BULLETIN 13 (2), 1970

SUR UNE CONJECTURE DE R. M. ROBINSON

PAR
ANDRÉ GIROUX

Dans un récent article [2, p. 379], R. M. Robinson a émis une conjecture intéressante sur le diamètre transfini des ensembles compacts et symétriques du plan. La conjecture est la suivante:

Soit E un ensemble compact de points du plan, symétrique par rapport à l'axe réel R. Pour $n \geq 2$, choisissons n points $z_1, \ldots, z_n$ de E et posons $x_i = z_i$, $x_{n+i} = \bar{z}_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.
Soient:

$$W(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} |x_i - x_j|, \qquad W_{2n} = \max_{z_1, \ldots, z_n \in E} W(z_1, \ldots, z_n),$$

$$\delta_{2n} = W_{2n}^{2/2n(2n-1)}.$$

Si d(E) est le diamètre transfini de E, alors:

$$\lim_{n \to \infty} \delta_{2n} = d(E).$$

Comme le cas où $E \cap R = \phi$ de cette conjecture est utilisé dans une preuve du même article, nous croyons utile d'en donner ici une démonstration, même si cette démonstration est d'un type désormais classique.

Rappelons (Voir M. Fekete [1]) que le diamètre transfini de E peut être calculé de deux façons. On choisit n points $w_1, \ldots, w_n$ de E et on pose:

$$V(w_1, \ldots, w_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |w_i - w_j|, \qquad V_n = \max_{w_1, \ldots, w_n \in E} V(w_1, \ldots, w_n),$$

$$d_n = V_n^{2/n(n-1)}.$$

Alors $d(E) = \lim_{n \to \infty} d_n$. Egalement, si $t_n(z) = z^n + \cdots + c_n$ est le polynôme de Tchebychev de E, si $m_n = \max_{z \in E} |t_n(z)|$ (pour tout $p(z) = z^n + \cdots + a_n$, $m_n \leq \max_{z \in E} |p(z)|$, par la définition même de $t_n(z)$) et si $t_n = m_n^{1/n}$, alors $d(E) = \lim_{n \to \infty} t_n$.

Evidemment, $\delta_{2n} \leq d_{2n}$ et $\lim_{n \to \infty} \sup \delta_{2n} \leq d(E)$. Il suffit donc de démontrer que $\lim \inf_{n \to \infty} \delta_{2n} \geq d(E)$ avec $d(E) > 0$. Ecrivons:

$$\begin{aligned} W(z_1, \ldots, z_n) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - \bar{z}_j|^2 \prod_{1 \leq i \leq n} |z_i - \bar{z}_i| \\ &= \prod_{j=2}^{n} |z_1 - z_j|^2 \prod_{j=2}^{n} |z_1 - \bar{z}_j|^2 |z_1 - \bar{z}_1| \; W(z_2, \ldots, z_n) \\ &= |p(z_1)|^2 \, 2|\mathrm{Im}\, z_1| \; W(z_2, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

où $p(z)=z^{2n-2}+\cdots+A_{2n-2}$. Choisissons $z_2, \ldots, z_n \in E$ tels que $W(z_2, \ldots, z_n) = W_{2n-2}$ et $z_1 \in E$ tel que $|p(z_1)| = \max_{z \in E} |p(z)|$. Alors, si $\delta > 0$ est la distance entre E et l'axe réel, on obtient:

$$W_{2n} \geq (m_{2n-2})^2 (2\delta) (W_{2n-2})$$

$$W_{2n} \geq (m_{2n-2})^2 (m_{2(n-1)-2})^2 \ldots (m_2)^2 (2\delta)^{n-1} W_2$$

$$\delta_{2n} \geq (t_{2n-2})^{\frac{2(2n-2)}{n(2n-1)}} (t_{2(n-1)-2})^{\frac{2(2(n-1)-2)}{n(2n-1)}} \ldots (t_2)^{\frac{2\cdot 2}{n(2n-1)}} (2\delta)^{\frac{n-1}{n(2n-1)}} (W_2)^{\frac{1}{n(2n-1)}}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \delta_{2n} \geq \lim_{n\to\infty} (t_{2n-2})^{\frac{2(2n-2)}{n(2n-1)}} \ldots (t_2)^{\frac{2\cdot 2}{n(2n-1)}} = d(E)$$

en remarquant que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n(2n-1)} \{(2n-2) \log t_{2n-2} + \cdots + 2 \log t_2\} = \log d(E).$$

On obtient un résultat semblable pour les ensembles symétriques par rapport à 0 et ne contenant pas 0.

REFERENCES

1. M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Z. **17** (1923), 228–249.

2. R. M. Robinson, *On the transfinite diameters of some related sets*, Math. Z. **108** (1969), 377–380.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL,
MONTRÉAL, QUÉBEC