [11] §1, ce qui interdit tout recours direct à [11].

On est en fait amené à considérer la restriction de σ et σ' aux sous-groupes de ramification de W_F. Même si ce n'est pas indispensable, il est commode de se ramener, par torsion par un quasicaractère non ramifié, au cas où σ et σ' se factorisent toutes deux par le groupe de Galois G d'une extension finie galoisienne E de F dans $\overline{F}$. On note alors i le plus petit entier tel que les restrictions de $\sigma^\vee$ et σ' au sous-groupe de ramification G_i de G aient un constituant commun.

1.8. On utilise alors la théorie de Clifford relative au sous-groupe distingué G_i de G; les représentations σ et σ' sont induites de représentations S et S' d'un sous-groupe H de G contenant G_i, les restrictions de $S^\vee$ et S' à G_i étant isotypiques de même type. On contrôle le facteur $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')$ en termes de $\epsilon'(S \otimes S')$ de la façon suivante. Tout d'abord on utilise l'inductivité des facteurs ϵ en degré 0 en calculant plutôt $\epsilon'(\sigma \otimes (d\sigma' - d'\sigma^\vee))$, où $d = \dim \sigma$ et $d' = \dim \sigma'$: comme d et d' sont des puissances de p et que $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee) = \omega_\sigma(-1)^{d-1}$, cela permet de calculer $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma') \pmod{\mu}$ en termes de $\epsilon'(S \otimes S')$ et de termes complémentaires, qui sont en fait contrôlés par la constante c_ρ mentionnée plus haut, où ρ est la représentation sans constituant modéré de W_F telle que $\mathrm{Ind}_H^G 1 = 1 \oplus \rho$. Tout cela est effectué au §4⋆

⋆Nous remercions le rapporteur pour une remarque qui a simplifié la preuve de 4.10–4.13.

1.9. Au §3, nous calculons la classe de c_ρ dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quand p est impair. Cela nous permet, au §4, de nous ramener au cas où $H = G$, i.e. où les restrictions à G_i de σ et σ' sont isotypiques (le cas $p = 2$ est plus direct).

Le raisonnement du §3 est en fait plus général, et complète des arguments de [1], où nous avions calculé $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee)$ en voyant $\sigma \otimes \sigma^\vee$ comme une représentation orthogonale.

THÉORÈME. *Supposons p impair. Soit τ une représentation orthogonale de W_F, de déterminant trivial et de dimension paire, et soit ω un caractère quadratique de $F^\times$. Alors on a $\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \epsilon'(\tau)\,\omega(-1)^{\dim \tau/2}$.*

Ce résultat (Théorème 3.1) est appliqué à $\tau = \rho \oplus 1 \oplus \det \rho$ pour calculer c_ρ en 3.4–3.6.

1.10. Un raisonnement analogue à celui esquissé plus haut nous permet même (en 4.14–4.15) de nous ramener au cas où les restrictions à G_i de $\sigma^\vee$ et σ' sont sommes d'un même caractère: autrement dit, les images $\sigma(G_i)$ et $\sigma'(G_i)$ sont centrales. Les restrictions à G_{i-1} de σ et σ' sont alors sommes de représentations irréductibles de type Heisenberg. On applique à nouveau, au §5, les propriétés d'inductivité des facteurs epsilon, ce qui donne enfin le théorème.

Remarque. Cet article est le deuxième d'une courte série. Le premier article de cette série [1] est intitulé "Calculs de facteurs epsilon de paires pour GL_n sur un corps local, I". Mais en fait cet article peut aussi être considéré comme la suite de l'article [11], lui-même explorant plus avant le thème de [7].

2. Notations et Rappels

2.1. Comme dans l'introduction, nous fixons un corps commutatif localement compact F, une clôture séparable algébrique $\overline{F}$ de F, et un caractère additif non trivial ψ de F. Nous notons p la caractéristique résiduelle de F.

Soit K une extension finie de F dans $\overline{F}$; nous utiliserons les notations traditionnelles: $\mathfrak{o}_K$ pour l'anneau des entiers, $\mathfrak{p}_K$ son idéal maximal, q_K le cardinal de $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$. On note W_K le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur K et ψ_K le caractère additif non trivial $\psi \circ \mathrm{tr}_{K/F}$ de K. Si τ est une représentation⋆ (complexe) semisimple⋆⋆ de W_K, on note $\epsilon'(\tau)$ la valeur en $s = \frac{1}{2}$ de $\epsilon(\tau, \psi_K, s)$, où ce facteur epsilon est celui relatif au choix de la mesure de Haar sur K autoduale pour ψ_K [20]: ainsi ψ_K et cette mesure de Haar sont considérés comme fixés.

⋆Dans cet article, quand nous écrirons une *égalité* de deux représentations cela signifiera, selon un usage courant, que ces deux représentations sont *isomorphes.*

⋆⋆Beaucoup des considérations de cet article pourraient s'étendre à des représentations Φ-semisimples du groupe de Weil-Deligne de $\overline{F}$ sur F. Nous laissons au lecteur le soin de ces généralisations: nous n'en avons pas l'usage pour le moment.

On note P_K le sous-groupe de ramification sauvage de W_K, et on dit que τ est modérée (resp˙ sans constituant modéré) si sa restriction à P_K est triviale (resp. ne contient pas le caractère trivial). Si τ est sans constituant modéré, il existe un élément $c_\tau \in K^\times$, bien défini modulo U_K^1, tel qu'on ait [7]

$$\epsilon(\chi \otimes \tau, \psi_K, s) = \chi^{-1}(c_\tau)\,\epsilon(\tau, \psi_K, s) \tag{2.1.1}$$

pour tout quasicaractère modéré χ de C_K. (Ici, et dans toute la suite nous *identifions* quasicaractères de $K^\times$ et de W_K par la théorie du corps de classes, en normalisant celle-ci de sorte que les substitutions de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes; on notera 1_K le quasicaractère trivial de $K^\times$ ou W_K). On pose $C_K = K^\times/U_K^1$, de sorte qu'on peut voir aussi c_τ comme un élément de C_K ou $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$. On aura à utiliser la fonction $G_K : C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \to \mathbb{C}^\times$ définie dans [11] §2. La définition précise sera rappelée en 3.6.

2.2. On note μ le groupe des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$ d'ordre une puissance de p.

On note $\lambda(\tau)$ et on appelle *pente* (de ramification) de τ l'infimum des nombres réels $\alpha > 0$ tels que τ soit trivial sur le sous-groupe de ramification W_F^α de W_F. Nous aurons à nous servir du résultat suivant [11], §5, Cor. 3.

PROPOSITION. *Soient σ et τ des représentations semisimples de W_K. On suppose que tout composant irréductible de τ a une pente strictement supérieure À $\lambda(\sigma)$. Alors on a*

$$\epsilon'(\sigma \otimes \tau) \equiv \det \sigma(c_\tau)^{-1} \epsilon'(\tau)^{\dim \sigma} \pmod{\mu}.$$

De [11] §5 Cor. 2 découle immédiatement:

COROLLAIRE. *Supposons τ sans constituant modéré. Alors $\sigma \otimes \tau$ l'est aussi et on a $c_{\sigma\otimes\tau} = c_\tau^{\dim \sigma}$ dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$.*

2.3. Pour finir, rappelons un des résultats principaux de [1].

PROPOSITION. *Soit σ une représentation semisimple de W_F. On a*

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee) = \det\, \sigma(-1)^{\dim\, \sigma - 1}.$$

Une conséquence en est le calcul de $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')$ dans le cas particulier mentionné en 1.3.

COROLLAIRE. *Supposons en outre que la restriction de σ à P_F est irréductible, et écrivons $\sigma \otimes \sigma^\vee = 1_F \oplus \rho$. Alors ρ est une représentation sans constituant modéré et on a, pour tout quasicaractère modéré χ de $F^\times$,*

$$\epsilon'(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma^\vee) = \epsilon'(\chi)\,\chi^{-1}(c_\rho)\,\det \sigma(-1)^{\dim \sigma - 1}.$$

Preuve du corollaire. La restriction à P_F de σ étant irréductible, celle de $\sigma \otimes \sigma^\vee$ ne contient qu'une fois le caractère trivial, et ρ est bien sans constituant modéré. On a $\sigma \otimes \sigma^\vee = 1_F \oplus \rho$ d'où $\sigma \otimes \chi \otimes \sigma^\vee = \chi \oplus (\chi \otimes \rho)$. Par suite on obtient

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee) = \epsilon'(1_F)\,\epsilon'(\rho) = \epsilon'(\rho),$$

et

$$\epsilon'(\sigma \otimes \chi \otimes \sigma^\vee) = \epsilon'(\chi)\,\epsilon'(\chi \otimes \rho).$$

La formule découle alors de la proposition et de (2.1.1) appliqué à ρ.

3. Représentations Orthogonales et Facteurs Epsilon

3.1. Dans ce paragraphe, nous donnons un complément à [1], concernant les représentations orthogonales de W_F; ce complément sera appliqué, aux paragraphes 4 et 5, à notre calcul de $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')$.

Soit τ une représentation semisimple complexe, voire même virtuelle, de W_F. On suppose que τ est orthogonale, de déterminant trivial. Alors la valeur $\epsilon'(\tau) = \epsilon(\tau, \psi, \frac{1}{2})$, qui ne dépend pas de ψ, vaut 1 ou -1 selon que la classe de Stiefel-Whitney $\mathrm{cl}(w^2(\tau))$ de τ dans $H^2(W_F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est triviale ou non. Cela découle de [6], Prop. 5.2 si τ est une représentation virtuelle de degré 0 et le cas général en résulte par ajout de multiples du caractère trivial [1], 2.1. Si F est de caractéristique 2, on a toujours $\epsilon'(\tau) = 1$.

Si ω est un caractère quadratique de W_F, alors $\omega \otimes \tau$ est encore une représentation orthogonale. On a $\det(\omega \otimes \tau) = \omega^{\dim \tau}$ et par suite $\omega \otimes \tau$ est de déterminant trivial si $\dim \tau$ est pair.

THÉORÈME. *Soit τ une représentation (complexe, virtuelle) orthogonale de W_F, de déterminant trivial et de dimension paire $n = 2m$. Soit ω un caractère quadratique de W_F. On a $\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \omega(-1)^m \epsilon'(\tau)$.*

Remarque. Si au contraire τ est de dimension impaire $n = 2m + 1$ on peut quand même calculer $\epsilon'(\omega \otimes \tau)$. On a en effet

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \frac{\epsilon'(\omega \otimes (\tau \oplus 1))}{\epsilon'(\omega)} = \omega(-1)^{m+1}\epsilon'(\tau)/\epsilon'(\omega)$$

par le théorème. Comme ω est quadratique, on a $\epsilon'(\omega)^2 = \omega(-1)$ d'où l'on tire la formule

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \epsilon'(\omega)^{\dim \tau}\epsilon'(\tau)$$

sans hypothèse sur la dimension de τ. (Attention, $\omega \otimes \tau$ n'est plus de déterminant trivial si $\dim \tau$ est impair, et on ne peut appliquer la formule à $\omega \otimes \tau$ au lieu de τ).

3.2. La démonstration du théorème 3.1 est assez courte, compte-tenu des résultats rappelés plus haut. Si d'abord F est de caractéristique 2, l'assertion est triviale. On suppose donc que tel n'est pas le cas. On se ramène aussitôt, par multiplicativité des classes de Stiefel-Whitney totales, au cas où τ est une représentation effective $\tau : W_F \to \mathrm{SO}(q)$, où q est une forme quadratique définie positive sur un espace vectoriel réel V de dimension finie paire $n = 2m$. Le revêtement $\mathrm{Spin}(q)$ de $\mathrm{SO}(q)$ donne via τ une classe α_τ dans $H^2(W_F, \{\pm 1\})$, qui s'identifie à $\mathrm{cl}(w^2(\tau))$. Il suffit donc de voir comment α_τ varie quand on tord τ par ω.

Notons j un relèvement dans $\mathrm{Spin}(q)$ de $-1 \in \mathrm{SO}(q)$. Si $x \in V$, on note encore x son image dans l'algèbre de Clifford $C(q)$. On a $jxj^{-1} = -x$ pour tout x dans V et en conséquence j appartient au centre de $\mathrm{Spin}(q)$. Par suite tordre τ par ω a pour effet d'ajouter à α_τ un élément qui ne dépend que de ω et non de τ. On peut donc prendre τ trivial pour effectuer le calcul, d'où le résultat.

3.3. Donnons deux conséquences du théorème 3.1. On suppose que p est impair. On fixe une représentation (effective) σ de W_F, dont la restriction à P_F est irréductible, et on prend pour τ la représentation de W_F telle que $\sigma \otimes \sigma^\vee = \tau \oplus 1$. Alors τ est une représentation orthogonale de déterminant trivial, et grâce à l'hypothèse sur σ, elle n'a pas de constituant modéré (cf. 2.3).

COROLLAIRE. *Supposons p impair. Soit σ une représentation de W_F telle que $\sigma|_{P_F}$ soit irréductible. Soit τ la représentation telle que $\sigma \otimes \sigma^\vee = \tau \oplus 1$. Alors l'élément c_τ est un carré dans C_F.*

Démonstration. Comme p est supposé impair, un caractère quadratique ω de W_F est modéré, et on a

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \omega(c_\tau)^{-1}\epsilon'(\tau)$$

par 2.1. Mais d'autre part la dimension de σ est une puissance de p, ce qui entraîne que celle de τ est multiple de 8. Le théorème 3.1 donne alors

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \epsilon'(\tau).$$

On a donc $\omega(c_\tau) = 1$ pour tout caractère quadratique ω de $F^\times$ d'où le résultat.

3.4. Le corollaire suivant du théorème 3.1 demande aussi que p soit impair. On considère une extension finie K de F, totalement sauvagement ramifiée; son degré d est donc une puissance de p. On note $\delta_{K/F}$ le déterminant de la représentation $\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F} 1_K$, c'est-à-dire la signature de la représentation de permutation de W_F sur W_F/W_K. On identifie $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec $F^\times/F^{\times 2}$, et on voit donc le discriminant $d_{K/F}$ de l'extension K/F comme un élément de $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; l'extension de F correspondant au caractère $\delta_{K/F}$ de $F^\times$ est ainsi, avec l'abus de notation habituel, $F(\sqrt{d_{K/F}})$.

Notons $\rho_{K/F}$ la représentation de degré $d-1$ de W_F telle que $\mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F} 1_K = 1_F \oplus \rho_{K/F}$. Alors $\rho_{K/F}$ est sans constituant modéré, et son déterminant est $\delta_{K/F}$. On note $c_{K/F}$ l'élément $c_{\rho_{K/F}}$ de C_F associé à $\rho_{K/F}$.

THÉORÈME. *Soit p impair, et soit K/F une extension finie, totalement sauvagement ramifiée. Avec les notations précédentes, $d_{K/F}$ est la classe dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de* $(-1)^{(d-1)/2} c_{K/F}$.

Remarque. Comme la dimension $d-1$ de $\rho_{K/F}$ est paire, la classe de $c_{K/F}$ dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne dépend pas du choix de ψ; bien entendu $d_{K/F}$ n'en dépend pas non plus.

3.5. Démontrons le théorème 3.4. Pour cela, on applique le théorème 3.1 à la représentation $\tau = \rho_{K/F} \oplus \delta_{K/F} \oplus 1_F$; elle est orthogonale, de déterminant trivial et de dimension paire $d+1$. On a $\epsilon'(\tau) = \epsilon'(\rho_{K/F})\epsilon'(\delta_{K/F})\epsilon'(1_F)$ et si ω est un caractère quadratique de $F^\times$,

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \epsilon'(\omega \otimes \rho_{K/F})\epsilon'(\omega\delta_{K/F})\epsilon'(\omega).$$

Par le théorème 3.1 on obtient

$$\epsilon'(\omega \otimes \tau) = \omega(-1)^{(d+1)/2}\epsilon'(\tau).$$

Mais on a aussi, par définition de $c_{K/F}$,

$$\epsilon'(\omega \otimes \rho_{K/F}) = \omega^{-1}(c_{K/F})\,\epsilon'(\rho_{K/F}).$$

On en déduit l'égalité

$$\omega((-1)^{(d+1)/2} c_{K/F}) = \frac{\epsilon'(\omega\delta_{K/F})\,\epsilon'(\omega)}{\epsilon'(\delta_{K/F})\,\epsilon'(1_F)}.$$

Si $\delta_{K/F} = 1_F$ cette égalité s'écrit

$$\omega((-1)^{(d+1)/2} c_{K/F}) = \omega(-1)$$

et on voit que $(-1)^{(d-1)/2} c_{K/F}$ est un carré dans $F^\times$, ce qui donne le résultat.

On peut donc supposer maintenant que $\delta_{K/F}$ est non trivial. Prenant $\omega = \delta_{K/F}$ on obtient

$$\delta_{K/F}((-1)^{(d+1)/2} c_{K/F}) = 1.$$

On a aussi bien sûr $\delta_{K/F}(-d_{K/F}) = 1$ puisque $-d_{K/F}$ est clairement une norme de $F(\sqrt{d_{K/F}})$.

Il suffit donc de prouver l'égalité de $\omega((-1)^{(d+1)/2} c_{K/F})$ et $\omega(-d_{K/F})$ pour un (quelconque) caractère quadratique non trivial ω de $F^\times$ distinct de $\delta_{K/F}$.

Supposons d'abord $\delta_{K/F}$ non ramifié; alors ω est ramifié et on a

$$\epsilon'(\omega\delta_{K/F}) = (-1)^{1+\nu}\epsilon'(\omega), \qquad \epsilon'(\delta_{K/F}) = (-1)^{\nu}$$

où ν (l'ordre de ψ, cf. 3.7) ne dépend que de ψ et on obtient donc

$$\omega((-1)^{(d+1)/2}c_{K/F}) = -\omega(-1).$$

Mais en ce cas $d_{K/F} = \xi F^{\times 2}$ où $\xi \in \mathfrak{o}_F^{\times}$ n'est pas un carré modulo $\mathfrak{p}_F$. On a donc $\omega(d_{K/F}) = \omega(\xi)$ et $\omega(\xi)$ vaut -1 car ω est ramifié donc $\omega|_{\mathfrak{o}_F^{\times}}$ est d'ordre exactement 2. On obtient bien l'égalité voulue.

Supposons enfin $\delta_{K/F}$ ramifié. Prenons ω non ramifié. On a alors

$$\epsilon'(\omega\delta_{K/F}) = (-1)^{1+\nu}\epsilon'(\delta_{K/F}) \qquad \epsilon'(\omega) = (-1)^{\nu}$$

et $\omega((-1)^{(d+1)/2}c_{K/F}) = -1$.

L'extension $F(\sqrt{d_{K/F}})/F$ est ramifiée et p est impair, donc la valuation de $d_{K/F}$ est impaire. On a donc aussi $\omega(-d_{K/F}) = -1$, ce qui prouve le théorème 3.4.

3.6. Il nous faut rappeler maintenant la définition (cf. [11] §2) de l'application $G_F : C_F \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$. Elle se factorise par le quotient $C_F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et nous la verrons comme une application, encore notée G_F, de $C_F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^{\times}$. Dans le cas $p = 2$, on a $G_F(x) = 1$, $x \in C_F$. Supposons donc p impair.

Nous notons $\nu = \nu_F$ l'ordre du caractère additif ψ, i.e le plus grand entier r tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^{-r}$. Nous notons aussi υ_F la valuation normalisée de F.

Soient $x \in F^{\times}$ et $\bar{x}$ sa classe dans $C_F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Si $\upsilon_F(x) + \nu_F$ est pair, on a $G_F(\bar{x}) = 1$. Si $\upsilon_F(x) + \nu_F$ est impair, on peut modifier x par un carré de sorte que $\upsilon_F(x) + \nu_F + 1 = 0$ et on a alors

$$G_F(\bar{x}) = q_F^{-1/2} \sum_{\xi} \psi(x\xi^2/2),$$

la somme portant sur un système de représentants de $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ dans $\mathfrak{o}_F$.

3.7. Terminons ce paragraphe par une application du théorème 3.4, qui nous servira au §4.

On conserve la situation du théorème 3.4. L'injection canonique de C_F dans C_K induit un isomorphisme de $C_F \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ sur $C_K \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ et donc aussi un isomorphisme de $C_F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $C_K \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par lequel nous identifions ces deux groupes. Il s'agit pour nous de comparer les applications G_F et G_K de $C_F \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}^{\times}$.

PROPOSITION. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$G_K(x) = G_F(c_{K/F}x), \qquad x \in C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

Soit ν_K l'ordre du caractère ψ_K; on sait qu'on a $\nu_K = e_{K/F}\nu_F + t_{K/F}$ où $t_{K/F}$ est l'exposant différental de K/F et $e_{K/F}$ son indice de ramification. On peut trouver un élément a de $K^\times$ de valuation $e_{K/F} - 1 - t_{K/F}$ dont la trace $\mathrm{tr}_{K/F}(a)$ vaille 1.

Soient $x \in F^\times$ et $\bar{x}$ sa classe dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $\upsilon_K(ax) + \nu_K + 1 = e_{K/F}(\upsilon_F(x) + \nu_F + 1)$ et par suite $\upsilon_K(ax) + \nu_K$ et $\upsilon_F(x) + \nu_F$ sont de même parité. En outre on a $\upsilon_K(ax) + \nu_K + 1 = 0$ si et seulement si $\upsilon_F(x) + \nu_F + 1 = 0$ et si tel est le cas on a (puisque K est totalement ramifiée sur F)

$$\sum_{\xi \in \mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K} \psi_K(ax\xi^2/2) = \sum_{\xi \in \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F} \psi_F(\mathrm{tr}_{K/F}(a)x\xi^2/2)$$

d'où $G_K(\overline{ax}) = G_F(\bar{x})$. Par ce qui précède, cette égalité est vraie pour tout $x \in F^\times$.

3.8. Il s'agit donc de relier a et $c_{K/F}$.

Soit ϖ une uniformisante de K et f le polynôme minimal de ϖ sur F. On sait, par les relations d'Euler [16], III §6 Lemme 2, qu'on peut prendre $a = \varpi^{d-1}/f'(\varpi)$ (on a $t_{K/F} = \upsilon_K(f(\varpi))$ et $e_{K/F} = d$). Mais par ailleurs, $d_{K/F}$ est la classe dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $(-1)^{d(d-1)/2}N_{K/F}(f'(\varpi))$. Puisque K/F est totalement sauvagement ramifiée la norme $N_{K/F}$ induit sur $C_K \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'élévation à la puissance d et comme d est impair on a dans $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'égalité de $(-1)^{(d-1)/2}d_{K/F}$ et de la classe de a, c'est-à-dire que la classe de a dans $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est autre que $c_{K/F}$!

La proposition découle alors de 3.7.

4. Premières Réductions

4.1. Dans ce paragraphe, nous commençons la preuve du théorème 1.3. Nous fixons donc deux représentations σ et σ' de W_F dont les restrictions à P_F sont irréductibles et non contragrédientes l'une de l'autre. Leur dimension est donc une puissance de p et si σ (ou σ') est induite à partir d'une extension finie K de F dans $\overline{F}$, alors K est *totalement sauvagement ramifiée* sur F. On pose $\tau = \sigma \otimes \sigma'$, $d = \dim \tau$, $c = c_\tau$.

Si l'on tord τ par un quasicaractère non ramifié χ, c n'est pas modifié, $\det \tau$ est multiplié par χ^d et $\epsilon'(\tau)$ par $\chi^{-1}(c)$; la formule à prouver n'a pas changé. On peut donc supposer, et nous le ferons, que σ et σ' se factorisent à travers le groupe de Galois G d'une extension finie galoisienne E de F dans $\overline{F}$; nous considérerons aussi σ et σ' comme des représentations de G.

Faisons usage maintenant de la filtration de G par ses sous-groupes de ramification. Les restrictions à G_1 de σ et $\sigma'^\vee$ sont irréductibles et inéquivalentes. Nous notons i le plus petit entier tel que les restrictions à G_i de σ et $\sigma'^\vee$ aient un constituant commun; on a donc $i > 1$.

4.2. Fixons un tel constituant ρ, et notons H le stabilisateur de ρ dans G, et K le sous-corps de E fixé par H. Alors σ est induite de la représentation S de H sur le composant isotypique de $\sigma|_{G_i}$ de type ρ, et de même σ' est induite de la représentation S' de H sur le composant isotypique de $\sigma'|_{G_i}$ de type $\rho^\vee$. On a donc

$$\sigma \otimes \sigma' = \mathrm{Ind}_H^G((S \otimes S') \oplus U'),$$

$$\sigma \otimes \sigma^\vee = \mathrm{Ind}_H^G((S \otimes S^\vee) \oplus U)$$

où U' et U sont des représentations de H que nous identifierons plus loin (en 4.8). En tout cas elles sont sans constituant modéré puisque leur restriction à G_i ne contient pas le caractère trivial.

4.3. Notons e le degré de K/F qui est totalement sauvagement ramifiée, de sorte que $e = e_{K/F} = [K : F]$ est une puissance de p. Notons s et s' les dimensions respectives de S et S': ce sont aussi des puissances de p. On a

$$\sigma \otimes (s\sigma' - s'\sigma^\vee) = \mathrm{Ind}_H^G((S \otimes (sS' - s'S^\vee)) + (sU' - s'U))$$

cette égalité étant considérée dans le groupe de Grothendieck des représentations de G, sommes, différences et produits tensoriels étant pris dans les groupes de Grothendieck.

Par inductivité en degré 0 des facteurs epsilon, on obtient

$$\frac{\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')^s}{\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee)^{s'}} = \frac{\epsilon'(S \otimes S')^s}{\epsilon'(S \otimes S^\vee)^{s'}}\, \epsilon'(sU' - s'U),$$

les facteurs ϵ' de droite, bien entendu, étant relatifs au corps de base K.

Par le résultat rappelé en 2.3, on a

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma^\vee) \equiv 1 \pmod{\mu}, \qquad \epsilon'(S \otimes S^\vee) \equiv 1 \pmod{\mu}.$$

On peut contrôler aussi le facteur $\epsilon'(sU' - s'U)$.

PROPOSITION. *On a $c_U^{1/s} = c_{U'}^{1/s'}$ dans $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ et*

$$\epsilon'(sU' - s'U) \equiv \det(S \otimes S')(c_{U'})^{-1/s'} \pmod{\mu}.$$

4.4. Admettons pour l'instant cette proposition, qui sera prouvée à la fin de ce paragraphe.

On a donc

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma') \equiv \epsilon'(S \otimes S') \det(S \otimes S')(c_{U'}^{1/ss'})^{-1} \pmod{\mu}. \tag{4.4.1}$$

La représentation $\mathrm{ad}(\sigma) = \sigma \otimes \sigma^\vee - 1_F$ est sans constituant modéré, et il en est de même de $\mathrm{ad}(S) = S \otimes S^\vee - 1_K$. D'ailleurs on a $\mathrm{ad}(\sigma) = \rho_{K/F} + \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{ad}(S))$ $+\mathrm{Ind}_H^G(U)$ où $\rho_{K/F} = \mathrm{Ind}_H^G(1_K) - 1_F$ a été considérée en 3.4.

Si χ est un quasicaractère modéré de $F^\times$ on a

$$\chi \otimes \mathrm{ad}(\sigma) = \chi \otimes \rho_{K/F} + \mathrm{Ind}_H^G(\chi_K \otimes \mathrm{ad}(S)) + \mathrm{Ind}_H^G(\chi_K \otimes U)$$

où l'on a posé $\chi_K = \chi \circ N_{K/F}$.

On en tire l'égalité suivante, dans C_F,

$$c_{\mathrm{ad}(\sigma)} = c_{K/F}\, N_{K/F}(c_{\mathrm{ad}(S)})\, N_{K/F}(c_U).$$

Identifions $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ et $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ comme en 3.4. Alors la norme $N_{K/F}$ induit sur ce groupe l'élévation à la puissance e et on a dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$

$$c_{\mathrm{ad}(\sigma)} = c_{K/F} c_{\mathrm{ad}(S)}^e c_U^e. \tag{4.4.2}$$

Mais, par le corollaire 3.3, $c_{\mathrm{ad}(S)}$ et $c_{\mathrm{ad}(\sigma)}$ sont des carrés si p est impair. On obtient donc, *pour p impair,*

$$c_U = c_{K/F} \quad \text{dans} \quad C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{4.4.3}$$

De manière analogue, on obtient

$$c_{\sigma\otimes\sigma'} = c_{S\otimes S'}^e c_{U'}^e \quad \text{dans} \quad C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]. \tag{4.4.4}$$

Pour p impair, on a $c_{U'}^s = c_U^{s'}$ (dans $C_K \otimes \mathbb{Z}[1/p]$) par la proposition 4.3, et donc, pour p impair,

$$c_{U'} = c_U = c_{K/F} \quad \text{dans} \quad C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \tag{4.4.5}$$

4.5. Supposons que le théorème 1.3 soit vrai pour les représentations S et S':

$$\epsilon'(S \otimes S') \equiv \det(S \otimes S')(c_{S\otimes S'})^{-1/ss'} G_K(c_{S\otimes S'})^{ss'} \pmod{\mu}.$$

On a alors par (4.4.1)

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma') \equiv \det(S \otimes S')(c_{S\otimes S'} c_{U'})^{-1/ss'} G_K(c_{S\otimes S'})^{ss'} \pmod{\mu}$$

qu'il s'agit de comparer à

$$\det(\sigma \otimes \sigma')(c_{S\otimes S'}^e c_{U'}^e)^{-1/ss'e^2} G_F(c_{S\otimes S'}^e c_{U'}^e)^{ss'e^2}$$

(par 4.4.4). On a

$$\det \sigma = \det S|_{F^\times} \cdot \delta_{K/F}^s,$$

$$\det \sigma' = \det S'|_{F^\times} \cdot \delta_{K/F}^{s'},$$

d'où

$$\det(\sigma \otimes \sigma') = (\det\,\sigma)^{s'e} (\det\,\sigma')^{se} = \det(S \otimes S')^{e}|_{F^\times}\, \delta_{K/F}^{2ss'e}$$

$$= \det(S \otimes S')^{e}|_{F^\times}.$$

Cela donne l'égalité des termes en det

$$\det(S \otimes S')(c_{S\otimes S'} c_{U'})^{1/ss'} \equiv \det(\sigma \otimes \sigma')(c^{e}_{S\otimes S'} c^{c}_{U'})^{1/ss'e^2} \pmod{\mu}.$$

Pour l'égalité des termes en G, on remarque qu'elle est triviale si $p = 2$. Si p est impair, e l'est aussi et e^2 est congru à 1 modulo 8. On a donc

$$G_F(c^{e}_{S\otimes S'} c^{e}_{U'})^{ss'e^2} = G_F(c_{S\otimes S'} c_{U'})^{ss'} = G_F(c_{S\otimes S'} c_{K/F})^{ss'}$$

par (4.4.5). L'égalité avec $G_K(c_{S\otimes S'})^{ss'}$ découle alors de la proposition 3.7.

En admettant la proposition 4.3, nous avons donc prouvé que si le théorème 1.3 est vrai pour S et S', il l'est aussi pour σ et σ'.

4.6. Passons maintenant à la démonstration de la proposition 4.3. Il nous faut faire appel à la théorie de Clifford [5] §11. Il existe une extension $\widetilde{H}$ de H par $\mathbb{C}^\times$, scindée naturellement sur G_i, telle que ρ s'étende en une représentation R de $\widetilde{H}$, dont la restriction à $\mathbb{C}^\times$ est somme de copies du caractère identité $z \mapsto z$, et S s'écrit $R \otimes T$, où T est une représentation irréductible de $\widetilde{H}$, triviale sur le sous-groupe G_i de $\widetilde{H}$, et dont la restriction à $\mathbb{C}^\times$ est somme de copies du quasicaractère $z \mapsto z^{-1}$. De même, bien sûr, S' se factorise sous la forme $R^\vee \otimes T'$.

Mais on sait [17] §6, Thm. 4 que le groupe de cohomologie continue $H^2(\mathrm{Gal}(\overline{F}/K), \mathbb{C}^\times)$ est trivial; on peut donc relever la projection $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K) \to H$ en un homomorphisme continu $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K) \to \widetilde{H}$.

4.7. Notons E' une extension galoisienne finie de F dans $\overline{F}$, contenant E et le noyau de cet homomorphisme. Posons $G' = \mathrm{Gal}(E'/F)$ et notons i' le plus petit entier tel que l'image de $G'_{i'}$ dans G soit G_i. Alors ρ définit une représentation irréductible de $G'_{i'}$ dont le stabilisateur dans G' est $\mathrm{Gal}(E'/K) = H'$. L'extension $\widetilde{H}'$ de H' par $\mathbb{C}^\times$ obtenue par image inverse de $\widetilde{H}$ est alors scindée, par le choix de E'.

Remplaçant E par E' et i par i', on peut donc supposer que l'extension $\widetilde{H}$ de H par $\mathbb{C}^\times$ est scindée. Mais il faut prendre garde que ce scindage ne coïncide pas nécessairement sur G_i avec le scindage donné par ρ. De ce qui précède, on peut simplement déduire qu'il existe un caractère α de G_i tel que $\rho \otimes \alpha$ s'étende en une représentation de H, qu'abusivement nous nous permettrons de noter encore R. On a $S \cong R \otimes T$ où cette fois T est une représentation irréductible de H dont la restriction à G_i est isotypique de type α^{-1}. De la même façon $S' \cong R^\vee \otimes T'$ où T' est une représentation irréductible de H dont la restriction à G_i est isotypique de type α. En particulier $T \otimes T'$ a une restriction triviale à G_i.

4.8. Il nous faut identifier maintenant les représentations U et U' de 4.2. Notons Y un ensemble de représentants dans G des doubles classes *non triviales* de G modulo H.

On a

$$\sigma \otimes \sigma' = (\mathrm{Ind}_H^G S) \otimes (\mathrm{Ind}_H^G S')$$

$$= \mathrm{Ind}_H^G(S \otimes (\mathrm{Res}_G^H \mathrm{Ind}_H^G S')).$$

Par la formule de Mackey, on a donc

$$U' = \bigoplus_{y \in Y} S \otimes (\mathrm{Ind}_{H \cap yHy^{-1}}^H \mathrm{Res}_{yHy^{-1}}^{H \cap yHy^{-1}}(S'^y))$$

où $S'^y(yhy^{-1}) = S'(h)$ pour $h \in H$.

On obtient ainsi

$$U' = \bigoplus_{y \in Y} \mathrm{Ind}_{H \cap yHy^{-1}}^H(U'_y),$$

$$U'_y = (\mathrm{Res}_H^{H \cap yHy^{-1}} S) \otimes (\mathrm{Res}_{yHy^{-1}}^{H \cap yHy^{-1}} S'^y).$$

De la même façon

$$U = \bigoplus_{y \in Y} \mathrm{Ind}_{H \cap yHy^{-1}}^H(U_y),$$

$$U_y = (\mathrm{Res}_H^{H \cap yHy^{-1}} S) \otimes (\mathrm{Res}_{yHy^{-1}}^{H \cap yHy^{-1}} S^{\vee y}).$$

On a alors $\epsilon'(sU' - s'U) = \prod_{y \in Y} \epsilon_y$ avec $\epsilon_y = \epsilon'(sU'_y - s'U_y)$.

Notant K_y l'extension de K fixée par $H \cap yHy^{-1}$, on obtient aussi

$$\left.\begin{aligned} c_U &= \prod_{y \in Y} N_{K_y/K}(c_{U_y}) \\ c_{U'} &= \prod_{y \in Y} N_{K_y/K}(c_{U'_y}) \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

4.9. Fixons pour un moment $y \in Y$. Nous allons contrôler U_y et U'_y par leur restriction à G_i qui, par construction, est un sous-groupe distingué de H. Les restrictions à G_i de U_y et U'_y sont sommes de représentations de la forme $\rho \otimes \rho^{\vee y}$; en particulier, comme nous l'avons déjà mentionné en 4.2, elles ne contiennent pas la représentation unité.

Pour chaque composant irréductible v de $\rho \otimes \rho^{\vee y}$, on considère la sous-représentation $U_{y,v}$ de U_y dont la restriction à G_i est somme de représentations irréductibles dans l'orbite de v sous $H \cap yHy^{-1}$; ainsi U_y est somme de ces représentations $U_{y,v}$, quand v parcourt un système $N = N(y)$ de représentants de ces orbites. Si H_v est le stabilisateur de v dans $H \cap yHy^{-1}$, alors $U_{y,v}$ est induite de la représentation V_ν de H_ν sur le composant isotypique de $U_{y,\nu}|_{G_i}$ de type ν. De manière analogue, on écrit

$$U'_y = \bigoplus_{\nu \in N} U'_{y,\nu} = \bigoplus_{\nu \in N} \operatorname{Ind}_{H_\nu}^{H \cap yHy^{-1}}(V'_\nu).$$

On a

$$\epsilon'(sU'_y - sU_y) = \prod_{\nu \in N} \epsilon'(sV'_\nu - s'V_\nu),$$

$$\left.\begin{aligned} c_{U_y} &= \textstyle\prod_{\nu \in N} N_{K_\nu/K_y}(c_{V_\nu}) \\ c_{U'_y} &= \textstyle\prod_{\nu \in N} N_{K_\nu/K_y}(c_{V'_\nu}) \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } C_{K_y} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p],$$

où K_ν est l'extension de K fixée par H_ν.

4.10. Continuons avec $y \in Y$ fixé, et fixons également $\nu \in N$ pour un moment.

La représentation irréductible ν de G_i est sauvage au sens de [12] §1, puisque G_i est égal à son sous-groupe de ramification sauvage. Par suite, V_ν, dont la restriction à G_i est isotypique de type ν, est homogène au sens de [12] §1; il en est de même de V'_ν, dont la restriction à G_i est du même type ν. Par [12] §5 Thm. 1, il existe un élément g_ν de $C_{K_\nu} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ tel qu'on ait

$$\epsilon'(V_\nu) \equiv \det V_\nu(g_\nu)^{-1} G_{K_\nu}(g_\nu)^{\dim V_\nu} \pmod{\mu} \text{ et}$$

$$\epsilon'(V'_\nu) \equiv \det V'_\nu(g_\nu)^{-1} G_{K_\nu}(g_\nu)^{\dim V'_\nu} \pmod{\mu}.$$

On en déduit

$$\epsilon'(sV'_\nu - s'V_\nu) \equiv \big(\det V'^{s}_\nu \det V^{-s'}_\nu\big)(g_\nu)^{-1} \pmod{\mu}. \tag{$*$}$$

D'autre part, par [12] §5 Cor. 1 on a

$$c_{V_\nu} = g_\nu^{\dim V_\nu}, \quad c_{V'_\nu} = g_\nu^{\dim V'_\nu},$$

d'où $c_{V_\nu}^{1/s} = c_{V'_\nu}^{1/s'}$.

Tenant compte des réductions déjà effectuées en 4.8–4.9, on obtient, en faisant varier $y \in Y$ et $\nu \in N(y)$ pour un instant, la première égalité de la proposition.

4.11. Il reste à compléter le calcul de $\epsilon'(sU' - s'U)$. Continuons à fixer $y \in Y$ et $\nu \in N(y)$.

Nous utilisons maintenant – remarque cruciale – que S s'écrit $R \otimes T$ et que S' s'écrit $R^\vee \otimes T'$, comme en 4.7. La restriction de T à G_i est isotypique de type α^{-1}, celle de T'^y est isotypique de type α^y. Si W_ν désigne la représentation de H_ν sur le composant isotypique de $(R \otimes R^\vee)|_{G_i}$ de type $\nu \otimes \alpha \otimes \alpha^{-y}$, alors on a

$$V_\nu = W_\nu \otimes (T|_{H_\nu} \otimes T^{\vee y}|_{H_\nu})$$

et

$$V'_v = W_v \otimes (T|_{H_v} \otimes T'^y|_{H_v}).$$

Posant $d = \dim W_v$, on obtient donc

$$\det V'^s_v \det V^{-s'}_v = \det(T|_{H_v} \otimes T'^y|_{H_v})^{sd} \det(T|_{H_v} \otimes T^{\vee y}|_{H_v})^{-s'd}.$$

Posons $\theta = \det T$, $\theta' = \det T'$, vus comme des quasicaractères de $K^\times$, de sorte que θ^y et θ'^y sont des quasicaractères de $yK^\times$. De la formule précédente, on tire aussitôt, en posant $t = \dim T$, $t' = \dim T'$, $r = \dim R$ (ainsi $s = tr$, $s' = t'r$, et t, t' et r sont des puissances de p),

$$\det V'^s_v \ \det V^{-s'}_v = (\theta'^y \circ N_{K_v/yK})^{t^2rd} (\theta^y \circ N_{K_v/yK})^{tt'rd}.$$

On s'intéresse donc à $\theta^y(N_{K_v/yK}(g_v))$ et $\theta'^y(N_{K_v/yK}(g_v))$.

4.12. Les extensions K/F et yK/F sont toutes deux totalement sauvagement ramifiées de degré e, de sorte que $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ et $C_{yK} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ s'identifient tous deux à $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$. Dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ on a

$$\begin{aligned}\theta^y(N_{K_v/yK}(g_v)) &= (\theta^y)^{1/e}(N_{K_v/F}(g_v)) \\ &= \theta^{1/e}(N_{K_v/F}(g_v)) \\ &= \theta(N_{K_v/K}(g_v)),\end{aligned}$$

et de même $\theta'^y(N_{K_v/yK}(g_v)) = \theta'(N_{K_v/K}(g_v))$.

On obtient donc, par la formule $(*)$ plus haut,

$$\epsilon'(sV'_v - s'V_v) \equiv \theta'^{1/t'}\theta^{1/t}(\gamma_v)^{-1}$$

pour un élément γ_v de $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ qui vaut précisément

$$\gamma_v = N_{K_v/K}(g_v)^{t^2t'rd}.$$

Mais on remarque que

$$\det(T \otimes T')^{1/tt'} = \theta^{1/t}\theta'^{1/t'},$$

d'où

$$\det(S \otimes S')^{1/\dim(S\otimes S')} = \theta^{1/t}\theta'^{1/t'},$$

de sorte qu'on obtient également

$$\epsilon'(sV'_v - sV_v) \equiv \det(S \otimes S')^{-1/\dim(S\otimes S')}(\gamma_v) \pmod{\mu}.$$

4.13. Si maintenant l'on fait le produit des expressions précédentes quand y et v varient on obtient

$$\epsilon'(sU' - s'U) \equiv \det(S \otimes S')^{-1/\dim(S\otimes S')}(\gamma) \pmod{\mu}$$

pour un élément γ de $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$, produit des précédents.

Pour calculer $c_{U'}$, l'on tensorise U' par un quasicaractère modéré χ, ce qui revient à tensoriser S' par χ, et multiplie le facteur $\epsilon'(sU' - s'U)$ par $\chi^{-1}(\gamma)$. On a donc $c_{U'}^s = \gamma$ et finalement

$$\epsilon'(sU' - sU) \equiv \det(S \otimes S')(c_{U'}^{1/s'})^{-1} \pmod{\mu}$$

ce qui termine la preuve de la proposition 4.3.

4.14. On peut même maintenant aller plus loin dans la réduction. D'après ce qui précède, nous pouvons supposer, pour prouver le théorème 1.3, que nous avons $K = F$ i.e. $\sigma = S = R \otimes T$, $\sigma' = S' = R^\vee \otimes T'$.

La restriction de R à G_i est la représentation irréductible ρ, et par suite $R \otimes R^\vee|_{G_i}$ contient une seule fois le caractère trivial. Si on écrit $R \otimes R^\vee = 1_F \oplus \mathrm{ad}(R)$ alors $\mathrm{ad}(R)|_{G_i}$ ne contient pas le caractère trivial, tandis que $T \otimes T'|_{G_i}$ est trivial.

On peut donc appliquer les résultats rappelés en 2.2 et obtenir

$$c_{\mathrm{ad}(R)\otimes T\otimes T'} = c_{\mathrm{ad}(R)}^{tt'},$$

$$\epsilon'(\mathrm{ad}(R) \otimes T \otimes T') \equiv \det(T \otimes T')(c_{\mathrm{ad}(R)})^{-1}\epsilon'(\mathrm{ad}(R))^{r^2-1} \pmod{\mu}.$$

Rappelons en outre qu'on a $\epsilon'(R \otimes R^\vee) \equiv 1$ d'où $\epsilon'(\mathrm{ad}(R)) \equiv 1 \pmod{\mu}$, et que si p est impair $c_{\mathrm{ad}(R)}$ est un carré dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$.

4.15. Supposons le théorème 1.3 vrai pour T et T', i.e.

$$\epsilon'(T \otimes T') \equiv \det(T \otimes T')(c_{T\otimes T'})^{-1/tt'} G_F(c_{T\otimes T'})^{tt'} \pmod{\mu}.$$

Alors on a

$$\epsilon'(\sigma \otimes \sigma') = \epsilon'(T \otimes T')\,\epsilon'(\mathrm{ad}(R) \otimes T \otimes T')$$

$$\equiv \det(T \otimes T')(c_{\mathrm{ad}(R)}^{tt'} c_{T\otimes T'})^{-1/tt'} G_F(c_{T\otimes T'})^{tt'} \pmod{\mu}.$$

Mais $\det(\sigma \otimes \sigma')^{1/ss'} = \det(T \otimes T')^{1/tt'}$ et

$$c_{\sigma\otimes\sigma'} = c_{T\otimes T'} c_{\mathrm{ad}(R)\otimes T\otimes T'} = c_{T\otimes T'} c_{\mathrm{ad}(R)}^{tt'}$$

et en particulier, si p est impair,

$$c_{\sigma\otimes\sigma'} \equiv c_{T\otimes T'} \text{ dans } C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On voit alors que le théorème 1.3 est vrai pour σ et σ' : c'est immédiat si $p = 2$ et, si p est impair, il suffit de remarquer que $r^2 \equiv 1 \pmod 8$ donc $G_F(c_{T\otimes T'})^{r^2-1} = 1$ d'où

$$G_F(c_{T\otimes T'})^{tt'} = G_F(c_{\sigma\otimes\sigma'})^{tt'r^2}.$$

Dans la suite de la preuve du théorème 1.3, nous supposerons donc que R est le quasicaractère trivial, i.e. que les images $\sigma(G_i)$ et $\sigma'(G_i)$ sont centrales.

5. Deuxième Réduction

5.1. On suppose désormais que $\sigma(G_i)$ et $\sigma'(G_i)$ sont centrales, et on abandonne les diverses notations introduites au §4. On a par hypothèse $\sigma'(g) = \sigma(g^{-1})$ pour $g \in G_i$; on peut donc, en factorisant par le noyau de $\sigma_{|G_i}$, supposer que G_i est cyclique d'ordre une puissance de p et que $\sigma|_{G_i}$ et $\sigma'|_{G_i}$ sont donnés par des caractères non triviaux χ, χ' de G_i, inverses l'un de l'autre. On considère alors les restrictions à G_{i-1} de σ et σ', qui par le choix de i n'ont aucun constituant commun. On a $i > 1$, donc G_{i-1} est un p-groupe; le quotient G_{i-1}/G_i est un p-groupe abélien fini d'exposant p, que nous notons V. Sur V, on dispose d'une application $\mathbb{F}_p$-bilinéaire alternée à valeurs dans G_i, donnée par le commutateur: pour g, h dans G_{i-1}, le commutateur $ghgh^{-1}$ appartient à G_i et ne dépend que des classes de g et h dans V. On note Z le centre de G_{i-1}, qui est encore l'image inverse dans G_{i-1} du noyau V^0 de la forme commutateur sur V.

On voit donc que G_{i-1} apparaît comme un groupe du type de Heisenberg, extension du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel symplectique V/V^0 par le centre Z. Les classes de représentations irréductibles de G_{i-1} sont alors paramétrées par les caractères de Z, un caractère η de Z paramétrant l'unique classe ρ_η de représentations irréductibles dont la restriction à Z est isotypique de type η.

5.2. Fixons un caractère η de Z intervenant dans la restriction de σ à Z. Le stabilisateur H de η dans G est le même que celui de ρ_η, et σ est induite de la représentation ρ de H sur le composant isotypique de $\sigma|_Z$ de type η. Si K est l'extension de F fixée par H, alors K/F est totalement sauvagement ramifiée.

Examinons le stabilisateur de η dans G_1. Le groupe G_1 agit sur G_{i-1} par conjugaison, l'action induite sur G_i et sur V étant triviale. On a donc un homomorphisme

$$\begin{aligned} G_1 &\longrightarrow \mathrm{Hom}(V, G_i) \\ h &\longmapsto \varphi_h, \end{aligned}$$

trivial sur G_i, de sorte que $hgh^{-1}g^{-1} = \varphi_h(gG_i)$ pour $h \in G_1$ et $g \in G_{i-1}$. L'action induite de $h \in G_1$ sur les caracères λ de Z est

$$h : \lambda \longmapsto \lambda^h, \qquad \lambda^h(z) = \lambda(\varphi_h(z)z).$$

Comme la restriction de η à G_i est non triviale, le stabilisateur H_1 de η dans G_1 est donc le noyau de l'homomorphisme $h \mapsto \varphi_h|_{V^0}$. Comme K/F est totalement sauvagement ramifiée, l'inclusion de G_1 dans G induit une bijection $G_1/H_1 \cong G/H$.

Remarquons aussi que le groupe G agit par conjugaison sur toute cette situation, que Z et H_1 sont distingués dans G, que l'homomorphisme $h \mapsto \varphi_h$ est G-équivariant. De plus, comme $\varphi_h|_{V^0}$ est trivial pour $h \in G_{i-1}$, le groupe H_1 contient G_{i-1}.

5.3. Fixons maintenant aussi un caractère η' de Z intervenant dans la restriction de σ' (de sorte que $\eta\eta'$ est trivial sur G_i). Le stabilisateur H' de η' dans G a la même intersection H_1 que H avec G_1, et il fixe une extension K' totalement sauvagement ramifiée sur F. Si ρ' est la représentation de H' sur le composant isotypique de $\sigma'|_Z$ de type η', on a $\sigma' = \mathrm{Ind}_{H'}^{G}\rho'$.

Comme on a $\sigma = \mathrm{Ind}_H^G\rho$, on obtient $\sigma \otimes \sigma' = \mathrm{Ind}_H^G(\rho \otimes \mathrm{Res}_{H'}\mathrm{Ind}_H^G G\rho')$ de sorte que $\sigma \otimes \sigma'$ peut se calculer par la formule de Mackey, comme au §4.

Fixons un système de représentants X des doubles classes de $H\backslash G/H'$. On a alors

$$\sigma \otimes \sigma' = \bigoplus_{x \in X} \mathrm{Ind}^G_{H \cap xH'x^{-1}}(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}}) \qquad (*)$$

où ρ'^x est la représentation de $xH'x^{-1}$ définie par

$$\rho'^x(xhx^{-1}) = \rho'(h) \text{ pour } h \in H'.$$

Remarquons que comme $HG_1 = H'G_1 = G$ on a

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}_1}\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_1}^{\mathrm{G}_1}(\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{H}_1}\rho)$$

et de même

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}_1}\sigma' = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}_1}^{\mathrm{G}_1}(\mathrm{Res}_{\mathrm{H}'}^{\mathrm{H}_1}\rho').$$

On en déduit que $\rho|_{H_1}$ et $\rho'|_{H_1}$ sont irréductibles, et comme pour chaque $x \in X$, $H \cap xHx^{-1}$ contient H_1, on voit que $\rho|_{H\cap xH'x^{-1}}$ et $\rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}}$ sont toutes deux irréductibles sauvages, et que leur restriction à Z est isotypique.

C'est la formule $(*)$ plus haut que nous utiliserons pour calculer $\epsilon'(\sigma \otimes \sigma')$. Mais comme ce calcul est assez compliqué, du moins la méthode que nous utilisons l'est, nous procéderons par étapes.

5.4. Remarquons néanmoins le cas particulier où G_{i-1} est central dans G: donc Z est égal à G_{i-1} et il est central dans G. De plus, H est égal à G, et les considérations du numéro précédent sont entièrement triviales. En ce cas particulier, la représentation $\sigma \otimes \sigma'$ est sauvage et homogène au sens de [11], §4: en effet $\sigma \otimes \sigma'|_{G_{i-1}}$ est triviale sur G_i et isotypique de type $\eta\eta'$; le théorème 1.3 découle alors de [11] §5, Cor. 2.

5.5. Traitons maintenant le cas un peu plus général où Z est central dans G: on a donc $H = H' = G$.

Soit L l'extension de F fixée par Z. Le caractère $\eta\eta'$ de Z est invariant par G, trivial sur $G_i = Z_i$, non trivial sur $Z_{i-1} = G_{i-1} \cap Z = Z$. Il existe donc $g \in C_L$ tel que $\eta\eta'(1+\alpha) = \psi_L(g\alpha)$ pour α dans L de valuation supérieure à la pente de $\eta\eta'$. L'élément g est invariant sous l'action de G/Z donc provient d'un élément, encore noté g, de $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$.

Nous montrerons en fait le résultat suivant:

PROPOSITION. *Soit I un sous-groupe de G contenant G_{i-1}, et soit M l'extension de F fixée par I. Soit τ une représentation de I dont la restriction à Z est isotypique de type $\eta\eta'$. Alors on a*

$$\epsilon'(\tau) \equiv \det \tau(g)^{-1} G_M(g)^{\dim \tau} \pmod{\mu},$$

$$c_\tau = g^{\dim \tau}.$$

Remarquons que la dernière assertion découle aussitôt de la précédente, et qu'appliquée à la représentation $\sigma \otimes \sigma'$ de G (dans notre cas où Z est central dans G) cette proposition donne le théorème 1.3.

5.6. Pour la preuve de la proposition 5.5, nous aurons plusieurs fois besoin d'un résultat établi dans [11] §6, Prop.1 et Rem. 5.
LEMME. *Soit K une extension finie de F et notons*

$$\lambda_{K/F} = \epsilon'(\mathrm{Ind}_K^F 1_K)/\epsilon'(1_F).$$

Alors on a

$$\lambda_{K/F} \equiv \delta_{K/F}(g)^{-1} G_K(g)^{-1} G_F(g)^{[K:F]} \pmod{\mu},$$

pour tout $g \in C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$.

5.7. Effectuons une première réduction. Soit I' un sous-groupe de I contenant G_{i-1}, dont l'indice d dans I est une puissance de p. Soit M' l'extension de M fixée par I'. On a, notant $\tau' = \mathrm{Res}_{I'}^I \tau$,

$$\mathrm{Ind}_{I'}^I \tau' = \tau \otimes \mathrm{Ind}_{I'}^I (1_{I'})$$

d'où $\epsilon'(\mathrm{Ind}_{I'}^I \tau') = \epsilon'(\tau)^d \delta_{M'/M}(g)^{-\dim \tau}$ par la prop 2.2 et son corollaire.

On en tire

$$\epsilon'(\tau)^d = \delta_{M'/M}^{\dim \tau}(g)\epsilon'(\mathrm{Ind}_{I'}^I \tau')$$

$$= \delta_{M'/M}^{\dim \tau}(g)\lambda_{M'/M}^{\dim \tau}\epsilon'(\tau').$$

Si la proposition 5.5 est vraie pour τ' cela donne

$$\epsilon'(\tau)^d \equiv \delta_{M'/M}(g)^{\dim \tau} \lambda_{M'/M}^{\dim \tau} \det \tau(g)^{-1} G_{M'}(g)^{\dim \tau} \pmod{\mu}$$

et, appliquant le lemme 5.6,

$$\epsilon'(\tau)^d \equiv \det \tau(g)^{-d} G_M(g)^{d \dim \tau} \pmod{\mu},$$

ce qui donne la proposition 5.5 pour τ.

On peut donc, en remplaçant M par la p-extension non ramifiée maximale de M dans E, supposer que I/I_1 est un groupe d'ordre premier à p. L'extension $1 \to I_1 \to I \to I/I_1 \to 1$ est alors scindée par le théorème de Schur-Zassenhaus. Choisissant un complément J à I_1 dans I, on peut remplacer I par JG_{i-1}, qui est d'indice une puissance de p dans I. On est donc ramené au cas où $I = JG_{i-1}$, avec J d'ordre premier à p.

5.8. Soit $\rho_{\eta\eta'}$ la représentation irréductible de G_{i-1} isotypique de type $\eta\eta'$. Elle est invariante par J donc s'étend en une représentation, disons R, de I, puisque J est d'ordre premier à celui de G_{i-1}. La représentation τ est alors de la forme $R \otimes T$, où T est une représentation de I triviale sur G_{i-1}. Par [11] §5 Cor. 3, il suffit de prouver la proposition 5.5 pour R.

Pour cela on reprend le raisonnement de 5.7 avec cette fois $I' = JZ$ d'où $I'_i = G_i \cap JZ = G_i$ et $I'_{i-1} = G_{i-1} \cap JZ = Z$. La représentation $R' = R|_{I'}$ est donc homogène et sauvage et par [11] §5 Thm., la formule de la proposition 5.5 est vraie pour R' (même si I' ne contient pas G_{i-1}).

On a

$$\mathrm{Ind}_{I'}^{I} R' = R \otimes \mathrm{Ind}_{I'}^{I} 1_{I'}$$

mais aussi

$$\mathrm{Ind}_{I'}^{I} R' = R \otimes T',$$

où T' est une représentation de I triviale sur G_{i-1}; on en déduit que $\dim T' = [I : I']$ est une puissance de p et qu'on a $\det(\mathrm{Ind}_{I'}^{I} 1_{I'})^{\dim R} = \det T'^{\dim R}$.

Par [11] §5 Cor. 3 à nouveau on a

$$\begin{aligned} \epsilon'(\mathrm{Ind}_{I'}^{I} R) &\equiv \epsilon'(R)^{\dim T'} \det(T')(g)^{-\dim R} \\ &\equiv \epsilon'(R)^{[I:I']} \det(\mathrm{Ind}_{I'}^{I} 1_{I'})(g)^{-\dim R} \pmod{\mu}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 5.6 à nouveau, on voit que la proposition 5.5 est vraie pour R.

5.9. Nous sommes enfin en mesure d'achever la preuve du théorème 1.3. On reprend la formule $(*)$ de 5.3. Pour $x \in X$, on a remarqué que $\rho|_{H \cap xH'x^{-1}}$ et $\rho'^{x}|_{H \cap xH'x^{-1}}$ sont irréductibles sauvages et que leur restriction à Z est isotypique.

L'image de Z dans ces représentations est donc centrale, et les considérations précédentes s'appliquent à ce couple de représentations en lieu et place de σ et σ'.

Notons K_x l'extension de K fixée par $H \cap xH'x^{-1}$. Il existe donc $g_x \in C_{K_x} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ tel que

$$\epsilon'(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}})$$

$$\equiv \det(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}})(g_x)^{-1} G_{K_x}^{\dim\rho\dim\rho'}(g_x) \pmod{\mu}$$

et $\epsilon'(\mathrm{Ind}_{K_x}^F(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}}))$ vaut $\lambda_{K_x/F}^{\dim\rho\dim\rho'}$ fois le terme précédent.

On en déduit que

$$c_{\sigma\otimes\sigma'} = \prod_{x\in X} N_{K_x/F}(g_x)^{\dim\rho\dim\rho'}.$$

On a

$$\det(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}}) = (\det\rho^{\dim\rho'} \circ N_{K_x/K})(\det\rho'^{x\dim\rho} \circ N_{K_x/xK'}).$$

Mais comme K et xK' sont totalement sauvagement ramifiées sur F, on peut identifier $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ à $C_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ et $C_{xK'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$; la norme de K à F se traduit sur $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ par l'élévation à la puissance $[K:F]$, et de même pour xK'/F.

On obtient donc

$$\det(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}})(g_x)$$

$$= \det\rho^{\dim\rho'/[K:F]}(N_{K_x/F}g_x)\det\rho'^{x\dim\rho/[xK':F]}(N_{K_x/F}g_x)$$

$$= \det\rho^{\dim\rho'/[K:F]}(N_{K_x/F}g_x)\det\rho'^{\dim\rho'/[K':F]}(N_{K_x/F}g_x).$$

Mais on a

$$\det\sigma = \det\rho|_{F^\times}\ \delta_{K/F}^{\dim\rho},$$

$$\det\sigma' = \det\rho'|_{F^\times}\ \delta_{K'/F}^{\dim\rho'}$$

d'où l'on tire que

$$\det(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^x|_{H\cap xH'x^{-1}})(g_x)$$

est congru mod μ au produit de

$$\det\sigma^{\dim\rho'/[K:F]}(N_{K_x/F}g_x)\delta_{K/F}^{\alpha}(N_{K_x/F}g_x) \quad \left(\text{ou } \alpha = \frac{\dim\rho\dim\rho'}{[K:F]}\right)$$

et de

$$\det \sigma'^{\,\dim \rho'/[K':F]}(N_{K_x/F}g_x)\delta^{\alpha'}_{K'/F}(N_{K_x/F}g_x) \quad \left(\text{avec } \alpha' = \frac{\dim\rho\dim\rho'}{[K':F]}\right).$$

On peut alors évaluer

$$\prod_{x\in X} \det(\rho|_{H\cap xH'x^{-1}} \otimes \rho'^{x}|_{H\cap xH'x^{-1}})(g_x)$$

comme congru à

$$\det(\sigma\otimes\sigma')^{1/\dim\sigma\dim\sigma'}(c_{\sigma\otimes\sigma'})\delta^{1/[K:F]}_{K/F}\delta^{1/[K':F]}_{K'/F}(c_{\sigma\otimes\sigma'}).$$

5.10. Si $p=2$, les deux facteurs δ de ce dernier terme, ainsi que les autres facteurs dans le calcul de $\epsilon'(\sigma\otimes\sigma')$, sont des racines de l'unité d'ordre une puissance de 2, et le théorème 1.3 est démontré pour σ et σ'.

On suppose désormais que p est impair.

Il s'agit de comparer

$$\left(\prod_x \lambda_{K_x/F}G_{K_x}(g_x)\right)^{\dim\rho\ \dim\rho'} \delta^{1/[K:F]}_{K/F}\delta^{1/[K':F]}_{K'/F}(c_{\sigma\otimes\sigma'})^{-1}$$

à $G_F(c_{\sigma\otimes\sigma'})^{\dim(\sigma\otimes\sigma')}$.

On pose $g = c_{\sigma\otimes\sigma'}^{1/\dim\ \sigma\ \dim\ \sigma'}$ et, pour chaque $x\in X$, $g_x = g\zeta_x$. Nous démontrerons plus loin le lemme suivant :

LEMME. *Soit $x\in X$. Alors K_x/K est non ramifiée et $\zeta_x \in C_{K_x}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[1/p]$ est de valuation nulle (dans $\mathbb{Z}[1/p]$).*

Admettant ce lemme on obtient

$$G_{K_x}(g_x) = \begin{cases} G_{K_x}(g) & \text{si } g \text{ est de valuation paire} \\ G_{K_x}(g)\left(\frac{\zeta_x}{q_x}\right) & \text{si } g \text{ est de valuation impaire,} \end{cases}$$

où q_x est le cardinal du corps résiduel de K_x et $\left(\frac{\ }{q_x}\right)$ le symbole de Legendre.

Par le lemme 5.6 on a aussi

$$\lambda_{K_x/F}G_{K_x}(g) = \delta_{K_x/F}(g)^{-1}G_F(g)^{[K_x:F]}$$

d'où

$$\left(\prod_x \lambda_{K_x/F}G_{K_x}(g_x)\right)^{\dim\rho\dim\rho'} = G_F(g)^{\dim(\sigma\otimes\sigma')}\prod_{x\in X}\delta_{K_x/F}(g)^{-\dim\rho\dim\rho'}\cdot A$$

où

$$A = \begin{cases} 1 & \text{si } g \text{ est de valuation paire,} \\ \prod_x \left(\frac{\zeta_x}{q_x}\right)^{\dim\rho\dim\rho'} & \text{si } g \text{ est de valuation impaire.} \end{cases}$$

Mais puisque K_x/K est non ramifiée et K/F totalement ramifiée de degré impair on a

$$\left(\frac{\zeta_x}{q_x}\right) = \left(\frac{N_{K_x/F}\zeta_x}{q_F}\right)$$

d'où

$$\prod_x \left(\frac{\zeta_x}{q_x}\right)^{\dim\rho\dim\rho'} = \prod_x \left(\frac{N_{K_x/F}\zeta_x}{q_F}\right)$$

mais $c_{\sigma\otimes\sigma'} = g^{\dim\sigma\otimes\sigma'} = g^{\dim\sigma\otimes\sigma'}\prod_x N_{K_x/F}\zeta_x$ d'où $\prod_x N_{K_x/F}\zeta_x = 1$ (dans $C_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$) et A est toujours égal à 1.

5.11. Il s'agit donc maintenant de comparer

$$\delta_{K/F}^{1/[K:F]}\delta_{K'/F}^{1/[K':F]}(c_{\sigma\otimes\sigma'}) \text{ et } \prod_{x\in X}\delta_{K_x/F}(g)^{\dim\rho\dim\rho'}.$$

Mais comme p est impair, le premier terme vaut $\delta_{K/F}\delta_{K'/F}(g)$ et le second $\prod_{x\in X}\delta_{K_x/F}(g)$. On voit que le premier vaut également

$$\det(\mathrm{Ind}_K^F 1_K \otimes \mathrm{Ind}_{K'}^F 1_{'K})(g)$$

et le second

$$\det\left(\bigoplus_{x\in X}\mathrm{Ind}_{K_x}^F 1_{K_x}\right)(g) \equiv \det(\mathrm{Ind}_K^F(\mathrm{Res}_K^F \mathrm{Ind}_{K'}^F 1_{K'})(g)$$

$$\equiv \det(\mathrm{Ind}_K^F 1_K \otimes \mathrm{Ind}_{K'}^{F'} 1_{K'})(g) \pmod{\mu}$$

ce qui prouve le théorème 1.3.

5.12. Il ne nous reste plus qu'à prouver le lemme 5.10.

Pour $x \in X$, le caractère $\eta\eta'^x$ de Z est trivial sur $Z_i = G_i$, non trivial sur $Z_{i-1} = Z$ et on a

$$\eta\eta'^x(1+\alpha) = \psi_L(g_x\alpha)$$

pour $\alpha \in L$ de valuation supérieure à la pente de $\eta\eta'^x$. Par suite la valuation dans

$C_L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$ de g_x ne dépend pas de x mais uniquement de L et i. Comme

$$g^{\dim \sigma\otimes\sigma'} = c_{\sigma\otimes\sigma'} = \prod_{x\in X} N_{K_x/F}(g_x)^{\dim\rho \dim\rho'}$$

et que $\sum_x [K_x : F] = [K : F][K' : F]$, on en tire que cette valuation est également celle de g.

Cela prouve la seconde assertion du lemme.

On voit aussi que la valuation dans C_L de g_x appartient à $[L : F]\mathbb{Z}[1/p]$. Si on regarde l'action sur g_x de $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/K)$, bien sûr g_x est invariant par $\mathfrak{g}_1$ mais il l'est aussi par $\mathfrak{g}_0$. Cela implique bien que K_x est non ramifiée sur K. C.Q.F.D.

Bibliographie

1. Bushnell, C. and Henniart, G.: Calculs de facteurs epsilon pour GL_n sur un corps local, I, *Bull. London Math. Soc.* **31** (1999), 534–542.
2. Bushnell, C. and Henniart, G.: Local tame lifting for GL(N) II: wildly ramified supercuspidals, *Astérisque* **254** (1999).
3. Bushnell, C. and Henniart, G.: Davenport-Hasse relations and an explicit Langlands correspondence, *J. reine angew. Math.* **519** (2000), 171–199.
4. Bushnell, C. and Henniart, G.: Davenport-Hasse relations and an explicit Langlands correspondence, II: twisting conjectures, J. Th. Nombres Bordeaux à paraître.
5. Curtis, C. and Reiner, I.: *Methods of Representation Theory I* Wiley-Interscience, New York, 1981.
6. Deligne, P.: Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale, *Invent. Math.* **35** (1976), 299–316.
7. Deligne, P. and Henniart, G.: Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L, *Invent. Math.* **64** (1981), 89–118.
8. Harris, M.: Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program, *Invent. Math.* **129** (1997), 75–119.
9. Harris, M.: The local Langlands conjecture for GL(n) over a p-adic field, $n < p$, *Invent. Math.* **134** (1998), 177–210.
10. Harris, M. and Taylor, R.: On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Prépublication, 1998.
11. Henniart, G.: Galois ϵ-factors modulo roots of unity, *Invent. Math.* **78** (1984), 117–126.
12. Henniart, G.: Caractérisation de la correspondance de Langlands locale par les facteurs ϵ de paires, *Invent. Math.* **113** (1993), 339–356.
13. Henniart, G.: Une preuve simple des conjectures locales de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique, *Invent. Math.* **139** (2000), 439–455.
14. Jacquet, H., Piatetski–Shapiro, I. and Shalika, J.: Rankin-Selberg convolutions, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 367–483.
15. Laumon, G., Rapoport, M. and Stuhler, U.: D-elliptic sheaves and the Langlands correspondence, *Invent. Math.* **113** (1993), 217–338.
16. Serre, J.-P.: *Corps locaux,* Hermann, Paris, 1958.
17. Serre, J.-P.: Modular forms and Galois representations, In: A. Fröhlich (ed.), *Algebraic Number Theory,* Academic Press, New York, 1977, pp. 193–268.
18. Shahidi, F.: Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for GL(n), *Amer. J. Math.* **106** (1989), 67–111.

19. Shahidi, F.: A proof of Langlands's conjecture on Plancherel measures, complementary series for p-adic groups, *Ann. Math.* **132** (1990), 273–330.
20. Tate, J.: Number theoretic background Automorphic forms, representations and L-functions, In: A. Borel and W. Casselman (eds.), *Proc. Symposia Pure Math.* **33** Amer. Math. Soc., Providence, 1979, pp. 3–26.