H. Ouerdiane
Nagoya Math. J.
Vol. 151 (1998), 107–127

ALGEBRES NUCLEAIRES DE FONCTIONS ENTIÈRES ET EQUATIONS AUX DERIVÉES PARTIELLES STOCHASTIQUES

H. OUERDIANE

§1. Introduction

En analyse du bruit blanc (W.N.A) on utilise usuellement le triplet de Gelfand $(\mathcal{S}(R) \subset L^2(\mathbb{R}, dt) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu)$ où $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est l'espace de L. Schwartz des distributions tempérées et μ la mesure Gaussienne donnée par sa fonction caractéristique:

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} e^{i\xi \cdot x}\, d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2} \tag{1}$$

où $\|\xi\|^2 = (\xi, \xi)_{L^2(\mathbb{R},dt)}$ et on considère les espaces de fonctions test et de distributions de Hida

$$(S) \subset L^2(\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mu) \subset (S)' \tag{2}$$

où (S) est l'espace de fonctions test de Kubo-Takenaka [17] (1980) et $(S)'$ est l'espace appelé par P. A. Meyer [20] (1991) espace des distributions de Hida. Recemment beaucousp d'auteurs ont développé cette théorie en considérant différents espaces de fonctions test et de distributions [9], [13], [18], [19], [26], [27]...
Dans ce travail je vais traiter les questions suivantes:

(1) Généraliser la théorie précédente en remplçant $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par un espace X nucléaire réel complet et définir des espaces de fonctions test $\mathcal{N}_k(E')$; k fixé entre 1 et 2, et où E est le complexifié de X i.e. $(E = X + iX)$ et $\mathcal{N}_k(E')$ étant l'ensemble des restrictions à X' de certaines fonctions entières, d'ordre de croissance k et de type de croissance donné sur E'. $\mathcal{N}_k'(E')$ étant l'ensemble des fonctionnelles analytiques sur E', jouera le rôle des distributions.

Received November 24, 1995.

qui n'est autre que la composée de la transformation de Laplace L des fonctionnelles analytiques et d'un opérateur M de multiplication par $e^{-\frac{1}{2}z\cdot z}$ voir [15], [16], [22], [24] on obtient des théorèmes de caractérisations des fonctions test et de distributions.

(2) Développer pour ces espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{N}'_k(E')$ une théorie de noyaux et symboles. Voir Krée-Raczka [14] et N. Obata [26], [27] (1994) dans les cas particuliers où $k = 1$ et $k = 2$.

(3) Application à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles stochastiques, voir [3], [10], [11], [19], [28], [29], [31]...

§2. Fonctions test et espaces de distributions

On se donne un espace Gaussien nucléaire:

$$(X \subset H_{\simeq}H' \subset X', \mu)$$

X et X' en dualité. Le complexifié de ce triplet est noté $E \subset Z \subset E'$. Pour tout k fixé ($1 \leq k \leq \infty$) et $m > 0$, w_n désigne le poids:

$$n \in IN \longrightarrow w_m(n) = (n!)^{2/k} m^{-n} \tag{4}$$

on introduit l'espace:

$$G_{k,m}(Z) = \left\{ f(z) = \sum (f_n, z^{\otimes n}); f_n \in S_n(Z) = \Theta_n Z: \right. \\ \left. \|f\|^2_{k,m} = \sum_{m \geq 0} w_m(n) \|f\|^2_n < \infty \right\} \tag{5}$$

où $\|b_n\|$ est la norme usuelle dans $S_n(Z)$ produit tensoriel hilbertien symétrique complété d'ordre n. On identifiera par la suite tout élément $t_n \in S_n(Z)$ aux polynômes de Hilbert-Schmidt homogènes de degré n; noté ${}^n\text{Pol}^2(Z)$: $z \in Z \to (t_n, z^{\otimes n})$. En particulier $G_{2,1}(Z) = \text{Fock}(Z)$ est la réalisation holomorphe du Fock symétrique des physiciens introduit pour la première fois par T. Dweyer [4] (1971). Fock(Z) est muni du produit scalaire :

$$(f, g)_{\text{Fock}(Z)} = \sum n!(g_n, f_n) \tag{6}$$

et on a la propriété auto-reproduisante de Fock(Z):

$$\forall g \in \text{Fock}(Z); \forall z \in Z, \quad (g, e^z) = g(z) \tag{7}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

où e^z est l'application qui à tout $u \in Z$ associe $e^{(u,z)}$. On voit donc d'après (7) que la transformation de Laplace L coincide ici avec l'isomorphisme de Riez:

$$(\mathrm{Fock}(Z))' \longrightarrow \mathrm{Fock}(Z) \tag{8}$$

où L est l'application qui à une fonctionnelle T associe $LT(z) = \hat{T}(z) = T(e^z)$.

2.1. Espaces de fonctions entières à croissance exponentielle d'ordre k

Soit E un espace nucléaire complexe complet arbitraire. Pour toute famille filtrante croissante $(p_j)_{j \in J}$ de semi-normes quadratiques définissant la topologie de E: top(E), on introduit les espaces quotients: $E_j = E/p_j^{-1}(0)$ et les surjections canoniques:

$$s_j : E \longrightarrow E_j \quad \text{et} \quad s_{jk} : E_j \to E_k$$

définies pour $p_j > p_k$ i.e. $\exists c > 0 : p_j \geq c p_k$. Ces surjections peuvent être prolongées aux complétés $\hat{E}_j$ des E_j. En transposant ces surjections, on obtient les injections continues:

$$E'_k \longrightarrow E'_j \longrightarrow E'\text{fort}.$$

Comme E est nucléaire complet voir L. Schwartz [33], la topologie de E' fort coïncide avec la topologie limite inductive des espaces E'_j (cette dernière topologie est appelée topologie ultra-forte de E'). De plus E est reflexif et top(E) coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'. La définition des fonctions entières à croissance diffère suivant qu'elles sont définies sur E ou sur E'. En effet si on considère les deux diagrammes suivants:

(9)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "s_j"] \arrow[dr, "f"'] & \hat{E}_j \arrow[r, "s_{jk}"] \arrow[d, "f_j"] & \hat{E}_k \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd} \qquad f = f_j \circ s_j$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

et donc par transposition:

$$
\begin{tikzcd}
E'_k \arrow[r] \arrow[drr, "g_k"'] & E'_j \arrow[r] \arrow[dr, "g_j"] & E' \arrow[d, "g"] \\
 & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
\tag{10}
$$

avec $g_j = g|_{E'_j}$ et $g_k = g|_{E'_k}$
On définit alors l'espace

$$\mathcal{N}_k(E') = \varprojlim_{m,j} \mathrm{Exp}(E'_j, k, m) \qquad \text{où pour tout } m > 0$$

$$\mathrm{Exp}(E'_j, k, m) = \{g \text{ entières sur } E'_j\colon \|g\|_{k,m} = \sup_{x \in E'_j} |g(x)| e^{-(m|x|'_j)^k} < \infty\}.$$

Autrement dit $\mathcal{N}_k(E')$ est l'espace des fonctions complexes g définies sur E', dont la restriction $g_j = g|_{E'_j}$ à tous les espaces E'_j est une fonction entière d'ordre de croissance k et de type de croissance arbitrairement petit.
Contrairement au système projectif définissant l'espace de fonctions test $\mathcal{N}_k(E')$, on définiera l'espace $\mathcal{M}_l(E)$ pour tout $l \geq 1$ comme étant l'espace des fonctions entières sur E qui sont la composée pour un j convenable avec un élément de $\mathrm{Exp}(\hat{E}_j, l, < \infty)$ où $\mathrm{Exp}(\hat{E}_j, l, < \infty) = \varinjlim_{m>0} \mathrm{Exp}(\hat{E}_j, l, m)$. Et donc on a:

$$\mathcal{M}_l(E) = \varinjlim_{m,j} \mathrm{Exp}(\hat{E}_j, l, m) := \mathrm{Exp}(E, l, < \infty).$$

De même on notera: $\mathcal{N}_k(E') = \mathrm{Exp}(E', k, > 0)$.

2.2. Caractérisation par la transformation de Taylor des espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_l(E)$

Afin de caractériser les espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_l(E)$, on va considérer l'application série de Taylor à l'origine qui à une fonction entière associe son développement de Taylor considéré comme série formelle sur E ou sur E' i.e.

$$g \in \mathcal{N}_k(E') \longrightarrow g. = (g_n)_{n \in N}$$

$$f \in \mathcal{M}_l(E) \longrightarrow f. = (f_n)_{n \in N}$$

On introduit les espaces de séries formelles suivants:

$$G_k(E') = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ m>0,j}} G_{k,m}(E'_j) \tag{11}$$

où $G_{k,m}(E'_i)$ est défini par (5). Autrement dit

$$G_k(E') = \{g. = (g_n) \colon \forall n \in IN, \forall j \in J, g_{n,j} = g_{n_{E'_j}} \in S_n(\hat{E}_j) = {}^n\mathrm{Pol}_2(E'_j)$$

et de plus

$$\forall m > 0 \forall j \in J \colon \|g.\|^2_{j,m,k} = \sum_{n\geq 0} (n!)^{2/k} m^{-n} \|g_{n,j}\|^2_n < \infty \tag{12}$$

On montre facilement [22], [23] que l'espace $G_k(E')$ est nucléaire complet quand il est muni de la famille de semi-normes quadratiques (12). Le dual de l'espace $G_k(E')$ est clairement l'espace $F_k(E)$ des séries formelles $f. = (f_n)$ sur E telle que:

$$\exists m > 0; \exists j \in J \colon \forall n \in IN \qquad \exists f_{n,j} \in {}^n\mathrm{Pol}_2(\hat{E}_j) \text{ tel que } f_n = f_{n,j} \circ s_j$$

pour tout n et de plus:

$$\|f.\|^2_{j,m,k} = \sum (n!)^{2-2/k} m^n \|f_{n,j}\|^2_n < \infty \tag{13}$$

De plus les semi-normes (13) définissent la topologie ultra-forte de $G_k(E')$. La dualité $\langle g., f.\rangle$ entre l'espace $G_k(E')$ et $F_k(E)$ est donnée par:

$$\langle g., f.\rangle = \langle (g_n), (f_n)\rangle = \sum_{n\geq 0} n! \langle g_n, f_n\rangle \tag{14}$$

et l'isomorphisme topologique défini par:

$$(G_k(E'))' \text{ ultra-fort} \longrightarrow F_k(E) \tag{15}$$

est appelé transformation de Laplace L car pour tout $z \in E$ les fonctions $e^z \colon u \in E' \to e^{\langle z,u\rangle}$ appartiennent (pour $k > 1$) à $G_k(E')$ et on a pour tout $f. = (f_n)_n \in (G_k(E'))'$ on a:

$$\langle f., e^z\rangle = \sum n! \left\langle f_n, \frac{z^{\otimes n}}{n!}\right\rangle = \sum_{n\geq 0} f_n(z^n) \tag{16}$$

Notations. Si $k > 1$ son conjugué k' est donné par la relation $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'} = 1$
Si $k = 1$ on pose $k' = +\infty$ et on posera $\mathrm{Exp}(E, +\infty, < \infty) = \mathcal{M}_\infty(E) = \mathrm{Holo}_0(E)$ = ensemble des fonctions holomorphes au voisinage de zéro, voir [13], [21], [32] d'où les résultats suivants (voir [24], [25]).

THÉORÈME 1. *Soit E un espace nucléaire complet et $k \geq 1$. Alors*

1) *$G_k(E')$ est nucléaire complet et de plus l'application série de Taylor induit deux isomorphismes topologiques*:

$$\mathcal{N}_k(E') \longrightarrow G_k(E') \tag{17}$$

$$\mathcal{M}_{k'}(E) \longrightarrow F_k(E) \tag{18}$$

2) *Il en résulte immédiatement en utilisant* (15) *que la transformation de Laplace L établit un isomorphisme topologique*:

$$(\mathcal{N}_k(E'))' \; fort \xrightarrow{L} \mathcal{M}_{k'}(E) \tag{19}$$

3) *Par transposition de l'isomoprhisme* (19) *précédent car $\mathcal{N}_k(E')$ est nucléaire complet donc reflexif on a*:

$$(\mathcal{M}_{k'}(E))' \; ultra\ fort \xrightarrow{L} \mathcal{N}_k(E') \tag{20}$$

2.3. Caractérisation des espaces de fonctions $\mathcal{N}_k(X')$ et de distribution $\mathcal{N}'_k(X')$ par la transformation chaotique ou S-tranform

Soit un espace Gaussien nucléaire de type $(X \subset H \subset X', \mu)$ où X est un espace nucléaire réel complet et μ la mesure Gaussienne sur X' fort donnée, via le théorème Bochner-Minlos [8], [9], [19], [27] par sa fonction caractéristique:

$$\int_{X'} e^{i\xi x}\, d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2} \tag{21}$$

où $\|\xi\|^2 = (\xi, \xi)_H$.
Comme espace de fonctions test on considère pour tout k fixé $1 \leq k \leq 2$ l'espace $\mathcal{N}_k(X') = \{g|_{X'}; g \in \mathcal{N}_k(E')\}$ = l'ensemble des restrictions des fonctions de $\mathcal{N}_k(E')$ à X'. En appliquant le théorème 1 d'une part, et en utilisant d'autre part le théorème d'intégrabilité de X. Fernique [5], on montre qu'on a une injection continue de $\mathcal{N}_k(E')$ dans $L^2(X', \mu)$, et le

fait que $1 \leq k \leq 2$ alors $k' \geq 2$ et donc $\exp -\frac{1}{2}z.z$ appartient à l'algèbre $\mathrm{Exp}(E, k' < \infty) = \mathcal{M}_{k'}(E)$. On obtient le théorème suivant, (voir [24], [25]).

THÉORÈME 2. *Soit $(X \subset H \subset X', g)$ un espace gaussien nucléaire. Alors pour tout $1 < k < 2$, la transformation chaotique ou S-transform établit un isomorphisme de la chaine:*

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(X') \subset \mathcal{N}_k(X') \subset \mathcal{N}_2(X') \subset \mathcal{N}_2(H) \subset L^2(X', \mu) \\ \subset \mathcal{N}_2'(H) \subset \mathcal{N}_2'(X') \subset \mathcal{N}_k'(X') \subset \mathcal{N}_1'(X') \end{aligned} \tag{22}$$

sur la chaine d'espaces de fonctions entières:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(E') \subset \mathcal{N}_k(E') \subset \mathcal{N}_2(E') \subset \mathcal{N}_2(Z) \subset \mathrm{Fock}(Z) \\ \subset \mathcal{M}_2(Z) \subset \mathcal{M}_2(E) \subset \mathcal{M}_{k'}(E) \subset \mathcal{M}_\infty(E) \end{aligned} \tag{23}$$

2.4. Remarques

1) L'origine des espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_l(E)$ remonte à 1979 (voir [21]) où E est un espace de Banach complexe et $k \geq 1$.

2) Puis ces espaces sont été géneralisés au cas où E est le compléxifié d'un espace nucléaire complet X $(E = X + iX)$ dans [22] (1991) voir aussi [23].

3) En ce qui concerne le lien entre les espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et ceux de Kondrat'ev-Streit noté $(\mathcal{E})_\beta$, $0 \leq \beta \leq 1$, voir Kuo [19] (1996) §4.4 on a:

   a) $k = \frac{2}{1+\beta}$ et donc si $k = 2 \Rightarrow \beta = 0$. Ceci correspond à l'espace de fonctions test de Kubo-Takenaka [17], et si $k = 1 \Rightarrow \beta = 1$ et dans ce cas

$$\mathcal{N}_1(E') = \mathrm{Exp}(E', 1, > 0) = \lim_{m>0} poj\mathrm{Exp}(E', 1, m) \tag{24}$$

   b) Les espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_l(E)$ sont des espaces définis à l'aide de l'holomorphie en dimension infinie pour $k \geq 1$ et pas seulement pour $1 \leq k \leq 2$ c'est à dire pour tout $\beta \leq 1$ (pas nécessairement pour $\beta \geq 0$ comme dans [19]). Mais si on veut faire de l'analyse gaussienne i.e. avoir des triplets de Gelfand $\mathcal{N}_k(X') \subset (L)^2 \simeq (L^2)' \subset \mathcal{N}_k(X')$ il faut se restreindre au cas $1 \leq k \leq 2$ et donc $0 \leq \beta \leq 1$ (pour que $\mathcal{N}_k(X')$ s'injecte d'une façon continue et dense dans $L^2(X', \mu)$).

c) En réalité l'espace $(\mathcal{E})_\beta$ introduit dans [13], [32] et [19] correspond à l'espace des séries formelles $G_k(E')$ introduit dans (2.2) et le théorème d'isomorphisme topologique via la transformation série de Taylor (Théorème 1) permet d'identifier l'espace $G_k(E')$ à l'espace $\mathcal{N}_k(E')$ de fonctions entières sur E' d'ordre de croissance k et de type de croissance arbitrairement petit. Ce qui evite les problèmes d'avoir des versions continues, analytiques...des espaces de fonctions test.

d) La définition des espaces $(\mathcal{E})_\beta$ $0 \leq b < 1$ dans [19] (construction Kondrat'ev-Streit) est très particulière car c'est le cas particulier où $X = \mathcal{S}(R)$, et où la famille des semi-normes sur X est donnée par

$$|f|_k = p_k(f) = \left|\left(-\frac{d}{dx^2} + x^2 + 1\right)^k b\right|_{L^2(\mathbb{R},dt)} = |A^k f|_{L^2(R,dt)} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}). \tag{25}$$

D'autre part si on veut que les espaces $(\mathcal{E})_\beta$ ne dépendent pas de la topologie définie par les semi-normes sur X ou $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il faut modifier la norme définie p. 29 [19] comme suit: $\varphi = \sum I_n(f_n)$ appartient à $(\mathcal{E})_\beta$ si et seulement si pour tout p et tout k entier

$$|\varphi|_{p,\beta,k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{1+\beta} k^n |(A^p)^{\otimes n} f_n|_0^2\right)^{1/2} < \infty$$

ce qui correspond aux semi-normes (12) en prenant par exemple $(m = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k})$ i.e. $m^{-n} = k^n$ car m est arbitrairement petit. Ce qui a été d'ailleurs fait dans [13] [32].

§3. Noyaux et symboles d'opérateurs

En vue d'étudier tous les opérateurs sur Fock(Z) (pas seulement les opérateurs de convolution) et en utilisant (23) i.e/ $\forall 1 \leq k \leq 2$ on a:

$$\mathcal{N}_k(E') \subset \mathrm{Fock}(Z) \simeq \mathrm{Fock}(Z)' \subset \mathcal{M}_{k'}(E) \tag{26}$$

on est ici dans une situation pour appliquer l'extension de A. Grothendick [7] au théorème des noyaux de L. Schwartz puisque l'espace $\mathcal{N}_k(E')$ est nucléaire complet. Autrement dit soit u un opérateur linéaire continu de

$\mathcal{N}_k(E')$ dans $\mathcal{N}'_k(E')$ i.e. $u \in L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E'))$. On définit son noyau u^k par:

$$\forall f, g \in \mathcal{N}_k(E') \qquad \langle u(f), g\rangle = \langle u^k, f \otimes g\rangle \tag{27}$$

et comme

$$L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E)) \simeq \mathcal{N}'_k(E') \otimes \mathcal{N}'_k(E') \simeq \mathcal{N}'_k(E' \times E') \tag{28}$$

On peut de la même manière que les espaces $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_l(E)$ définir des espaces $\mathcal{N}_k(E' \times E')$ et $\mathcal{M}_l(E \times E)$ mais ici la $(T.C)$ est définie pour deux variables i.e. $T.C = LoM$ où

$$L(S)(z, z') = \langle S, e^z \otimes e^{z'}\rangle \tag{29}$$

Pour tout $S \in \mathcal{N}'_k(E' \otimes E')$ et M l'opérateur de multiplication des séries formelles par:

$$e^{-\frac{1}{2}z^2} \otimes e^{-\frac{1}{2}z'^2}$$

autrement dit on appelle symbole de l'opérateur $u \in L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E'))$ noté $u(z, z')$:

$$u(z, z') := (TC)(u^k)(z, z') = \langle u^k, e^{z - \frac{1}{2}z^2} \otimes e^{z' - \frac{1}{2}z'^2}\rangle \tag{30}$$

D'où le Schéma:

$$\begin{array}{c} L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E)) \simeq \mathcal{N}'_k(E') \otimes \mathcal{N}'_k(E') \simeq \mathcal{N}'_k(E' \times E') \\ u \longrightarrow u^k \longrightarrow u(z, z') \end{array} \tag{31}$$

d'où le théorème:

THÉORÈME 3. ([25], voir aussi N. Obata [26] pour $k = 2$) 1) *Soit E un espace nucléaire complet et $k \geq 1$, alors l'application*:

$$L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E')) \longrightarrow \mathcal{M}_{k'}(E \times E) \tag{32}$$

$$u \longrightarrow u(z, z') \tag{33}$$

induit un isomorphisme topologique. Autrement dit tout opérateur $u \in L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E'))$ son symbole $u(z, z')$ est une fonction entière sur E^2 telle que:

$$\exists j \in J\ \exists m > 0\ \exists c > 0: |u(z, z')| \leq c \exp m((|z|_i^{k'} + |z'|_i^{k'}) \tag{34}$$

pour tout $z, z' \in E$.

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

2) *Réciproquement pour tout fonction* $f(z,z') \in \mathcal{M}_{k'}(E \times E)$. *Il existe un unique opérateur* $u \in L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E'))$ *tel que*

$$u(z,z') = f(z,z') = \sum_m \sum_n f_{n,m} z^{\otimes m} z'^{\otimes n} \tag{35}$$

et donc $\forall u \in L(\mathcal{N}_k(E'), \mathcal{N}'_k(E'))$ *il existe une famille unique* $u_{m,n} \in (\bigotimes_m E' \otimes \bigotimes_n E')$ *telle que pour tout* $g \in \mathcal{N}_k(E')$ *on a:*

$$u(g) = \sum_{m,n} u_{m,n}(g) \qquad \text{où } u_{m,n} = (TC)^{-1} f_{n,m}. \tag{36}$$

§4. Equations aux dérivées partielles stochastiques

Example 1. Soit un espace Gaussien de type $(X \subset H \subset X', \mu)$ et $E \subset Z \subset E'$ le triplet complexifié correspondant et N l'opérateur nombre de particules voir [3], [19], [28], [29]. Dans le formalisme de N. Obata [26], [27], les opérateurs: N = nombre de particules et Δ_G = Laplacien de L. Gross [6] sont donnés par:

$$N = \int \partial_t^* \partial_t \, dt \quad \text{et} \quad \Delta_G = \int \partial_t^2 \, dt$$

où δ_t étant la dérivation de Hida i.e. $D_{\delta_t} = \delta_t$.

Considérons le problème de Cauchy suivant:
Trouver une distribution $f(x,t)$ telle que:

$$\begin{cases} \partial_t f(x,t) = Nf \\ f(x,0) = g(x) \quad \text{une distribution donnée} \end{cases} \tag{37}$$

En appliquant la (T.C) par rapport à x et en notant $\hat{f}(z,t) = (T.C)f(z,t)$ et $\hat{g}(z) = (T.C)g(z)$ on a:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{f}(z,t) = N\hat{f}(z,t) \\ \hat{f}(z,0) = \hat{g}(z) \end{cases}$$

En se plaçant dans l'espace de fonctions test $\mathcal{N}_k(X')$ on a alors:

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} \partial_t \hat{f}_n(z,t) = \sum_{n \geq 0} n\hat{f}_n(z,t) \\ \\ \sum_{n \geq 0} \hat{f}_n(z,0) = \sum_{n \geq 0} \hat{g}_n(z) \end{cases} \tag{38}$$

autrement dit $\forall n \in IN$ on a:

$$\hat{f}_n(z,t) = e^{nt}\hat{g}_n(z)$$

et donc

(39)
$$\hat{f}(z,t) = \sum_{n\geq 0} e^{nt}\hat{g}_n(z)$$

En utilisant (22) et (23) du théorème 2 donnant l'isomorphisme via la (T.C) entre $\mathcal{N}_k(X')$ et $\mathcal{N}_k(E')$ on a la proposition suivante:

PROPOSITION. *Pour tout k fixé, $1 \leq k \leq 2$, l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t f(x,t) = Nf; \ N \text{ opérateur nombre de particules} \\ f(x,0) = g(x) \text{ où } g(x) \in \mathcal{N}_k(X') \end{cases}$$

admet une solution unique $f(x,t)$ telle que $\forall t$ fixé $f(\cdot,t)$ est dans l'espace $\mathcal{N}_k(X')$ et sa transformée chaotique est donnée par:

$$\hat{f}(z,t) = \sum_{n\geq 0} e^{nt}\hat{g}_n(z)$$

Preuve. En effet pour tout t fixé, $\forall m > 0$ $\forall$ la semi-norme p_j:

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|^2_{j,m} &= \sum_{n\geq 0}(n!)^{2/k}m^{-n}\|\hat{f}_{n,j}\|^2_n \\ &= \sum_{n\geq 0}(n!)^{2/k}m^{-n}\|e^{nt}\hat{g}_{n,j}\|^2_n \\ &= \sum_{n\geq 0}(n!)^{2/k}\left(\frac{e^{2t}}{m}\right)^n\|\hat{g}_{n,j}\|^2_n \end{aligned}$$

et donc $\forall t$ fixé; $\forall m > 0$ $\forall m' > 0$ $\forall p_j$ on a:

$$\|\hat{f}\|^2_{j,m} = \sum_{n\geq 0}(n!)^{2/k}m'^{-n}\|\hat{g}_{n,j}\|^2\left(\frac{m'e^{2t}}{m}\right)^n$$

d'où

$$\|\hat{f}\|^2_{j,m} \leq \|\hat{g}\|^2_{j,m'} \sup_{n\in N}\left(\frac{m'e^{2t}}{m}\right)^n$$

et donc $\forall m > 0$ $\forall p_j$ (pour t fixé) à condition de choisir $0 < m' < me^{-2t}$, $\exists$ une constante $c > 0$ tel que:

$$\|\hat{f}\|_{j,m} \leq c\|\hat{g}\|_{j,m'} < \infty$$

Car on a:

$$\forall m' > 0 \ \forall j \ (\hat{g} \in \mathcal{N}_k(E')) \Longrightarrow \|\hat{g}\|_{m',j} < \infty$$

ce qui prouve que $\forall t$ fixé $f(\cdot,t) \in \mathcal{N}_k(E')$ et par conséquent $f(\cdot,t) \in \mathcal{N}_k(X')$.

EXAMPLE 2. (Voir [2], [10], [11], [31]) Soit le problème de Cauchy suivant: Trouver un processus généralisé $Y(t,x)$ tel que:

$$\text{(40)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} Y(t,x) = a\Delta Y(t,x) + Y(t,x) \diamondsuit W(t); \ t > 0 \\ \text{avec } Y(0,x) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $\diamondsuit$ est le produit de Wick [19], [20], [32] et $W(t)$ le Bruit blanc Gaussien.

En appliquant la (T.C) à cette équation et posant:

$$(TC)(Y)(\xi) = \hat{Y}(\xi) \qquad \xi \in E = X + iX$$

et où $(X \subset H \subset X', \mu)$ est un espace Gaussien réel on obtient: En appliquant la (TC) à l'équation (40) et en notant par Λ l'image par TC on obtient:

$$\text{(41)} \qquad \begin{cases} \partial_t \hat{Y}(t,x,\xi) = a\Delta \hat{Y}(t,x,\xi) + \hat{Y}(t,x,\xi)\xi(t) \\ \hat{Y}(0,x,\xi) = f(x) \end{cases}$$

En appliquant à (41) la (T.F) par rapport à x notée F_x et en posant $F_x(\hat{Y})(p) = \tilde{Y}(p)$ on obtient:

$$\text{(42)} \qquad \begin{cases} \partial_t \tilde{Y}(t,p,\xi) = -ap^2\tilde{Y}(t,p,\xi) + \xi(t)\tilde{Y}(t,p,\xi) \\ \tilde{Y}(0,p,\xi) = f(p) \end{cases}$$

d'où

$$\text{(43)} \qquad \tilde{Y}(t,p,\xi) = f(p) \exp\Big[-ap^2 t + \int_0^t \xi(s)\, ds\Big]$$

Par Fourier inverse on obtient:

$$\text{(44)} \qquad \hat{Y}(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi a t}} \exp\Big(\int_0^t \xi(s)\, ds\Big)\Big[\int f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}}\, dy\Big]$$

D'où

PROPOSITION. *Le problème de Cauchy* (40) *admet une solution unique sous forme de processus généralisé* $Y(t,x)$ *dans l'espace de fonctions test* $\overline{\mathcal{N}}_1(X') = \mathrm{Exp}(X', 1 < \infty)$ *et dont la TC est donnée par:*

$$\hat{Y}(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi at}} \exp\Big(\int_0^t \xi(s)\,ds\Big)\Big[\int f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}}\,dy\Big]$$

et $\hat{Y} \in \overline{\mathcal{N}}_1(E') = \mathrm{Exp}(E', 1 < \infty)$.

Preuve. Il est facile de voir que $\hat{Y}(x) \in \overline{\mathcal{N}}_1(E')$ et donc le théorème 2 d'isomorphisme nous assure que $Y(t,x) \in \overline{\mathcal{N}}_1(X')$.

EXAMPLE 3. (Cas où la solution n'appartient pas à l'espace de Hida $\mathcal{N}_2'(X')$). Considérons la même equation que dans l'exemple 2 mais en remplaçant $W(t)$ par l'exponentielle de Wick $e^{w(t)}$ Alors l'équation (40) devient:

$$\text{(45)} \qquad \begin{cases} \partial_t Y(t,x) = a\Delta Y(t,x) + Y(t,x) \diamondsuit e^{w(t)} \\ Y(0,x) = f(x) \end{cases}$$

le même calcul que précedemment montre que l'équation (45) admet comme solution processus $Y(t,x)$ transformation chaotique:

$$\text{(46)} \qquad \hat{Y}(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi at}} \exp\Big(\int_0^t e^{\xi(s)}\,ds\Big)\Big[\int f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}}\,dy\Big]$$

D'où

PROPOSITION. *L'équation* (45) *où* $f(x)$ *est déterministe, admet une solution sous forme de processus généralisé* $Y(t,x)$ *appartenant à l'espace de distributions* $\mathcal{N}_1'(X')$ *et dont la* $(T.C)$ *est donnée par* (46) *ie* $\hat{Y}(x) \in \mathcal{M}_\infty(E)$ *et donc* $Y(t,x) \notin (S)^* = \mathcal{N}_2'(X')$ *espace de distributions de Hida.*

EXAMPLE 4. Considérons maintenant le cas générale du problème de Cauchy suivant:

$$\text{(47)} \qquad \begin{cases} \partial_t Y(t,x) = a\Delta Y(t,x) + Y(t,x) \diamondsuit G(t) \\ Y(0,x) = f(x) \quad x \in R,\ t \in R^+ \end{cases}$$

et $G(t,w)$ et $f(x,w)$ étant deux distributions dans $\mathcal{N}_1'(X')$ où $(X \subset H \subset X', \mu)$ étant un espace Gaussien nucléaire. En gardant les mêmes notations que dans l'exemple 3, en appliquant la (T.C) à (47) alors on a: $\forall x \in X + iX = E$:

$$\text{(48)} \qquad \begin{cases} \partial_t \hat{Y}(t,x,\xi) = a\Delta \hat{Y}(t,x,\xi) + \hat{Y}(t,x,\xi)\hat{G}(t,\xi) \\ \hat{Y}(0,x,\xi) = \hat{f}(x,\xi) \end{cases}$$

En appliquant la TF par rapport à x à (48) on obtient:

$$\text{(49)} \qquad \begin{cases} \partial_t \tilde{Y}(t,p,\xi) = -ap^2\tilde{Y}(t,p,\xi) + \tilde{Y}(t,p,\xi)\hat{G}(t,\xi) \\ \tilde{Y}(0,p,\xi) = \tilde{f}(p,\xi) \end{cases}$$

avec $\xi \in$ voisinage de zéro de E.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_t \tilde{Y} = (-a^2p^2 + \hat{G}(t,\xi))\tilde{Y} \\ \tilde{Y}(0,p,\xi) = \tilde{f}(p,\xi) \end{cases}$$

d'où

$$\text{(50)} \qquad \tilde{Y}(t,p,\xi) = \tilde{f}(p,\xi)\exp\Big[-a^2p^2t + \int_0^t \hat{G}(s,\xi)\,ds\Big]$$

et donc

$$\hat{Y}(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi at}}\exp\Big(\int_0^t \hat{G}(s,\xi)\,ds\Big) \times \Big[\int f(y,\xi)e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}}\,dy\Big]$$

et il est claire d'après cette dernière formule que $Y(t,x,\xi) \in M_\infty(E) = \mathrm{Hol}_0(E)$ si f et G sont deux distributions de $\mathcal{N}_1'(X')$ car $\mathrm{Hol}_0(E)$ est une algèbre et donc (47) admet une solution unique $Y(t,x)$ dans le même espace $\mathcal{N}_1'(X')$.

EXAMPLE 5. (Variante Stratanovich du problème de Cauchy suivant: [2], [31])

$$\text{(51)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \dfrac{1}{2}(v(t) + \sigma^2(t))\Delta u(t,x) = \sigma(t)\dot{w}(t) \diamondsuit \nabla_x u(t,x) \\ u(0,x) = \delta_0(x) \text{ la donnée initiale} \end{cases}$$

avec $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $v > 0$ et $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, dt)$ $\sigma \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, dt)$ et $w(t)$ étant le processus Brownien (i.e. $w(t) = B(t)$) et $\diamondsuit$ le produit de wick des distributions ie:

$$\forall \phi \text{ et } \psi \in \mathcal{N}_k'(X') : (T.C)(\psi \diamondsuit \psi) = ((T.C)\phi)((T.C)\psi).$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

En appliquant la (T.C) à (51) et ensuite la (T.F) usuelle par rapport à la variable x on obtient en gardant les mêmes notations que pour les exemples précédents on obtient:

$$\tilde{u}(t,p,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\Big[-\frac{1}{2}a(t)p^2 + ipb(t)\Big] \tag{52}$$

avec

$$a(t) = \int_0^t (v(s) + \sigma^2(s))\,ds \quad \text{et} \quad b(t) = \int_0^t \sigma(s)\xi(s)\,ds.$$

Par Fourier inverse on obtient:

$$\hat{u}(t,x,\xi) = \frac{1}{2\Pi a(t)} \exp\Big[-\frac{1}{2a(t)}\Big(x - \int_0^t \sigma(s)\xi(s)\,ds\Big)^2\Big] \tag{53}$$

Comment donner explicitement $u\,(t,\,x)$? Comme $\hat{u}\,(t,\,x,\,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\Pi\,a(t)}}$ $\exp -\frac{1}{2a(t)}(x - 1|_{[0,t]}\sigma, \xi)^2$ où $f.g$ est le produit scalaire usuel dans $L^2(R, dt)$ considérons le vecteur unitaire

$$V = \frac{1|_{[0,t]}\sigma}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \|1|_{[0,t]}\sigma\|_{L^2} = \Big(\int_0^t \sigma^2(s)\,ds\Big)^{1/2} \tag{54}$$

On a alors

$$\hat{u}(\xi) = \hat{u}(t,x,\xi) = \hat{g}(\xi, V) \tag{55}$$

avec $\hat{g}$ une fonction d'une variable z avec

$$\hat{g}(z) = (2\Pi a(t))^{-1/2} \exp -\frac{1}{2a(t)}(x - \alpha z)^2 \tag{56}$$

et donc

$$u(t,x) = (\theta^{-1}\hat{g})(wV) = g(wV)$$

où θ^{-1} étant l'inverse en dimension 1 de la (T.C) [14] et on a explicitement l'inverse de θ:

$$(\theta^{-1}\hat{g})(w) = g(w) = \int \hat{g}(w + iu)\,d\mu(u) \tag{57}$$

μ étant la mesure Gaussienne en dimension 1, donc

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi^2 a(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{1}{2a(t)}(x - \alpha(w+iu))^2 - \frac{u^2}{2}\Big)\,du$$

Aprés calcul on obtient:

(58)
$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\gamma(t)}} \exp -\frac{1}{2\gamma(t)}(x-\alpha w)^2$$
$$\gamma(t) = \int_0^t v(s)\,ds > 0$$

et donc

(59)
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\gamma(t)}} \exp -\frac{1}{2\gamma(t)}\left(x - \int_0^t \sigma(s)\,ds\right)^2$$

On retrouve ainsi la formule de J. Potthoff (Formule 3.10 [31]) relatif au cas Stratanovich.

EXAMPLE 6. (Variante Itô de l'équation (51)) Considérons maintenant le problème de Cauchy suivant:

(60)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \dfrac{1}{2}v(t)\Delta u(t,x) = \sigma(t)\dot{w}(t,x) \diamondsuit \nabla_x u(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec la donnée initiale} \\ u(0,x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

et v et σ vérifiant les mêmes hypothèses que dans l'exemple 5. On pose maintenant $a'(t) = \int_0^t v(s)\,ds$ et $b'(t) = \int_0^t \sigma(s)\xi(s)\,ds$ on a alors:

(61)
$$\hat{u}(t,x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi a'(t)}} \exp -\frac{1}{2a'(t)}(x - 1|_{(0,t)}\sigma.\xi)^2$$

et de la même manière que le cas précédent, puisque $u(t,x,\cdot)$ est cylindrique en posant pour $z \in C$

(62)
$$\hat{g}(z) = (2\Pi a'(t))^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2a'(t)}(x-\alpha z)^2\right]$$

on aura $u(t,x,w) = g(wV)$ (si g existe!) avec $V = 1|_{(0,t)}\frac{\sigma}{\alpha}$. En utilisant la formule explicite (57) donnant g en fonction de $\hat{g}$, le coefficient de $-\frac{u^2}{2}$ dans l'intégrale est égal à

$$\frac{\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds - \int_0^t \sigma^2(s)\,ds}{\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds}.$$

Alors il se présentent les cas suivants:

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

(63) *Cas* 1 *si* $\gamma'(t) = \int_0^t (v(s) - \sigma^2(s))\,ds > 0$

alors la solution explicite de l'équation admet une solution explicite donnée par:

$$u(t,x,w) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\gamma'(t)}} \exp\Big[-\frac{1}{2\gamma'(t)}(x - 1|_{(0,t)}\sigma.w)^2\Big] \tag{64}$$

Cas 2 *si* $\gamma' = 0$ *i.e.* $\int_0^t v(s)\,ds = \int_0^t \sigma^2(s)\,ds$

c'est la transformé d'une distribution de Dirac et donc

$$u(t,x,w) = \delta_x\Big(\int_0^t \sigma(s)\,dw(s)\Big) \tag{65}$$

(66) *Cas* 3 *si* $\gamma' = \int_0^t (v(s) - \sigma^2(s))\,ds < 0$

alors la technique précédente ne marche plus car l'intégrale donnée par θ^{-1}, (voir (57)) est divergente, le coefficients de $\frac{u^2}{2}$ étant dans ce cas positif. Mais si on reprend la fonction d'une variable $z \in C$:

$$\hat{g}(z) = (2\Pi a'(t))^{-1/2} \exp\Big[-\frac{1}{2a'(t)}(x - \alpha z)^2\Big] \tag{67}$$

Il est clair que $\hat{g}(z)$ est une fonction entière d'ordre de croissance $k = 2$ et de type quelconque i.e. $\hat{g} \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, 2, < \infty)$ c'est donc l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donc d'après le théorème 2 d'isomorphisme via la (T.C) g est une distribution appartenant à $(\mathcal{N}_2(R))' = (\mathrm{Exp}(\mathbb{R}, 2, > 0))'$ et donc pour tout fonction test $f \in \mathrm{Exp}(\mathbb{R}, 2, > 0) = \mathcal{N}_2(R)$, $f(z) \in \mathcal{N}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{C}, 2, > 0)$ (toujours d'après le théorème 2 caractérisant aussi via la (T.C) l'espace des fonctions test). Vu la dualité définie dans le cas général entre $\mathcal{N}_k(E')$ et $\mathcal{M}_{k'}(E)$ d'une part et $\mathcal{N}_k(X')$ et $(\mathcal{N}_k(X'))'$ d'autre part on a:

$$\forall f \in \mathcal{N}_2(R) \quad \langle g, \hat{f}\rangle = \langle \hat{g}, f\rangle = \sum n! \langle \hat{g}_n, f\rangle = \langle g, f\rangle \tag{68}$$

I) Considérons d'abord le cas particulier (pour simplifier les calculs) où $x = 0$. En notant par L la transformée de Laplace on a:

$$(Lg)(z) = \hat{g}(z) e^{\frac{1}{2}z^2} = (2\Pi a'(t))^{-1/2} \exp \frac{1}{2} z^2 \Big(1 - \frac{\alpha^2}{a'}\Big) \tag{69}$$

avec

$$1 - \frac{\alpha^2}{a'} = \frac{\gamma'(t)}{a'(t)} < 0$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000025204 Published online by Cambridge University Press

Posons

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{\gamma'(t)}{a'(t)}$$

$\varepsilon > 0$ alors on a:

$$\begin{aligned}(Lg)(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\Pi a'(t)}} \exp -\varepsilon z^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\Pi a'(t)}} \sum (-1)^n \varepsilon^n \frac{z^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{k \geq 0} (Lg)_k z^k\end{aligned}$$

c'est à dire que:

$$\begin{cases} (Lg)_{2n+1} = 0 \\ (Lg)_{2n} = \dfrac{(-1)^n \varepsilon^n}{n!} \dfrac{1}{\sqrt{2\Pi a'(t)}} \end{cases}$$

et donc si $f(z) = \sum f_n z^n$ on a:

$$\langle g, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Pi a'(t)}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{n!} (2n)! f_{2n} \tag{70}$$

et $\sum f_n$ converge car $f \in \operatorname{Exp}(C, 2, > 0)$ et on a: $\forall m > 0$ en posant $C^2 = \sum n! m^{-n} |f_n|^2 < \infty$, ceci entraîne par l'inégalité de Schwartz:

$$\sum |f_n| \leq C \Big(\sum \frac{m^n}{n!} \Big)^{1/2} \leq \infty.$$

Or si on calcule l'intégrale suivante (pour $\gamma_0 > 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma_0 y^2} f(iy)\, dy = \sum_{n \geq 0} (i)^n f_n \int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\gamma_0 y^2}\, dy.$$

On sait que:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} y^n e^{-\gamma_0 y^2}\, dy = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{(2n)! \sqrt{\Pi/2}}{4^n \gamma_0^n n! \gamma_0} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

et par conséquent:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma_0 y^2} f(iy)\,dy = \sum_{n\geq 0}(-1)^n f_{2n}\frac{(2n)!\sqrt{\frac{\Pi}{2}}}{4^n\gamma_0^n n!\gamma_0} \tag{71}$$

En comparant (70) et (71) et si on pose $\varepsilon = \frac{1}{4\gamma_0}$.
On a la formule:

$$\forall f \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R}):\quad \langle g, f\rangle = \frac{1}{2\delta^2\Pi\sqrt{a'}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\delta^2}y^2} f(iy)\,dy \tag{72}$$

avec $\delta^2 = \frac{\int_0^t (\sigma^2(s)-v(s)\,ds}{\int_0^t v(s)\,ds}$

II) Si $x \neq 0$ posons go la distribution correspondant au cas où $x = 0$ (g_0 est définie par la formule (72)) et g_x la distribution correspondante quand $x \neq 0$ comme

$$(Lg_x)(z) = (2\Pi a'(t))^{-1/2}\exp\Big(-\varepsilon z^2 + \frac{\alpha x}{a'}z\Big)e^{-\frac{x^2}{2a'}}$$

et si on considère l'opérateur de translation:

$$\tau_a\colon f \longrightarrow \tau_a f \text{ avec } (\tau_a f)(x) = f(x+a).$$

On a:

$$L(\tau_{-a}f)(z) = e^{za}(Lf)(z)$$

donc

$$g_x = \exp -\frac{x^2}{2a'}\Big(\tau - \frac{\alpha x}{a'}\Big)g_0$$

et comme

$$\langle g_0, f\rangle = \frac{1}{2\delta^2\sqrt{\Pi^2 a'}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\delta^2}y^2} f(iy)\,dy$$

d'une part, et d'autre part:

$$\langle \tau_{-a}g_0, f\rangle = \langle g_0, \tau_{+a}f\rangle$$

on a:

$$\langle g_x, f\rangle = \langle g, \phi\rangle = \frac{1}{2\delta^2\Pi\sqrt{a'}}\exp -\frac{x^2}{2a'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\delta^2}y^2} f\Big(i\Big(y - \frac{\alpha x}{a'}\Big)\,dy$$

et donc

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\delta^2\Pi\sqrt{a'}}\exp -\frac{1}{2}\Big(\frac{\alpha^2}{a'^2}\frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{a'}\Big)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\delta^2}(y^2+\frac{2\alpha}{a'}xy} f(iy)\,dy.$$

Bibliographie

[1] F. Benth, T. Deck, J. Potthoff and L. Streit, *Evolution equations with multiplicative noise*, Preprint (1995).

[2] P. L. Chow, *Generalized solution of some parabolic equations with a random drift*, J. App. Math. Optimization, **20** (1989), 81–96.

[3] D. M. Chung and U. C. Ji, *Cauchy problems for a partial differential equation in white noise analysis*, J. Korean math. Soc., **33** (1996), 309–318.

[4] T. Dwyer, *Partial differential equations in Fischer-Fock spaces*, Bull. A. M. S., **5** (1971), 725–730.

[5] X. Fernique, *Processus linéaires-processus généralisées*, Annales de l'institut de Fourier, **Tome XVII. 1**, 1–92.

[6] L. Gross, *Potential theory on Hilbert space*, J. Funct. Anal., **1** (1967), 123–181.

[7] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the A. M. S., **16** (1955), 1–140.

[8] T. Hida, Brownian Motion, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1980.

[9] T. Hida, H. H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, *White noise an infinite dimensional calculus*, Maths. and its applications (1993), Kluwer Academic Publishers.

[10] H. Holden, T. Lindstrom, B. Oksendal, J. Uboe and T. S. Zhang, *The Burgers Equation with a noisy force and the stochastic Heat equation*, Comm. P. D. E., **19** (1994).

[11] H. Holden, T. Lindstrom, B. Oksendal, J. Uboe and T. S. Zhang, *The stochastic wick-type Burgers equation*, London Math. Soc., **216** (1995), 141–161.

[12] Y. G. Kondrat'ev, *Nuclear spaces of entire functions in problems of infinite dimensional analysis*, Soviet. Math. Dokl., **22** (1980), 588–592.

[13] Y. G. Kondrat'ev, L. Streit and W. Westerkamp, *A note on positive distributions in Gaussian analysis*, Ukrain. Math., **47** (1995), 649–658.

[14] P. Kree, and R. Raczka, *Kernels and symbols of operators in quantum field theory*, Ann. Ins. H. Poincaré, **28** (1978), 41–73.

[15] P. Kree, *Distributions en dimension quelconque et intégrales stochastiques*, Conf. Silivri (1986), L. N. M. No. 1316 (1988), pp. 170–233.

[16] P. Kree, *Distributions, Sobolev spaces on Gaussian spaces and Ito's calculus*, Stochastic Processes and their applications (S. Albeverio and all, eds.), Kluwer Academic Pub. (1990), pp. 203–225.

[17] I. Kubo and S. Takenaka, *Calculus on Gaussian white noise* I, Proc. Japan Acad., **56** (1980), 376–380.

[18] H. H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, *A characterization of white noise test functionals*, Nagoya Math. J., **121** (1991), 185–194.

[19] H.-H. Kuo, White Noise Distribution Theory, CRC Press, 1996.

[20] P. A. Meyer and J. A. Yan, Les fonctions caractéristiques des distributions sur l'espace de Wiener, Séminaire de Probabilités XXV, L. N. M. No. 1485, Springer-Verlag, 1991, pp. 61–78.

[21] H. Ouerdiane, *Dualité et opérateurs de convolution dans certains espaces de fonctions entières nucléaires à croissance exponentielles*, Abhandlungen aus der math. Séminar Univ. Hamburg. Germany., **54** (1983), 276–283.

[22] H. Ouerdiane, *Application des méthodes d'holomorphie et de distributions en dimension quelconque à l'analyse sur les espaces gaussiens*, BiBos No. 491 (1991).

[23] H. Ouerdiane, *Extension de deux théorèmes de type Kondrat'ev-Yokoi*, BiBoS No. 572 (1993).

[24] H. Ouerdiane, *Fonctionnelles analytiques avec condition de croissance et application à l'analyse gaussienne*, Japanese Journal of Math., **20** No. 1 (1994), 187–198.

[25] H. Ouerdiane, *Noyaux et Symboles d'opérateurs sur des fonctionnelles analytiques-Gaussiennes*, BiBoS No. 634, Japanse Journal of Math., **21** No. 1 (1995), 223–234.

[26] N. Obata, *An analytic characterization of symbols of operators on white noise functionals*, J. Math. Soc. Japan, **45** No. 3 (1993), 421–445.

[27] N. Obata, White noise calculus and Fock space, L. N. M. No. 1577, Springer-verlag, 1994.

[28] M. A. Piech, *A fundamental solution of the parabolic equation on Hilbert space*, J. Funct. Anal., **3** (1969), 85–114.

[29] M. A. Piech, *Parabolic equations associated with the number operator*, Trans. Amer. Math. Soc., **194** (1974), 213–222.

[30] J. Potthoff, *On positive generalized functionals*, J. Funct. Anal., **74** (1987), 81–95.

[31] J. Potthoff, *White noise approach to parabolic stochastic partial differential equations*, Stochastic analysis and Applications in Physics NATO–ASI. Séries (In A. I. Cardoso et al, eds.), 499, Kluwer Academic Publishers (1994).

[32] L. Streit, *An introduction to white Noise Analysis*, BiBoS No. 641, Preprint (1994).

[33] L. Schwartz, *Distributions à valeurs vectorielles*, Annales de l'Institut Fourier, **Tome 7** (1957) et **Tome 8** (1959).

[34] I. Yokoi, *Positive generalized white noise functionals*, Hiroshima Math. J., **20** (1990), 137–157.

Departement de Mathematques
Faculte des Sciences de Tunis
Campus Universitaire, 1060–Tunis–Tunisie
habib.ouerdiane@bst.rnu.tn