# GENERALISATION DE LA DECOMPOSITION DE KATO AUX OPÉRATEURS PARANORMAUX ET SPECTRAUX

*par* MOSTAFA MBEKHTA

(Received 28 October, 1985)

**Introduction.** Dans tout ce qui suit, $H$ désigne un espace de Hilbert séparable, $A$ un opérateur fermé de domaine $D(A)$ dans $H$, on note $B(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés de $H$ dans lui-même et $N(A)$, $R(A)$ respectivement le noyau de $A$, l'image de $A$.

En 1958, T. Kato a démontré dans [**7**] le théorème suivant.

*Soit $A$ un opérateur semi-Fredholm sur un espace de Hilbert $H$. Alors il existe une décomposition directe de $H = M \oplus N$ telle que*

(a) *$M$, $N$ sont invariants par $A$,*

(b) *$A \mid M$ est régulier (c'est-à-dire $R(A \mid M)$ est fermé et contient tous les noyaux itérés de $A \mid M$),*

(c) *$N \subseteq D(A)$, $A \mid N$ est nilpotent de degré $d$.*

Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Kato de degré $D$. Les opérateurs admettant une telle décomposition ont été caractérisés en 1978 par J. P. Labrousse [**8**] et on les appelle les opérateurs quasi-Fredholm de degré $d$; l'ensemble de ces opérateurs est noté $q\Phi(d)$ et contient évidemment les semi-Fredholm comme cas particuliers.

Une question se pose naturellement: sous quelles conditions sur $A$, peut-on généraliser la décomposition de Kato par une décomposition où (c) est remplacée par: $A \mid N$ est limite de nilpotents?

Dans ce travail on donne (Théorème 3.3) une caractérisation des opérateurs admettant une décomposition du type de Kato lorsque $A$ est paranormal (voir [**8**]) et lorsque la condition (c) est remplacée par la condition

$$(c') \quad A \mid N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af}$$

où

$$\mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af} = \{T \in B(H) \mid T \text{ et } T^* \text{ sont des transformations quasi-affines d'opérateurs quasi-nilpotents}\}$$

(voir [**2**]). Si on note $qN = \{T \in B(H) \mid \sigma(T) = \{0\}\}$ c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs quasi-nilpotents, alors on $a: qN \nsubseteq \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af} \nsubseteq$ l'adhérence de l'ensemble des nilpotents (voir [**9**]).

Dans le cas où $A$ est spectral (au sens de Dunford [**4**]) on obtient (Corollaire 4.2) une décomposition du type de Kato où la condition (c) est remplacée par la condition (c″) $A \mid N \in qN$ et la condition (b) est remplacée par (b′) $A \mid M$ est inversible. Les paragraphes 3 et 4 sont consacrés à la démonstration de ces résultats.

Dans le paragraphe 2 on s'est intéressé aux opérateurs réguliers c'est-à-dire tels que

$R(A)$ soit fermé et $(\forall n \in \mathbb{N}) N(A^n) \subseteq R(A)$; on notera Reg$(H)$ l'ensemble des opérateurs réguliers.

On sait que l'ensemble resolvant de $A$ qu'on note

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné}\}$$

est ouvert dans $\mathbb{C}$ et que l'opérateur $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans $\rho(A)$. Donc

$$(\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et est borné.}$$

On va donner une généralisation de $\rho(A)$ où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé. Notons reg$(A)$ l'ensemble resolvant généralisé de $A$ défini par

reg$(A) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \mid \exists U_0$ voisinage de $\lambda_0$ dans $\mathbb{C}$, tels que $\forall \lambda \in U_0$, $\exists B_\lambda$ opérateur continu sur $H$ à valeurs dans $D(A)$ et analytique dans $U_0$, tel que $B_\lambda$ soit un inverse généralisé de $(A - \lambda I)\}$.

On a évidemment $\rho(A) \subseteq \text{reg}(A)$ et on montre dans le Théorème 2.6, le résultat suivant:

$$\lambda \in \text{reg}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ est régulier.}$$

On verra aussi que si $\dim H < \infty$ alors $\rho(A) = \text{reg}(A)$ (c'est-à-dire que tout opérateur régulier est inversible); ce résultat reste vrai (avec $H$ Hilbert quelconque) et $A$ spectral ou décomposable. Ceci montre que la notion d'opérateur régulier généralise celle d'opérateur inversible.

Pour établir les résultats des paragraphes 2, 3 et 4, on aura besoin d'une part d'introduire la notion du coeur analytique $K(A)$ d'un opérateur (inspirée de celle de coeur d'un opérateur (P. Saphar [**10**])) et d'autre part d'étudier ses relations avec

$$H_0(A) = \{u \in D^\infty(A) \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0\}$$

sous-espace connu dans la littérature. C'est l'objet du paragraphe 1 et notamment on démontre dans le Théorème 1.6 que $\lambda_0$ est un point isolé du spectre de $A$ si et seulement si

$$H = H_0(A - \lambda_0 I) \oplus K(A - \lambda_0 I) \quad \text{et} \quad H_0(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}.$$

Ce théorème généralise le Théorème 5.8.A et le Théorème 5.8.D de Taylor [**11**], car si $\lambda_0$ est un pôle d'ordre $d$ alors on a

$$H_0(A - \lambda_0 I) = N((A - \lambda_0 I)^d) \quad \text{et} \quad K(A - \lambda_0 I) = R((A - \lambda_0 I)^d).$$

Je tiens à remercier le referee pour ses suggestions qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce travail.

**1. Caractérisation des points isolés du spectre.** On notera

$$K(A) = \{u \in H \mid \exists a > 0, \quad \forall n \geq 0 \quad \exists v_n \in D(A^n) \quad \text{tels que} \quad (1)\ v_0 = u \quad \text{et} \quad A v_{n+1} = v_n,\ (2)\ \|v_n\| \leq a^n \|u\|\ \forall n \geq 0\}.$$

REMARQUE 1.1.

(1) $K(A)$ et $H_0(A)$ sont des sous-espaces de $H$ non nécessairement fermés.

(2) $A(K(A) \cap D(A)) = K(A)$ et $H_0(A) \subseteq D(A)$, $A(H_0(A)) \subseteq H_0(A)$.

(3) $K(A)$ est lié au coeur de l'opérateur $A$ par la proposition suivante, (rappelons que le coeur de $A$ noté $\mathrm{Co}(A)$ (voir **[10]**) est par définition le plus grand sous-espace $M$ de $H$ tel que $A(M \cap D(A)) = M$).

LEMME 1.2. *Soit $A$ un opérateur fermé. Alors on a*

(a) $H_0(A) \subseteq \{u \in H : \gamma_A(u) \subset \{0\}\}$;

on a l'egalité si $A$ a la S.V.E.P.

(b) $K(A) = \{u \in H : 0 \in \delta_A(u)\}$.

*Démonstration.* Pour les définitions de $\gamma_A(u)$, $\delta_A(u)$ et de la S.V.E.P. voir **[13]** et **[14]**.

(a) Est une simple vérification.

(b) Se déduit directement du Lemma 1.1 **[14]**.

PROPOSITION 1.3. *Soit $A$ un opérateur fermé. Alors*

$$\mathrm{Co}(A) \textit{ fermé dans } H \Rightarrow K(A) = \mathrm{Co}(A).$$

*Démonstration.* D'après la remarque précédente (2), il suffit de montrer que $\mathrm{Co}(A) \subseteq K(A)$; remarquons d'abord que $\mathrm{Co}(A) \cap D(A)$ est fermé dans $D(A)$; soit $A : \mathrm{Co}(A) \cap D(A) \to \mathrm{Co}(A)$; la restriction de $A$ à $\mathrm{Co}(A) \cap D(A)$ est surjective $\Rightarrow \exists B$ borné inverse à droite de $A$ tel que $\forall u \in \mathrm{Co}(A)$ on a $u = ABu$ avec $Bu \in \mathrm{Co}(A) \cap D(A)$ en posant $v_n = B^n u \in D(A^n)$ on a $v_0 = u$ et $Av_{n+1} = AB^{n+1}u = B^n u = v_n$ et $\|v_n\| \leq \|B\|^n \cdot \|u\|$ donc $u \in K(A)$ d'où $\mathrm{Co}(A) \subseteq K(A)$.

REMARQUE. Dans le cas des opérateurs $q\Phi(d)$ on a

$$K(A) = \mathrm{Co}(A) = \bigcap_{j \geq 0} R(A^j)$$

(voir **[9,** Théorème 1.5.4]).

PROPOSITION 1.4. *Soit $T \in B(H)$. Alors*

$$T \textit{ quasi-nilpotent} \Rightarrow K(T) = K(T^*) = \{0\}.$$

*Démonstration.* C'est une simple vérification.

PROPOSITION 1.5. *Soit $A$ un opérateur fermé. Alors sont équivalents:*

(i) $H_0(A) = H$;

(ii) *$A$ quasi-nilpotent.*

*Démonstration.* Voir **[14]**, Théorème 1.5].

THÉORÈME 1.6. *Soit $A$ un opérateur fermé. Alors les conditions suivantes sont* *équivalentes*:

(1) $\lambda_0 \in \sigma(A)$ *est isolé dans* $\sigma(A)$;

(2) $H = H_0(A - \lambda_0 I) \oplus K(A - \lambda_0 I)$ *et* $H_0(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$

(*où* $\oplus$ *est la somme topologique*).

*Démonstration.*

(1)$\Rightarrow$(2). Sans perte de généralité prenons $\lambda_0 = 0$, donc 0 est isolé dans $\sigma(A)$ et par le théorème de "séparation du spectre" on a $H = N \oplus M$, où $N$ et $M$ sont invariants par $A$ et $\sigma(A \mid N) = \{0\}$, $0 \notin \sigma(A \mid M)$. D'après le Lemme 5.8.c **[11]** on a $N = H_0(A)$ (en particulier $H_0(A) \neq \{0\}$) et d'autre part $0 \in \rho(A \mid M) \Rightarrow A \mid M$ est surjectif$\Rightarrow$ $A(M \cap D(A)) = M$ et $M$ fermé$\Rightarrow M \subseteq K(A)$; donc

$$H = N \oplus M = H_0(A) \oplus M = H_0(A) + K(A),$$

montrons que $H_0(A) \cap K(A) = \{0\}$. Remarquons que

$$H_0(A) \cap K(A) = K(A \mid H_0(A));$$

"$\supseteq$" est évident et l'autre inclusion découle du fait que

$$u = A^n v_n \in H_0(A) \Rightarrow v_n \in H_0(A).$$

Comme $H_0(A) = N$ est fermé$\Rightarrow A \mid H_0(A)$ est quasi-nilpotent (cf. Proposition 1.5) et d'après la Proposition 1.4 on a $K(A \mid H_0(A)) = \{0\}$ on voit que $H_0(A) \cap K(A) = \{0\}$ d'où $H = H_0(A) \oplus K(A)$ et $H_0(A) \neq \{0\}$.

(2)$\Rightarrow$(1). $H = H_0(A) \oplus K(A) \Rightarrow H_0(A)$ est fermé$\Rightarrow A \mid H_0(A)$ est quasi-nilpotent i.e. $\sigma(A \mid H_0(A)) = \{0\}$, de même (2)$\Rightarrow K(A)$ est fermé$\Rightarrow A \mid K(A)$ est surjectif et $H_0(A) \cap K(A) = \{0\} \Rightarrow N(A) \cap K(A) = \{0\} \Rightarrow A \mid K(A)$ est injectif donc $0 \in \rho(A \mid K(A))$ et comme l'ensemble résolvant est ouvert$\Rightarrow \exists V$ voisinage de zéro dans $\mathbb{C}$ inclus dans $\rho(A \mid K(A))$ donc $\forall \lambda \in V - \{0\}$ on a $\lambda \in \rho(A \mid H_0(A)) \cap \rho(A \mid K(A)) = \rho(A) \Rightarrow 0$ est isolé dans $\sigma(A)$.

REMARQUE 1.7. Le théorème précédent généralise le Théorème 5.8.A. et le Théorème 5.8.D. de Taylor **[11]**, car si $\lambda_0$ est un pôle d'ordre $d$, alors on a

$$H_0(A - \lambda_0 I) = N((A - \lambda_0 I)^d) \quad \text{et} \quad K(A - \lambda_0 I) = R((A - \lambda_0 I)^d).$$

PROPOSITION 1.8. *Si $A$ est fermé avec $\overline{D(A)} = H$ on a*

$$\overline{H_0(A)} \subseteq K(A^*)^\perp.$$

*Démonstation.* Montrons que $H_0(A) \subseteq K(A^*)^\perp$, soit $w \in H_0(A)$ et $u \in K(A^*)$, par définition de $K(A^*)$ on *a*

$$\forall n \geq 0, u = A^{*n} v_n \quad \text{avec} \quad v_n \in D(A^{*n}) \quad \text{et} \quad \|v_n\| \leq a^n \,.\, \|u\|$$

d'où

$$(w, u) = (w, A^{*n} v_n) = (A^n w, v_n) \ \forall n \geq 0$$

car $w \in H_0(A) \subseteq D(A^n)$. Donc

$$|(w, u)| \leq \|A^n w\| \,.\, \|v_n\| \leq a^n \,.\, \|A^n w\| \,.\, \|u\| \to 0$$

quand $n \to \infty$ car $w \in H_0(A)$.

Donc $|(w, u)| = 0 \Rightarrow (w, u) = 0 \Rightarrow H_0(A) \subseteq K(A^*)^\perp$ d'où $\overline{H_0(A)} \subseteq K(A^*)^\perp$.

QUESTION 1. A-t-on l'inclusion inverse i.e.

$$K(A^*)^\perp \subseteq \overline{H_0(A)}\ ?$$

REMARQUE 1.9. La réponse à cette question est affirmative dans le cas des opérateurs $q\Phi(d)$ (voir [**9**, Proposition 2.3.2]).

**2. Quelques résultats sur les opérateurs réguliers.** Soit $A$ et $B$ deux opérateurs fermés d'un espace de Hilbert $H$ dans lui-même de domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement dans $H$.

DÉFINITION 2.1. On dira que l'opérateur $B$ est un *inverse généralisé de* $A$ et on notera $B$ (inv) $A$ si et seulement si $R(B) \subseteq D(A)$, $R(A) \subseteq D(B)$ et $ABA = A$ sur $D(A)$, $BAB = B$ sur $D(B)$.

REMARQUES. (1) Cette relation est symétrique.

(2) si $B$ (inv) $A$ alors $AB$ est un projecteur tels que $R(AB) = R(A)$ et $N(AB) = N(B)$.

(3) Inverse de Moore–Penrose: l'opérateur $\hat{A} = A \mid D(A) \cap N(A)^\perp \to \overline{R(A)}$ est injectif et à image dense dans $\overline{R(A)}$. On pose

$$B \mid R(A) = \hat{A}^{-1}, \qquad B \mid R(A)^\perp = 0.$$

On a

$$D(B) = R(A) \oplus R(A)^\perp \Rightarrow R(A) \subseteq D(B)$$

et

$$R(B) = R(\hat{A}^{-1}) = D(A) \cap N(A)^\perp \subseteq D(A)$$

et il est clair que $ABA = A$, $BAB = B$; on vérifie que, ainsi défini $B$ est un inverse généralisé de $A$. On voit facilement que si $R(A)$ est fermé alors $B$ est borné.

DÉFINITION 2.2. $A$ est dit *régulier* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A) \quad \text{et} \quad R(A) \quad \text{est fermé.}$$

EXEMPLES.
(1) $A$ surjectif.
(2) $A$ injectif et $R(A)$ fermé.

LEMMA 2.3. *Les propositions suivantes sont équivalentes*:
(a) $\forall m \in \mathbb{N}, \quad N(A) \subseteq R(A^m)$;
(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A)$;
(c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad N(A^n) \subseteq R(A^m)$.

*Démonstration*. (a)$\Rightarrow$(b) par induction sur $n$; pour $n = 0$ c'est évident et pour $n = 1$ c'est une conséquence immédiate de (a); supposons que (b) est démontré pour $n = k$ et soit

$$u \in N(A^{k+1}) \Rightarrow A^k u \in N(A) \subseteq R(A^{k+1})$$

par (a). Donc $\exists v \in N(A^{k+2})$ tel que $A^k u = A^{k+1} v \Rightarrow u = Av + w$ où $w \in N(A^k) \subseteq R(A)$ par hypothése d'induction. Donc $u \in R(A)$ c'est-à-dire $N(A^{k+1}) \subseteq R(A)$.

(b)$\Rightarrow$(c) par induction sur $m$, pour $m = 0$ et $m = 1$ d'après (b) on a (c) $\forall n \in \mathbb{N}$. Supposons que (c) est démontré pour $m = k$ et $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in N(A^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors (b)$\Rightarrow \exists v \in N(A^{n+1})$ tel que $Av = u$ et comme par hypothèse d'induction $N(A^{n+1}) \subseteq R(A^k)$ on voit que $v \in R(A^k) \Rightarrow u \in R(A^{k+1})$ ce qui établit (c).

(c)$\Rightarrow$(a). Il suffit de prendre dans (c) $n = 1$.

Proposition 2.4. *Soit $B$ un inverse généralisé quelconque de $A$ et $A$ régulier. Alors on a*

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \le k \le n$, $N(A^k) \subseteq R(A^{n-k+1})$,

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B : R(A^{n+1}) \to R(A^n)$,

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B : N(A^n) \to N(A^{n+1})$.

*Démonstration.* (1) Par induction sur $k$ et en appliquant le Lemma 2.3 et la Définition 2.2. (2) Soit $u \in R(A^{n+1}) \Rightarrow \exists v \in D(A^{n+1})$ tel que $u = A^{n+1}v$. On a

$$(BA - I)A^n v \in N(A) \subseteq R(A^n)$$

du fait que $A$ est régulier et du Lemma 2.3; comme $A^n v \in R(A^n)$ donc

$$BA^{n+1} v \in R(A^n) \Rightarrow Bu \in R(A^n).$$

(3) Soit $u \in N(A^n)$. $A$ régulier$\Rightarrow N(A^n) \subseteq R(A) \Rightarrow u \in R(A)$. Donc $\exists v \in D(A)$ tel que $u = Av$, $A^{n+1}Bu = A^{n+1}BAv = A^n ABAv = A^n Av = A^n u = 0$. Donc $A^{n+1}Bu = 0 \Rightarrow Bu \in N(A^{n+1})$.

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses de la Proposition* 2.4 *on a*

$$B^k : N(A) \to N(A^{k+1}),$$
$$B^k : R(A^{k+1}) \to R(A).$$

*Démonstration.* Se déduit à partir de (2) et (3) de la Proposition 2.4.

Il est bien connu que l'ensemble résolvant de $A$ qu'on note

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I)^{-1} \quad \text{existe et est borné}\}$$

est ouvert dans $\mathbb{C}$ et que l'opérateur $R(A, \lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique dans $\rho(A)$. On va donner une généralisation de $\rho(A)$ où la notion d'inverse est remplacée par celle d'inverse généralisé. Notons $\operatorname{reg}(A)$ l'ensemble résolvant généralisé de $A$ défini par

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(A) = \{\lambda_0 \in \mathbb{C} \mid \exists U_0 & \text{ voisinage de } \lambda_0 \text{ dans } \mathbb{C}, \text{ tel que} \\ & \forall \lambda \in U_0, \exists B_\lambda \text{ opérateur continu sur } H \text{ à valeurs} \\ & \text{dans } D(A) \text{ et analytique dans } U_0, \text{ tel que } B_\lambda \text{ soit} \\ & \text{un inverse généralisé de } (A - \lambda I)\}. \end{aligned}$$

On a évidemment $\rho(A) \subseteq \operatorname{reg}(A)$. Le théorème suivant montre le lien entre $\operatorname{reg}(A)$ et les opérateurs réguliers.

THÉORÈME 2.6. *Soit $A$ un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Alors sont équivalents*:
(i) $\lambda_0 \in \operatorname{reg}(A)$;
(ii) $A - \lambda_0 I$ *est régulier.*

*Démonstration.* (i)$\Rightarrow$(ii). $(A-\lambda_0 I)B_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}$ est une projection sur $R(A-\lambda_0 I)$ (voir remarque (2) de la Définition 2.1). Montrons que $P_{\lambda_0}$ est un opérateur continu de domaine égal à $H$. Pour cela on $a$: si $A$ un opérateur fermé, $B$ un opérateur continu tel que $R(B) \subseteq D(A)$, alors $AB$ est continu.

On en déduit que $P_{\lambda_0}$ est continu ($\forall \lambda_0 \in \operatorname{reg}(A)$). Or $P_{\lambda_0}$ est un projecteur ($P^2_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}$), donc $R(P_{\lambda_0})$ est fermé dans $H$, comme $R(P_{\lambda_0}) = R(A-\lambda_0 I)$ on a donc montré que $R(A-\lambda_0 I)$ est fermé. Il reste à montrer que $N((A-\lambda_0 I)^n) \subseteq R(A-\lambda_0 I)$, $\forall n \geq 0$. Tout d'abord, on remarque que

$$\text{si} \quad \lambda \neq \lambda_0, \quad N((A-\lambda_0 I)^n) \subseteq R(A-\lambda I) \quad \forall n \geq 0,$$

en effet, soit $u \in D((A-\lambda_0 I)^n)$ et $(A-\lambda_0 I)^n u = 0$, on a

$$[(A-\lambda I) + (\lambda - \lambda_0)I]^n u = 0.$$

La formule du binôme de Newton nous donne

$$\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n}(A-\lambda I)^j \,.\, (\lambda-\lambda_0)^{n-j}\right] u = 0 \Rightarrow (\lambda-\lambda_0)^n u = -\sum_{j=1}^{n} \binom{j}{n}(A-\lambda I)^j(\lambda-\lambda_0)^{n-j} u,$$

d'où $(\lambda-\lambda_0)^n u \in R(A-\lambda I)$; puisque $\lambda \neq \lambda_0$ on a $u \in R(A-\lambda I)$; donc $N((A-\lambda_0 I)^n) \subseteq R(A-\lambda I)$ si $\lambda_0 \neq \lambda$; donc pour $u \in N((A-\lambda_0 I)^n)$ on a $u \in R(A-\lambda I) = R(P_\lambda)$. Donc

$$u = P_\lambda u \Rightarrow u = (P_\lambda - P_{\lambda_0})u + P_{\lambda_0} u,$$

or $P_\lambda$ est une fonction analytique en $\lambda_0$ donc continue sur un voisinage $U$ de $\lambda_0$, faisons tendre $\lambda$ vers $\lambda_0$ dans l'expression précédente alors $P_\lambda \to P_{\lambda_0}$ d'où $u = P_{\lambda_0} u$ i.e. $u \in R(P_{\lambda_0}) = R(A-\lambda_0 I)$ donc

$$N((A-\lambda_0 I)^n) \subseteq R(A-\lambda_0 I), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $(A-\lambda_0 I)$ est régulier.

(ii)$\Rightarrow$(i). Sans perte de généralité on supposera $\lambda_0 = 0$. $A$ et $I \mid D(A) : D(A) \to H$ seront considérés comme des opérateurs dans $B(D(A), H)$, où $D(A)$ est muni de la norme du graphe. Soit $B_0$ l'inverse généralisé de $A$ respectant les décompositions $H = R(A) \oplus R(A)^\perp$ et $D(A) = N(A) \oplus N(A)^\perp$. Alors $B_0 \in B(H, D(A))$ car $R(A)$ est fermé. Remarquons que $B_0 A = I - P$ où $P : D(A) \to D(A)$ est la projection orthogonale sur $N(A)$. Pour $|\lambda| < \|B_0\|^{-1}$ montrons que

$$(I - \lambda B_0)^{-1}(A - \lambda I) : N(A) \to R(A).$$

Soit $u \in N(A)$; on a

$$(I-\lambda B_0)^{-1}(A-\lambda I)u = -(I-\lambda B_0)^{-1}\lambda u.$$

Par la série de Neumann on obtient

$$(I-\lambda B_0)^{-1}(A-\lambda I)u=-\sum_{j\geq 0}\lambda^{j+1}B_0^j u$$

et en utilisant le Corollaire 2.5 et la régularité de $A$, on en déduit que

$$(I-\lambda B_0)^{-1}(A-\lambda I)u\in R(A),$$

$R(A)$ étant fermé. Ceci montre que les hypothèses du Théorème 3.9 [**12**] sont vérifiées (remarquons que dans [**12**, Théorème 3.9] la condition (3.10) doit se lire $(I+\lambda A^+)^{-1}B$ envoie $N(A)$ dans $R(A)$). Par conséquent

$$B_\lambda=B_0(I-\lambda B_0)^{-1}=(I-\lambda B_0)^{-1}B_0$$

est un inverse généralisé de $A-\lambda I$, analytique et à valeur dans $D(A)$ pour $|\lambda|<\|B_0\|^{-1}$. Donc $0\in \operatorname{reg}(A)$.

Remarque 2.7.

$$\rho(A)\subseteq \operatorname{reg}(A)\subseteq \rho(A)\cup\sigma_d(A)\cup\sigma_r(A).$$

En effet si $\lambda\in\sigma_c(A)\Rightarrow R(A-\lambda I)$ n'est pas fermé par conséquent $\lambda\notin \operatorname{reg}(A)$.

Proposition 2.8 (cf. [**8**, Prop. 3.3.3.]). *Soit $A$ un opérateur régulier et $D(A)$ dense dans $H$. Alors $A^*$ est régulier et*

$$\forall n\geq 0,\quad N(A^n)^\perp=R(A^{*n})\quad \textit{et}\quad N(A^{*n})^\perp=R(A^n).$$

Remarque. $N(A^{*n})^\perp=R(A^n)\Rightarrow R(A^n)$ est fermé.

Corollaire 2.9. *$D(A)$ dense dans $H$. Alors*

$$\operatorname{reg}(A^*)=\overline{\operatorname{reg}(A)}\quad (\textit{conjugué complexe})$$

*Démonstration.*

$$\lambda\in \operatorname{reg}(A^*)\Leftrightarrow A^*-\lambda I \text{ est régulier}\Leftrightarrow A-\bar\lambda I \text{ est régulier}$$
$$\Leftrightarrow \bar\lambda\in \operatorname{reg}(A)\Leftrightarrow\lambda\in\overline{\operatorname{reg}(A)}\,.$$

Proposition 2.10. *Si $A$ est régulier alors*

$$\overline{H_0(A)}=\overline{\bigcup_{j\geq 0}N(A^j)}.$$

*Démonstration.* Tout d'abord on a le lemma suivant.

Lemme. *Si $A$ est régulier alors*

$$\gamma(A^{n+m})\geq\gamma(A^n)\,.\,\gamma(A^m)\quad (\forall n,m\in\mathbb{N}),$$

*où $\gamma(A)$ est la conorme de $A$* (voir [**6**], [**5**]).

*Démonstration.* Voir [**5**].

*Démonstration de la proposition.* Soit $u \in H_0(A)$ et $u \perp \bigcup_{j\geq 0} N(A^j) \Rightarrow \forall j \geq 0$, $u \perp N(A^j)$ or d'après la Proposition 2.8; $A$ régulier $\Rightarrow \forall j \geq 0$, $R(A^j)$ est fermé d'où d'après ([**6**, Théorème IV 1.6] $\forall j \geq 0$, $\gamma(A^j) > 0$ et comme

$$u \perp N(A^j) \Rightarrow \forall j \geq 0 \; \|A^j u\| \geq \gamma(A^j) \, \|u\|$$

et d'après le lemme précédent on a

$$\|A^j u\| \geq \gamma(A)^j \, \|u\| \Rightarrow \lim_{j\to\infty} \|A^j u\|^{1/j} \geq \gamma(A) > 0 \Rightarrow u \notin H_0(A),$$

ce qui contredit l'hypothèse $u \in H_0(A)$. Donc $u = 0$,

$$H_0(A) \cap \left[\bigcup_{j\geq 0} N(A^j)\right]^{\perp} = \{0\}$$

et comme $\bigcup_{j\geq 0} N(A^j) \subseteq H_0(A)$ on en déduit que

$$\overline{H_0(A)} = \overline{\bigcup_{j\geq 0} N(A^j)}.$$

Théorème 2.11. *$A$ régulier et $H_0(A)$ fermé $\Rightarrow H_0(A) = \{0\}$.*

*Démonstration.* Soit $\hat{A} = A \mid H_0(A)$ la restriction de $A$ à $H_0(A)$. $H_0(A)$ est fermé donc c'est un Hilbert et comme $A(H_0(A)) \subseteq H_0(A)$ on a: $\hat{A} : H_0(A) \to H_0(A)$ et on voit que $\hat{A} \in B(H_0(A))$ (car $H_0(A) \subseteq D(A)$) et $H_0(A) = H_0(\hat{A}) \Rightarrow \hat{A}$ est quasi-nilpotent (d'après la proposition 1.5). $A$ régulier $\Rightarrow \forall j \geq 0$, $N(A^j) \subseteq R(A) \Rightarrow \bigcup_{j\geq 0} N(A^j) \subseteq R(A)$. $R(A)$ fermé $\Rightarrow \overline{\bigcup_{j\geq 0} N(A^j)} \subseteq R(A)$, et d'après la Proposition 2.10 on en déduit que $H_0(A) = \overline{H_0(A)} \subseteq R(A)$, donc $H_0(A) = H_0(A) \cap R(A) = A(H_0(A)) = \hat{A}(H_0(A))$ (la deuxième égalité est due au fait que si $u = Av \in H_0(A)$ alors $v \in H_0(A)$).

Or $\hat{A}(H_0(A)) = H_0(A) \Rightarrow \hat{A}$ est surjectif $\Rightarrow H_0(A) = K(\hat{A})$ or $\hat{A}$ est quasi-nilpotent $\Rightarrow K(\hat{A}) = \{0\}$ d'après la Proposition 1.4. D'où $H_0(A) = \{0\}$.

Corollaire 2.12. *Soit $T \in B(H)$. Si l'une des quatre conditions suivantes est vérifiée*

(1) $\dim H < \infty$,

(2) *$T$ spectral,*

(3) *$T$ décomposable,*

*alors* $\mathrm{reg}(T) = \rho(T)$.

*Démonstration.* Dans chacun des cas on montre que $H_0(T - \lambda I)$ est fermé; donc si $\lambda \in \mathrm{reg}(T)$, d'après le Théorème 2.11. On en déduit que $H_0(T - \lambda I) = \{0\}$. Donc $N(T - \lambda I) = \{0\}$ si $\lambda \in \mathrm{reg}(T)$. En utilisant la symétrie avec l'adjoint on obtient $N(T^* - \bar{\lambda} I) = \{0\}$ si $\lambda \in \mathrm{reg}(T)$. Donc $R(T - \lambda I) = H$ si $\lambda \in \mathrm{reg}(T)$, d'où $\mathrm{reg}(T) \subseteq \rho(T)$.

Lemme 2.13. *Soit $T = XNX^{-1} + Q$ la décomposition canonique de l'opérateur spectral*

$T$ (voir [**4**]). *Alors*

$$H_0(T) = N(XNX^{-1}) = XN(N)$$

*et donc fermé.*

*Démonstration.* On a $XNX^{-1}$ commute avec $Q \Rightarrow T$ est quasi-nilpotent équivalent à $XNX^{-1}$ en utilisant les termes de [**3**] et d'après le Corollaire 3.5 de [**3**], page 52, on a $H_T(F) = H_{XNX^{-1}}(F)$ pour tout $F$ fermé de $\mathbb{C}$ or $H_T(0) = H_0(T)$, toujours d'après [**3**, p. 113], donc $H_0(T) = H_0(XNX^{-1})$ comme $N$ est normal $\Rightarrow H_0(N) = N(N)$; on en déduit que $H_0(T) = H_0(XNX^{-1}) = XH_0(N) = XN(N) = N(XNX^{-1})$; donc $H_0(T)$ est fermé comme noyau d'un opérateur continu.

Corollaire 2.14. *Si* $H \neq \{0\}$ *alors* $\mathrm{Reg}(H) \cap qN = \emptyset$, où

$$\mathrm{Reg}(H) = \{T \in B(H) \mid T \textit{ régulier}\}.$$

*Démonstration.* La Proposition 1.5 $\Rightarrow$ si $A \in qN$ alors $H_0(A) = H$ donc $H_0(A)$ est fermé et d'après le Théorème 2.11, $A$ régulier et $H_0(A)$ fermé $\Rightarrow H_0(A) = \{0\}$. Donc $H = \{0\}$ et comme $0 \notin \mathrm{Reg}(H)$ on en déduit que $\mathrm{Reg}(H) \cap qN = \emptyset$.

Corollaire 2.15. *Si* $d \geq 1$ *alors*

$$q\Phi(d) \cap qN = \{\textit{nilpotents de degré } d\}.$$

*Démonstration.* On utilise la décomposition de Kato et le Corollaire 2.14.

**3. Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux.** Dans tout ce qui suit $T$ désigne un opérateur borné de $H$ dans lui-même. Posons $T_0 = T^*$ et pour $j \in \mathbb{N}$, $T_{j+1} = i[T, T_j]$, le commutateur de $T$ et de $T_j$ multiplié par $i = \sqrt{-1}$.

Définition 3.1. Nous dirons que $T$ est *paranormal* si $\lim_{n\to\infty} \|T_n\|^{1/n} = 0$; nous écrivons alors $T \in pN$.

Remarques. La notion des opérateurs paranormaux a été introduite par J. P. Labrousse dans [**8**] et notamment on $y$ trouve les démonstrations des résultats suivants:

(1) $T$ normal $\Rightarrow T \in pN$;
(2) $T$ quasi-nilpotent $\Rightarrow T \in pN$;
(3) $T \in pN \Leftrightarrow T^* \in pN$;
(4) on a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T^*T^n = i^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-iT)^j T_{n-j}.$$

Définitions 3.2. Un opérateur $X \in B(H)$ est dit *quasi-inversible* si $X$ est injectif et à image dense dans $H$. Un opérateur $T$ est une transformation *quasi-affine* d'un opérateur $S \in B(H)$ s'il existe un opérateur $X$ quasi-inversible tel que $XT = SX$. On note

$$\mathcal{Q}_{af} = \{T \in B(H) \mid T \text{ une transformation quasi-affine d'un opérateur quasi-nilpotent}\},$$

et

$$\mathcal{Q}_{af}^* = \{T \in B(H) \mid T^* \in \mathcal{Q}_{af}\}.$$

REMARQUES.
(1) $qN \notin \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af} \notin$ l'adhérence des opérateurs nilpotents ([**9**, ch. III]).
(2) Apostol [**2**] a caractérisé les opérateurs de $\mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af}$ par le théorème suivant.

THÉORÈME (Apostol). *Si $H$ est Hilbert séparable alors*

$$\overline{H_0(T)} = \overline{H_0(T^*)} = H \Leftrightarrow T \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af}.$$

*Démonstration.* Voir [**2**].

THÉORÈME 3.3. *Soit $T$ un opérateur paranormal. Alors* (1) *et* (2) *sont équivalents*:
(1) $R(T) + \overline{H_0(T)}$ *fermé dans* $H$, $R(T^*) + \overline{H_0(T^*)}$ *fermé dans* $H$;
(2) (a) $\exists M, N$ *deux sous-espaces fermés dans* $H$ *tels que* $H = M \oplus N$,
(b) $T(M) \subseteq M$, $T^*(M) \subseteq M$ *et si on note* $T_0 = T \mid M$, $T_0^* = T^* \mid M$ *alors* $T_0$ *et* $T_0^*$ *sont réguliers*,
(c) $T(N) \subseteq N$, $T^*(N) \subseteq N$ *et* $T \mid N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}^*_{af}$.

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin de quelques lemmes et propositions.

LEMME 3.4. *Si $T$ est paranormal alors*

$$T^*(H_0(T)) \subseteq H_0(T).$$

*Démonstration.* La remarque (4) de la Définition 3.1

$$\Rightarrow T^nT^* = (-i)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} T_{n-j}(iT)^j.$$

En appliquant cette dernière égalité et le fait que $T$ est paranormal, on montre que $T^*u \in H_0(T)$ si $u \in H_0(T)$.

REMARQUES 3.5. (1) Dans la suite on notera

$$H_0 = H_0(T), \qquad H_0^* = H_0(T^*) \quad \text{et} \quad K = K(T), \qquad K^* = K(T^*).$$

(2) $\qquad T(H_0) \subseteq H_0, \qquad T^*(H_0) \subseteq H_0 \Leftrightarrow T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp, \qquad T^*(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp.$

LEMME 3.6. *Si $T$ est paranormal et $R(T) + \overline{H_0}$ est fermé dans $H$ alors $\tilde{T} = T \mid H_0^\perp$ est injectif et à image fermé.*

*Démonstration.* D'après la Remarque 3.5 (2) on a $T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$, donc $\tilde{T}: H_0^\perp \to H_0^\perp$; par ailleurs

$$R(T) \subseteq T(H_0^\perp + \bar{H}_0) \subseteq T(H_0^\perp) + \bar{H}_0 \Rightarrow R(T) + \bar{H}_0 \subseteq T(H_0^\perp) + \bar{H}_0$$

d'où $R(T) + \bar{H}_0 = T(H_0^\perp) + \bar{H}_0 \Rightarrow T(H_0^\perp) + \bar{H}_0$ est fermé (1), et comme $T(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$ on a $T(H_0^\perp) \cap \bar{H}_0 = \{0\}$(2). Alors (1) et (2) et la Proposition 2.1.1 [**8**] $\Rightarrow T(H_0^\perp)$ est fermé, donc $R(\tilde{T})$ est fermé. D'autre part

$$N(\tilde{T}) = N(T) \cap H_0^\perp \subseteq H_0 \cap H_0^\perp = \{0\} \Rightarrow N(\tilde{T}) = \{0\},$$

donc $\tilde{T}$ est injectif.

LEMME 3.7. *Si $T$ est paranormal et $R(T)+\bar{H}_0$ est fermé dans $H$ alors $H_0^{\perp}=K^*$.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 3.6 on a

$$T \mid H_0^{\perp} \text{ est injectif et } T(H_0^{\perp}) \text{ est fermé} \Rightarrow T^* \mid H_0^{\perp} \text{ est surjectif;}$$

donc $H_0^{\perp}=K(T^* \mid H_0^{\perp}) \subseteq K(T^*)=K^* \Rightarrow H_0^{\perp} \subseteq K^*$ et comme l'inclusion inverse est toujours vérifié (voir la Proposition 1.8) on a $H_0^{\perp}=K^*$.

REMARQUES. (a) Sous l'hypothèse $R(T^*)+\overline{H_0^*}$ fermé et en utilisant la symétrie de $T$ et $T^*$ on a $H_0^{*\perp}=K$.

(b) Le Lemma 3.7 et la remarque (a) $\Rightarrow K$, $K^*$ sont fermés dans $H$.

COROLLAIRE 3.8. *Si $T$ est paranormal et $R(T)+\overline{H_0(T)}$ et $H_0(T)$ sont fermés alors $\exists M$, $N$ deux sous-espaces fermés de $H$ tels que*

(1) *$H=M \oplus N$,*

(2) *$T(M) \subseteq M$ et $T \mid M$ est régulier,*

(3) *$T(N) \subseteq N$ et $T \mid N$ est quasi-nilpotent.*

*Démonstration.* On prend $M=H_0(T)^{\perp}$ et $N=H_0(T)$; on a $H=H_0^{\perp} \oplus H_0=M \oplus N$ d'où (1).

(2) se déduit du Lemme 3.6.

(3) On a $N=H_0(T)=H_0(T \mid N)$ et d'après la Proposition 1.5 ceci entraîne que $T \mid N$ est quasinilpotent.

LEMME 3.9. *Sous les hypothèses* (1) *du Théorème* 3.3 *on a $T^*(K) \subseteq K$.*

*Démonstration.* $T$ paranormal $\Rightarrow T^*$ paranormal, donc $T^*(H_0^{*\perp}) \subseteq H_0^{*\perp}$ et $K=H_0^{*\perp}$, d'où $T^*(K) \subseteq K$.

PROPOSITION 3.10. *Sous les hypothèses* (1) *du Théorème* 3.3 *on a*

$$K=T^*(K) \oplus K \cap N(T), \qquad K^*=T(K^*) \oplus K^* \cap N(T^*).$$

*Démonstration.* On pose $\hat{T}=T \mid K$ et $\hat{T}^*=T^* \mid K$.

$$R(\hat{T})=K \text{ qui est fermé} \Rightarrow R(\hat{T}^*) \text{ est fermé} \Rightarrow K=N(\hat{T}) \oplus N(\hat{T})^{\perp}=N(\hat{T}) \oplus R(\hat{T}^*).$$

Or $N(\hat{T})=K \cap N(T)$ d'où

$$K=R(\hat{T}^*) \oplus K \cap N(T)=T^*(K) \oplus K \cap N(T).$$

Par symétrie entre $T$ et $T^*$ on trouve

$$K^*=T(K^*) \oplus K^* \cap N(T^*).$$

PROPOSITION 3.11. *Sous les hypothèses* (1) *du Théorème* 3.3 *on a*

$$K=K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp}, \qquad K^*=K^* \cap K \oplus K^* \cap K^{\perp}.$$

*Démonstration.* $T$ envoie $K \cap K^{*\perp}$ dans lui-même car $T(K)=K$ et $K^{*\perp}=\bar{H}_0$ et $T(\bar{H}_0) \subseteq \bar{H}_0$; donc $T: K \cap K^{*\perp} \rightarrow K \cap K^{*\perp}$. Montrons que $T$ est surjectif. $x \in K \cap K^{*\perp}$

$\Rightarrow x \in K \Rightarrow \exists y \in K$ tel que $x = Ty$. Soit $z \in K^* \Rightarrow \exists z' \in K^*$ tel que $z = T^*z'$; on a

$$(y, z) = (y, T^*z') = (Ty, z') = (x, z') = 0$$

car $x \in K^{*\perp}$ et $z' \in K^*$; donc $(y, z) = 0 \Rightarrow y \in K^{*\perp}$ d'où la surjectivité de $T$.

Soit maintenant $K'$ le complément orthogonal de $K \cap K^{*\perp}$ dans $K$ i.e. $K = K \cap K^{*\perp} \oplus K'$. Soit $u \in K'$; alors $u \in K$ et d'après la Proposition 3.10 $\exists v \in K$ et $w \in K \cap N(T)$ tel que $u = T^*v + w$. Comme

$$u \perp K \cap K^{*\perp} \supseteq K \cap N(T)$$

car $N(T) \subseteq \bar{H}_0 = K^{*\perp}$, donc

$$0 = (u, w) = (T^*v, w) + (w, w) = \|w\|^2$$

car $(T^*v, w) = 0$, donc $\|w\|^2 = 0 \Rightarrow w = 0$ et $u = T^*v$.

Soit encore $x$ un élément quelconque de $K \cap K^{*\perp}$; $\exists y \in K \cap K^{*\perp}$ tel que $x = Ty$, donc

$$(v, x) = (v, Ty) = (T^*v, y) = (u, y) = 0$$

car $u \in K'$ et $y \in K \cap K^{*\perp}$, donc $v \perp K \cap K^{*\perp}$ et $v \in K \Rightarrow v \in K'$ et par conséquent $T^*(K') = K'$ et $K' \subseteq K^*$ car $K'$ est fermé et $K' \subseteq C_0(T^*)$; donc $K' \subseteq K \cap K^*$ ou encore

$$K \subseteq K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp} \subseteq K$$

d'où $K = K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp}$.

L'autre égalité se déduit en utilisant la symétrie entre $T$ et $T^*$.

PROPOSITION 3.12. *Soit $M = K + K^*$. Alors $T^*$ envoie $M$ dans lui-même et on a*

$$M = T^*(M) \oplus K \cap N(T).$$

*Démonstration.* Soit $u \in M$, alors $\exists v \in K$ et $v^* \in K^*$ tel que $u = v + v^*$ en outre $\exists w^* \in K^*$ tel que $v^* = T^*w^*$ et d'après la Proposition 3.10 (i.e. $K = T^*(K) \oplus K \cap N(T)$) et $v \in K \Rightarrow \exists y \in K$ et $z \in K \cap N(T)$ tel que $v = T^*y + z$, donc $u = v + v^* = T^*(y + w^*) + z$ et comme $y + w^* \in K + K^* = M$ et $z \in K \cap N(T)$ donc $M \subseteq T^*(M) + K \cap N(T)$ et comme

$$T^*(M) = T^*(K) + T^*(K^*) \subseteq K + K^* \subseteq M,$$

donc $T^*(M) + K \cap N(T) \subseteq M$ d'où $M = T^*(M) \oplus K \cap N(T)$ car $T^*(M) \perp N(T)$.

COROLLAIRE 3.13.

$$M = K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp} \oplus K^\perp \cap K^*,$$

*$M$ est fermé comme somme orthogonale de fermés.*

*Démonstration.* $M = K + K^*$ et le résultat se déduit immédiatement de la Proposition 3.11.

On pose $N = M^\perp = (K + K^*)^\perp = K^\perp \cap K^{*\perp} = \bar{H}_0 \cap \bar{H}_0^*$; on a $H = M \oplus N$.

Proposition 3.14.
*Sous l'hypothèse* (1) *du Théorème* 3.3 *on a*

$$T_0 = T \mid M \quad \textit{est régulier.}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que $N(T_0) \subseteq R(T_0^j)\ \forall j \geq 0$. On a

$$N(T_0) = N(T) \cap M = N(T) \cap [T^*(M) \oplus K(T) \cap N(T)]$$

(voir Proposition 3.12.) Comme $N(T) \perp T^*(M)$ et $K \cap N(T) \subseteq N(T)$, on a $N(T) \cap M = K \cap N(T)$

$$\Rightarrow N(T_0) = K \cap M \subseteq R(T^j) \cap M\ \forall j \geq 0,$$

or

$$T(M) \subseteq M, \qquad T(N) \subseteq N \Rightarrow R(T^j) \cap M = R(T_0^j)$$

d'où $N(T_0) \subseteq R(T_0^j)\ \forall j \geq 0$.

Montrons que $R(T_0) = T(M)$ est fermé. Remarquons que $H = M + N = M + \bar{H}_0$ car $N \subseteq \bar{H}_0$, donc

$$R(T) \subseteq T(M + \bar{H}_0) \subseteq T(M) + \bar{H}_0,$$

donc $R(T) + \bar{H}_0 = T(M) + \bar{H}_0$ est fermé (1), car $R(T) + \bar{H}_0$ est fermé par hypothèse. Montrons maintenant que $T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N$, et tout d'abord que $\bar{H}_0 + K = N \oplus K$. On a

$$\bar{H}_0 = K^{*\perp} \subseteq K^{*\perp} \cap [M + N] = K^{*\perp} \cap M + N$$

car $N \subseteq \bar{H}_0 \subseteq K^{*\perp}$, donc $\bar{H}_0 \subseteq K^{*\perp} \cap M + N$ (2).

D'après le Corollaire 3.13 on a

$$\begin{aligned} K^{*\perp} \cap M &= K^{*\perp} \cap [K \cap K^* \oplus K \cap K^{*\perp} \oplus K^{\perp} \cap K^*] \\ u &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\Rightarrow u - u_2 = u_1 + u_3 \in K^* \cap K^{*\perp} = \{0\} \\ &\Rightarrow u = u_2 \in K^{*\perp} \cap K \\ &\Rightarrow K^{*\perp} \cap M \subseteq K^{*\perp} \cap K, \end{aligned}$$

d'où $K^{*\perp} \cap M = K^{*\perp} \cap K$. Donc d'après (2) on a

$$\bar{H}_0 \subseteq K^{*\perp} \cap M + N = K^{*\perp} \cap K + N \Rightarrow K + \bar{H}_0 \subseteq N + K$$

d'où $K + \bar{H}_0 = N \oplus K$ car $N \subseteq K^{\perp}$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} K \subseteq T(M) &\Rightarrow T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + K + \bar{H}_0 = T(M) + K + N = T(M) + N \\ &\Rightarrow T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N. \end{aligned}$$

Or $(1) \Rightarrow R(T) + \bar{H}_0 = T(M) + \bar{H}_0 = T(M) + N \Rightarrow T(M) + N$ est fermé et

$$T(M) \subseteq M \Rightarrow T(M) \cap N \subseteq M \cap N = \{0\}.$$

Donc $T(M) + N$ est fermé et $T(M) \cap N$ est fermé. Par la Proposition 2.1.1 [**8**], on a que $T(M)$ est fermé. Donc $N(T_0) \subseteq R(T_0^j)\ \forall j \geq 0$, et $R(T_0)$ est fermé, d'où $T_0$ est régulier.

*Démonstration du Théorème* 3.3.

(1)$\Rightarrow$(2). On prend $M = K + K^*$ et $N = M^\perp$; donc $H = M \oplus N$ d'où (a) du Théorème 3.3. La Proposition 3.14$\Rightarrow T_0 = T \mid M$ est régulier d'où (b). Pour (c) on a

$$N = M^\perp = (K + K^*)^\perp = K^\perp \cap K^{*\perp} = \bar{H}_0 \cap \bar{H}_0^* \Rightarrow N = \overline{H_0(T \mid N)} = \overline{H_0(T^* \mid N)}$$

d'où, d'après le théorème (Apostol) [2], on a $T \mid N \in \mathcal{Q}_{af} \cap \mathcal{Q}_{af}^*$.

(2)$\Rightarrow$(1). Montrons d'abord que $T(M) + N$ est fermé, le fait que $H = M \oplus N \Rightarrow H$ est isomorphe à $M \times N$ et par conséquent que $T(M) + N$ est isomorphe à $T(M) \times N$, or $T(M) \subseteq M$ et $T \mid M$ est régulier$\Rightarrow T(M)$ est fermé dans $M$ d'où on déduit que $T(M) \times N$ est fermé et donc $T(M) + N$ est fermé aussi.

En outre, $T(M) + N \subseteq R(T) + N$ et

$$\text{(c)} \quad \Rightarrow N = \overline{H_0(T \mid N)} \Rightarrow N \subseteq \overline{H_0(T)},$$

donc $T(M) + N \subseteq R(T) + \bar{H}_0$. Réciproquement, $R(T) = T(M + N) \subseteq T(M) + N$, de même $\bar{H}_0 \subseteq M + N$ et

$$N \subseteq \bar{H}_0 \Rightarrow \bar{H}_0 = M \cap \bar{H}_0 + N;$$

or $M \cap \bar{H}_0 = \overline{H_0(T \mid M)} \subseteq T(M)$ car $T \mid M$ est régulier, donc $\bar{H}_0 \subseteq T(M) + N$, donc $R(T) + \bar{H}_0 \subseteq T(M) + N$, d'où $R(T) + \bar{H}_0 = T(M) + N$ qui est fermé$\Rightarrow R(T) + \bar{H}_0$ est fermé. Par symétrie, en remplaçant $T$ par $T^*$ on montre que $R(T^*) + \bar{H}_0^*$ est fermé d'où (1) du théorème.

**4. Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs spectraux.** Dans ce paragraphe nous allons utiliser plusieurs notions et résultats du chapitre XV de [4].

Le Théorème 5 de [4] (p. 1939) dit que si $T$ est spectral il peut s'écrire comme la somme d'un opérateur scalaire $S$ et un opérateur quasi-nilpotent $Q$ tel que $S.Q = Q.S$.

La théorème 4 de [4] (p. 1947) dit que pour tout opérateur scalaire $S$ il existe un opérateur continu inversible $X$ tel que $X^{-1}$ soit continu et $XSX^{-1} = \hat{S}$ soit normal.

Albrecht [1] a caractérisé les opérateurs spectraux à partir des opérateurs paranormaux et décomposable.

THÉORÈME (Albrecht [1]). *$T \in B(H)$ est de la forme $T = N + Q$ avec $N$ normal, $Q$ quasi-nilpotent, et $NQ = QN$ si et seulement si $T$ est paranormal et décomposable.*

*Remarques.*

(a) L'implication directe ($\Rightarrow$) de ce théorème a été démontré par Labrousse [8] et la réciproque a été démontré par Albrecht [1].

(b) Dans la suite nous notons $T = T_0 \oplus Q_0$ ce qui veut dire, $\exists M$, $N$ deux sous-espaces fermés de $H$ tels que $H = M \oplus N$ et $T(M) \subseteq M$, $T(N) \subseteq N$ et $T_0 = T \mid M$, $Q_0 = T \mid N$.

(c) Montrons d'abord le résultat suivant, pour les opérateurs spectraux de la forme opérateur normal $N$ plus opérateur quasi-nilpotent $Q$ qui commutent entre-eux.

THÉORÈME 4.1. *Soit $T \in B(H)$ tel que $T = N + Q$ avec $NQ = QN$, $N$ normal, $Q$*

*quasi-nilpotent. Alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) $R(T)+H_0(T)$ *fermé dans* $H$;

(2) $T=T_0\oplus Q_0$ *où* $T_0$ *est inversible et* $Q_0$ *quasi-nilpotent*;

(3) $T$ *inversible ou alors* 0 *un point isolé du spectre de* $T$;

(4) $R(T)+H_0(T)=H$.

*Démonstration.*

(1)$\Rightarrow$(2). En utilisant le théorème (Albrecht), le Corollaire 3.8 et le Lemme 2.13, on en déduit que $T=T_0\oplus Q_0$ où $T_0=T\mid H_0(T)^{\perp}$ est injectif, à image fermé et $Q_0$ quasi-nilpotent. Donc pour montrer que $T_0$ est inversible, il suffit de montrer que $N(T_0^*)=\{0\}$ car $T^*(H_0(T)^{\perp})\subseteq H_0(T)^{\perp}$; or d'après le Lemme 2.13 $H_0(T)=N(N)=N(N^*)=H_0(T^*)$ (car $N$ est normal). Par conséquent

$$N(T_0^*)=N(T^*)\cap H_0(T)^{\perp}=N(T^*)\cap H_0(T^*)^{\perp}=\{0\}$$

d'où $N(T_0^*)=\{0\}$ et donc $T_0$ est inversible.

(2)$\Rightarrow$(3). C'est un résultat classique.

(3)$\Rightarrow$(4). Si $T$ est inversible$\Rightarrow R(T)=H$ donc $R(T)+H_0(T)=H$. Si $T$ n'est pas inversible mais 0 est un point isolé de $\sigma(T)$, par le théorème 1.5 on en deduit que

$$H=K(A)+H_0(A)\subseteq R(A)+H_0(A),$$

d'où $R(T)+H_0(T)=H$.

(4)$\Rightarrow$(1). C'est évident.

Corollaire 4.2. *Si* $T$ *est spectral alors les quatre propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) $R(T)+H_0(T)$ *fermé dans* $H$;

(2) $T=T_1\oplus Q_1$ *où* $T_1$ *inversible et* $Q_1$ *quasi-nilpotent*;

(3) *Soit* $T$ *inversible, soit* 0 *est un point isolé du spectre de* $T$;

(4) $R(T)+H_0(T)=H$.

*Démonstration.* Se déduit du Théorème 4.1, en utilisant le fait que si $T$ est spectral il est similaire à $S=N+Q$ où $N$ est normal et $Q$ quasi-nilpotent et $NQ=QN$, c.à d. que $\exists X$ inversible tel que $T=X^{-1}SX$, et en remarquant que $R(T)+H_0(T)=X^{-1}(R(S)+H_0(S))$ donc $R(T)+H_0(T)$ fermé$\Leftrightarrow R(S)+H_0(S)$ fermé.

## REFERENCES

**1.** E. Albrecht, A characterization of spectral operators on Hilbert spaces, *Glasgow Math. J.* **23** (1982), 91–95.

**2.** C. Apostol, Quasi-affine transform of quasinilpotent compact operators, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **21** (1976), 813–816.

**3.** I. Colojoara et C. Foias, *Theory of generalized spectral operators* (Gordon and Breach, New York, 1968).

**4.** N. Dunford et J. Schwartz, *Linear operators, Part III: Spectral operators* (Wiley Interscience, New York, 1971).

**5.** K. H. Forster et M. A. Kaashoek, The asymptotic behaviour of the reduced minimum modulus of a Fredholm operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **49,** (1975), 123–131.

**6.** S. Goldberg, *Unbounded linear operators* (McGraw-Hill, New York, 1966).

**7.** T. Kato, Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.* **6** (1958), 261–322.

**8.** J. P. Labrousse, Les opérateurs quasi-Fredholm, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **XXIX** (1980), 161–258.

**9.** M. Mbekhta, *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux* (Thèse 3ème cycle, Université de Nice, 1984).

**10.** P. Saphar, Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, *Bull. Soc. Math. France* **92** (1964), 363–384.

**11.** A. Taylor, *Introduction to functional analysis* (Wiley, 1958).

**12.** M. Z. Nashed, Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operator equations, *Generalized inverses and applications,* (Ed. Z. Nashed, Academic Press, 1976), 325–396.

**13.** F. H. Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions* (Reidel, 1982).

**14.** P. Vrbova, On local spectral properties of operators in Banach spaces, *Czechoslovak Math. J.* **23** (1973), 483–492.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.A. 168 AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ DE NICE
PARC VALROSE
F-06034 NICE CEDEX