Canad. J. Math. Vol. **58** (6), 2006 pp. 1229–1267

Intégrales orbitales tordues sur $GL(n, F)$ et corps locaux proches : applications

Guy Henniart et Bertrand Lemaire

Résumé. Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien, $G = GL(n, F)$ pour un entier $n \geq 2$, et κ un caractère de $F^\times$ trivial sur $(F^\times)^n$. On prouve une formule pour les κ-intégrales orbitales régulières sur G permettant, si F est de caractéristique > 0, de les relever à la caractéristique nulle. On en déduit deux résultats nouveaux en caractéristique > 0 : le "lemme fondamental" pour l'induction automorphe, et une version simple de la formule des traces tordue locale d'Arthur reliant κ-intégrales orbitales elliptiques et caractères κ-tordus. Cette formule donne en particulier, pour une série κ-discrète de G, les κ-intégrales orbitales elliptiques d'un pseudo-coefficient comme valeurs du caractère κ-tordu.

Introduction

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien, et κ un *caractère* de $F^\times$, c'est-à-dire un homomorphisme continu de $F^\times$ dans $\mathbb{C}^\times$. On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$. Soit $G = GL(n, F)$ pour un entier $n \geq 2$. Un élément $\gamma \in G$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts (notons qu'on ne demande pas que ces derniers soient séparables sur F). On note G_{r} l'ensemble des éléments réguliers de G. Soit $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$. Le centralisateur $G_\gamma = \{g \in G : g^{-1}\gamma g = \gamma\}$ coïncide avec le groupe multiplicatif $F[\gamma]^\times$ de la F-algèbre semisimple $F[\gamma]$. Notons G_γ^{d} la composante déployée de G_γ, *i.e.*, le tore déployé maximal de G_γ (vu comme le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique défini sur F). Choisissons une mesure G-invariante $d_\gamma\overline{g}$ sur l'espace homogène $G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G$. Si $\det(G_\gamma^{\mathrm{d}}) \subset \ker\kappa$, on note $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,, \gamma)$ la distribution sur G définie par

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G_\gamma} \kappa \circ \det(g) f(g^{-1}\gamma g)\, d_\gamma\overline{g} \quad (f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)).$$

Puisque le groupe $G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G_\gamma$ est compact et que l'orbite $\{g^{-1}\gamma g : g \in G\}$ est fermée dans G (pour la topologie $\mathfrak{p}_F$-adique), l'intégrale converge absolument. Pour $g \in G$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on a $\Lambda_\kappa^G(f, g^{-1}\gamma g) = \kappa \circ \det(g^{-1})\Lambda_\kappa^G(f, \gamma)$.

On suppose désormais que κ est trivial sur $(F^\times)^n$. Notons G_{r}^κ l'ensemble des $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$ tels que $\det(G_\gamma^{\mathrm{d}}) \subset \ker\kappa$, et G_{e} l'ensemble des $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$ tels que la F-algèbre $F[\gamma]$ soit un corps ; les éléments de G_{e} sont dits *elliptiques*. On a donc l'inclusion $G_{\mathrm{e}} \subset G_{\mathrm{r}}^\kappa$.

Reçu par la rédaction le 28 mai 2004.
Classification (AMS) par sujet: 22E50.
Mots clés: corps local, représentation lisse, intégrale orbitale tordue, induction automorphe, lemme fondamental, formule des traces locale, pseudo-coefficient.

Soit un entier $a \geq 1$. Posons $K^a = 1 + \mathfrak{p}_F^a \mathrm{M}(n, \mathfrak{o}_F) \subset GL(n, \mathfrak{o}_F)$, et notons $\mathcal{H}(G, K^a)$ l'algèbre de Hecke formée des fonctions complexes sur G, qui sont K^a-biinvariantes à support compact. Pour $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$, en modifiant la construction de [L1], on obtient notre premier résultat (lemmes 1.4.1 et 1.5.1) : une "formule explicite" pour les κ-intégrales orbitales $\Lambda_\kappa^G(f, \gamma)$ des fonctions $f \in \mathcal{H}(G, K^a)$. Par descente parabolique, cette formule implique en particulier que si les mesures $d_\gamma \bar{g}$ ($\gamma \in G_{\mathrm{r}}^\kappa$) sont choisies de manière compatible (*cf.* 2.5), alors l'application qui à γ associe la forme linéaire sur $\mathcal{H}(G, K^a)$ définie par la distribution $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,, \gamma)$, est localement constante sur G_{r}^κ. Ceci généralise le résultat bien connu d'Harish–Chandra pour les intégrales orbitales non tordues [HC3].

Soient r un entier $\geq a$, et F' un corps commutatif localement compact non archimédien *r-proche* de F, *i.e.,* tel que les anneaux tronqués $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F^r$ et $\mathfrak{o}_{F'}/\mathfrak{p}_{F'}^r$ soient isomorphes. Choisissons un isomorphisme d'anneaux $\tau\colon \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F^r \to \mathfrak{o}_{F'}/\mathfrak{p}_{F'}^r$ et des uniformisantes ϖ et ϖ' de F et F' telles que $\tau(\varpi + \mathfrak{p}_F^r) = \varpi' + \mathfrak{p}_{F'}^r$. Le triplet (τ, ϖ, ϖ') détermine un isomorphisme de groupes $F^\times/(1 + \mathfrak{p}_F^r) \simeq F'^\times/(1 + \mathfrak{p}_{F'}^r)$, et si r est assez grand, κ correspond à un caractère κ' de $F'^\times$ trivial sur $(F'^\times)^n$. Soit $\mathfrak{I} \subset \mathrm{M}(n, \mathfrak{o}_F)$ la $\mathfrak{o}_F$-algèbre formée des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}_F$. Posons $I^{nr} = 1 + \mathfrak{p}_F^r \mathfrak{I}$ et $\mathcal{H}_F^r = \mathcal{H}(G, I^{nr})$. Le triplet (τ, ϖ, ϖ') détermine un isomorphisme d'algèbres $\zeta\colon \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$ [L1]. Posons $G' = GL(n, F')$, et soit $\gamma \in G_{\mathrm{r}}^\kappa$. Le résultat principal de l'article s'énonce comme suit (théorème 2.6.2) : si r est "suffisamment grand", alors il existe un voisinage I^{nr}-biinvariant $\mathcal{V}$ de γ dans G_{r}^κ tel que $\zeta(\mathcal{V}) \subset G_{\mathrm{r}}'^{\kappa'}$ et

$$\Lambda_{\kappa'}^{G'}(\zeta(f), y) = \Lambda_\kappa^G(f, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G, K^a))$$

pour tout $y \in \zeta(\mathcal{V})$, où $\zeta(\mathcal{V})$ désigne la partie de G' définie par $\mathbf{1}_{\zeta(\mathcal{V})} = \zeta(\mathbf{1}_{\mathcal{V}})$. Bien sûr, cet énoncé sous-entend que les mesures définissant les distributions $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,, \gamma)$ et $\Lambda_{\kappa'}^{G'}(\,\cdot\,, y)$, ont été choisies de manière compatible (*cf.* 2.6).

Si F est de caractéristique > 0, alors pour tout entier $r \geq 1$, on peut trouver un corps F' *de caractéristique nulle* r-proche de F : en effet, si p est la caractérisque résiduelle de F, alors n'importe quelle extension finie $F'/\mathbb{Q}_p$ de même corps résiduel que F et d'indice de ramification $e(F/\mathbb{Q}_p) \geq r$, convient. Par suite, tout résultat — connu en caractéristique nulle — relatif aux κ-intégrales orbitales régulières de fonctions $f \in \mathcal{H}(G, \Gamma)$ pour un sous-groupe ouvert compact fixé $\Gamma \subset G$, doit pouvoir en principe s'étendre à la caractéristique > 0 grâce au théorème 2.6.2. On donne ici deux applications de ce principe.

La première application est le lemme fondamental pour l'induction automorphe. Supposons κ non ramifié, et soit L/F une extension non ramifiée de degré $d = (F^\times : \ker \kappa)$. Posons $m = n/d$, $H = GL(m, L)$ et $K^\natural = GL(m, \mathfrak{o}_L)$. Le choix d'une $\mathfrak{o}_F$-base de $\mathfrak{o}_L$ fournit une identification $H \subset G$ telle que $K^\natural = H \cap K$. Via les isomorphismes de Satake pour G et H, Waldspurger [W] a défini un homomorphisme d'algèbres $b\colon \mathcal{H}(G, F) \to \mathcal{H}(H, K^\natural)$. Notons $G_{\mathrm{sr}} \subset G_{\mathrm{r}}$ l'ensemble des éléments absolument semisimples réguliers de G. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$ est défini un facteur de transfert $\Delta_G^H(\gamma)$ [W, §II-4],[Ha, §5]. Le lemme fondamental pour l'induction automorphe s'énonce comme suit : si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K)$ on a l'égalité

$$\Delta_G^H(\gamma)\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \Lambda^H(b(f), \gamma),$$

où $\Lambda^H(b(f),\gamma)$ désigne l'intégrale orbitale

$$\int_{H_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash H} b(f)(h^{-1}\gamma h)\, d_\gamma \bar{h}.$$

Là encore, l'énoncé sous-entend que les mesures définissant les distributions $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,,\gamma)$ et $\Lambda^H(\,\cdot\,,\gamma)$ ont été choisies de manière compatible (*cf.* 3.2). Pour F de caractéristique nulle, ce lemme fondamental a été démontré par Waldspurger si n est premier à la caractéristique résiduelle de F [W], puis étendu à n quelconque dans [HL3]. On le démontre ici pour F de caractéristique > 0.

La seconde application est une version simple de la formule des traces κ-tordue *locale* d'Arthur. Fixons un caractère unitaire ω du centre Z de G, et notons $C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ l'espace des fonctions $\phi\colon G\to\mathbb{C}$ localement constantes à support compact modulo Z telles que $\phi(zg)=\omega(z)^{-1}\phi(g)$ ($z\in Z$, $g\in G$). Soit $d\bar{g}$ une mesure de Haar sur $Z\backslash G$. Si π est une représentation (complexe lisse) irréductible κ-stable de G de caractère central ω, le choix d'un opérateur d'entrelacement $A\in\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ permet de définir une forme linéaire Θ_π^A sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$: $\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle=\mathrm{trace}(\pi(\phi d\bar{g})\circ A)$ avec $\pi(\phi d\bar{g})=\int_{Z\backslash G}\phi(g)\pi(g)\,d\bar{g}$. On sait [L4] qu'il existe une fonction localement constante $\Theta_\pi^A\colon G_{\mathrm{r}}\to\mathbb{C}$, qui ne dépend pas du choix de $d\bar{g}$, telle que :

- $\Theta_\pi^A(zg)=\omega(z)\Theta_\pi^A(g)$ pour tout $z\in Z$ et tout $g\in G_{\mathrm{r}}$,
- $\int_{Z\backslash G}\phi(g)|\Theta_\pi^A(g)|\,d\bar{g}<+\infty$ pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(Z\backslash G)$ telle que $\phi\geq 0$,
- $\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle=\int_{Z\backslash G}\phi(g)\Theta_\pi^A(g)\,d\bar{g}$ pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$.

On sait aussi qu'il existe un nombre complexe non nul λ tel que pour tout vecteur v dans l'espace de π, on ait $A^n=\lambda\,\mathrm{Id}$. L'opérateur A est dit *unitaire* si $|\lambda|=1$. Clairement, l'ensemble des opérateurs $A\in\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ qui sont unitaires, est non vide. Si $\gamma\in G_{\mathrm{r}}$, par abus d'écriture, on note $\langle\,\cdot\,,\Theta_\pi^\kappa\rangle\overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}$ la forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ définie par $\langle\phi,\Theta_\pi^\kappa\rangle\overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}=\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle\overline{\Theta_\pi^A(\gamma)}$ pour un (*i.e.*, pour tout) $A\in\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ unitaire.

Une représentation irréductible κ-stable de G est dite κ*-discrète* si elle est tempérée et n'est pas équivalente à l'induite parabolique normalisée d'une représentation κ-stable d'un sous-groupe de Levi propre de G. La version simple de la formule des traces κ-tordue locale que nous prouvons ici est la suivante (théorème 4.2.2) : pour toute fonction $\phi\in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ telle que $\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma)=0$ ($\gamma\in G_{\mathrm{r}}\smallsetminus G_{\mathrm{e}}$), on a

$$\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma)=\sum_\pi\langle\phi,\Theta_\pi^\kappa\rangle\overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}\quad(\gamma\in G_{\mathrm{e}}),$$

où π parcourt l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ-discrètes de G. Ici, $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,,\gamma)$ ($\gamma\in G_{\mathrm{r}}$) désigne la forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ définie comme plus haut par le choix d'une mesure G-invariante $d_\gamma\bar{g}$ sur l'espace homogène $G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G$. Et l'énoncé sous-entend que pour $\gamma\in G_{\mathrm{e}}$, auquel cas $G_\gamma^{\mathrm{d}}=Z$, la mesure de Haar sur $Z\backslash G$ définissant $\Lambda_\kappa^G(\cdot,\gamma)$ est la même que celle définissant les formes linéaires $\langle\,\cdot\,,\Theta_\pi^\kappa\rangle\overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}$ pour π irréductible et κ-discrète. En particulier, on a (corollaire 4.2.4) : soit π une représentation irréductible κ-discrète de G, et soit

$A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$ un opérateur unitaire. Alors si $\phi \in C_c^\infty(G,\omega)$ est un *pseudo-coefficient pour* Θ_π^A, [HL1], on a

$$\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = \overline{\Theta_\pi^A(\gamma)} \quad (\gamma \in G_e).$$

Notons que cela s'applique en particulier pour $\kappa = 1$.

Ce travail s'inscrit dans une série d'articles [HL1],[HL2],[HL3] dans lesquels les auteurs se proposent d'étendre à la caractéristique non nulle les théories du changement de base et de l'induction automorphe pour G, connues pour F de caractéristique nulle. Par exemple le lemme fondamental démontré ici permettra d'étendre à la caractéristique > 0 le travail de G. Henniart et R. Herb [HH] prouvant l'existence d'une application de relèvement entre représentations de $H(= GL(m,E))$ et représentations de G. Notons que ces résultats sur l'induction automorphe et le changement de base, sont utilisés dans un travail commun de C. Bushnell et G. Henniart [BH1],[BH2], pour décrire explicitement et *en toute caractéristique* la correspondance de Langlands entre représentations irréductibles de degré n du groupe de Weil de F et représentations irréductibles cuspidales de G, dans le cas où n est premier à la caractéristique résiduelle de F.

Décrivons maintenant brièvement comment sont organisés les résultats. L'article est divisé en quatre sections auxquelles s'ajoute un appendice.

La "formule explicite" pour les κ-intégrales orbitales elliptiques sur G est prouvée dans la section 1. Comme on l'a dit plus haut, il s'agit d'une formule analogue à celle de [L1] pour les intégrales orbitales non tordues; d'ailleurs pour $\kappa = 1$, on retrouve la formule de [L1]. Le principe de submersion d'Harish–Chandra [HC3] joue un rôle central dans la construction, ici comme dans [L1]. C'est sur lui que porte la modification: plutôt que de chercher à recopier [L1] en remplaçant G par $G_0 = \ker(\kappa \circ \det)$, c'est-à-dire à intégrer une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ sur une G_0-orbite $\{g^{-1}\gamma g : g \in G_0\}$ avec γ elliptique (ce qui conduit à des contorsions malcommodes), on a préféré opter pour un calcul direct de $\Lambda_\kappa^G(f,\gamma)$ en injectant κ dans l'application issue du principe de submersion (*cf.* 1.4). On peut de cette manière utiliser sans changement tous les lemmes techniques de [L1, §1].

Dans la section 2, on rappelle les résultats de Deligne [D] sur les corps proches ainsi que la construction des isomorphismes d'algèbres de Hecke relatives à des corps proches [L1]. Ensuite, grâce à la formule pour les κ-intégrales orbitales elliptiques prouvée dans la section 1, on montre comme dans [L1] le résultat de relèvement des κ-intégrales orbitales régulières relatives à deux corps "suffisamment proches". On déduit le cas régulier non elliptique du cas elliptique par descente parabolique.

Le lemme fondamental pour l'induction automorphe est démontré dans la section 3. Il s'agit essentiellement de vérifier que les isomorphismes entre algèbres de Hecke sphériques relatives à deux corps 1-proches, sont compatibles aux homomorphismes de Satake. Puisque le lemme fondamental est connu en caractéristique nulle [W],[HL3], on peut le déduire en caractéristique non nulle grâce au résultat de relèvement prouvé dans la section 2.

Dans la section 4, on montre la version simple de la formule des traces κ-tordue locale. On se ramène à montrer une version simple de la formule des traces *non tordue* locale pour le groupe G_0. On sait [W] que G_0 est quotient d'un groupe réductif connexe par un sous-groupe central compact. Pour F de caractéristique nulle, on peut donc appliquer le travail d'Arthur [A], et en déduire la version simple de la formule des traces κ-tordue locale. Par relèvement à la caractéristique nulle, on en déduit la même formule pour F de caractéristique > 0 : on relève le côté géométrique grâce à la section 2 ; quant au côté spectral, il est beaucoup plus facile à relever. En effet, on sait [D],[L3] que si F et F' sont deux corps r-proches, alors tout isomorphisme d'algèbres $\zeta\colon \mathcal{H}_F^r \to \mathcal{H}_{F'}^r$ induit une “correspondance” entre (certaines) représentations de $GL(n,F)$ et représentations de $GL(n,F')$. Si r est assez grand, κ se relève comme plus haut en un caractère κ' de $F'^\times$, rendant cette correspondance compatible à la torsion par κ et κ'. Dans l'appendice, on montre grâce au travail de Bushnell [B], que cette correspondance est compatible à l'induction parabolique et à la restriction de Jacquet. D'après la classification des représentations irréductibles κ-discrètes de G donnée dans [HH], cela implique en particulier que les représentations κ-discrètes de G correspondent aux représentations κ'-discrètes de G'.

Dans ce papier, on appelle *représentation* d'un groupe topologique (localement profini) une représentation lisse dans un espace vectoriel complexe. L'espace d'une représentation π est noté V_π. Et si π est une représentation irréductible, on note $[\pi]$ sa classe d'équivalence. Si X est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_c^\infty(X)$ l'espace des fonctions complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact.

1 Une formule pour les κ-intégrales orbitales elliptiques

1.1 On fixe F un corps commutatif localement compact non archimédien. On note

- $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F ;
- $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$;
- $U_F = \mathfrak{o}_F \smallsetminus \mathfrak{p}_F$ le groupe des unités de $\mathfrak{o}_F$, et $U_F^a = 1 + \mathfrak{p}_F^a$ ($a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) ;
- $\mathrm{k}_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel de F ;
- $\nu_F\colon F \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation normalisée (surjective) sur F ;
- $|\cdot|_F\colon F \to \mathbb{Q}$ la valeur absolue sur F définie par $|x|_F = q^{-\nu_F(x)}$ où $q = q_F$ est le cardinal de k_F.

Si E est une extension finie de F, on note $e(E/F)$ et $f(E/F)$ l'indice de ramification et le degré résiduel de E/F. On note $\mathrm{N}_{E/F}$ le morphisme norme $E^\times \to F^\times$.

1.2 Nous aurons besoin des résultats de [BK] et des notations correspondantes. Soit E une extension finie de F, et soit $\gamma \in E^\times$ tel que $F[\gamma] = E$. On pose $e = e(E/F)$, $f = f(E/F)$ et $n = ef$. L'ensemble $\{\mathfrak{p}_E^i : i \in \mathbb{Z}\}$ est une chaîne de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans E, vu comme un espace vectoriel sur F. Elle définit un $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}(E) = \bigcap_i \mathrm{End}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{p}_E^i)$ dans $A(E) = \mathrm{End}_F(E)$. Le corps E s'identifie naturellement à un sous-anneau de $A(E)$, et $\mathfrak{A}(E)$ est l'unique $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire dans $A(E)$ normalisé par $E^\times$. Notons $a_\gamma\colon A(E) \to A(E)$ l'application adjointe $x \mapsto \gamma x - x\gamma$. Rappelons, d'après [BK, 1.4.5 et 1.4.11], la définition de l'invariant $k_F(\gamma) = k_0(\gamma, \mathfrak{A}(E)) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$: si $E = F$, alors $k_F(\gamma) = -\infty$; sinon, $k_F(\gamma)$ est le plus petit entier k vérifiant $\mathfrak{P}^k \cap a_\gamma(A(E)) \subset a_\gamma(\mathfrak{A}(E))$ où $\mathfrak{P}$ désigne le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}(E)$. On pose

- $n_F(\gamma) = -\nu_E(\gamma)$,
- $k_F^*(\gamma) = k_F(\gamma) + n_F(\gamma) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Rappelons que si $E \neq F$, on a $k_F^*(F) \geq 0$ avec égalité si et seulement si γ est F-*minimal* [BK, 1.4.14, 1.4.15].

Notons $D_F(\gamma)$ le déterminant de l'endomorphisme $u \mapsto u - \gamma^{-1}u\gamma$ du F-espace vectoriel $E\backslash A(E)$ (on a $D_F(\gamma) = 1$ si $E = F$). On a donc $D_F(\gamma) \neq 0$ si et seulement si l'extension E/F est séparable. Soit $f_\gamma \in F[T]$ le polynôme minimal de γ sur F. Si l'extension E/F est séparable, on a $D_F(\gamma) = \mathrm{N}_{E/F}(\gamma^{1-n} f_\gamma'(\gamma))$ où $f_\gamma' \in F[T]$ désigne le polynôme dérivé de f_γ.

Remarque 1.2.1 Soient $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ et $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$ deux $\mathfrak{o}_F$-ordres héréditaires dans $A(E)$ tels que $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}} \subset \mathfrak{A}(E) \subset \mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$. On suppose que $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ est minimal et que $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$ est maximal. Soit $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{L}_i : i \in \mathbb{Z}\}$ une chaîne de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans E telle que $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}} = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{L})$ et $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}} = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}_F}(\mathfrak{L}_0)$; notons qu'à translation près des indices i par un élément de $n\mathbb{Z}$, la chaîne $\mathfrak{L}$ est unique. Choisissons une $\mathfrak{o}_F$-base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathfrak{L}_0$ qui soit une $\mathfrak{o}_F$-base de $\mathfrak{L}$ au sens de [BK, 1.1.7], et identifions $A(E)$ à l'algèbre de matrices $M(n, F)$ grâce à cette base. Alors $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$ s'identifie à $M(n, \mathfrak{o}_F)$ et $\mathfrak{A}_{\mathrm{m}}$ au sous-anneau de $\mathfrak{A}_{\mathrm{M}}$ formé des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}_F$, et $\mathfrak{A}(E)$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathfrak{A}_M$ formé de matrices triangulaires par blocs.

Soit maintenant $E^\natural$ une F-algèbre semisimple de la forme $E^\natural = E_1 \times \cdots \times E_s$ pour des extensions finies de corps E_i/F, et soit $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in E^\natural$ tel que pour $i = 1, \ldots, s$, on ait $\gamma_i \in E_i^\times$ et $F[\gamma_i] = E_i$. On suppose que $\dim_F(E^\natural) \geq 2$. Posons $A(E^\natural) = \mathrm{End}_F(E^\natural)$, $M(E^\natural) = \prod_{i=1}^s \mathrm{End}_F(E_i)$, et

$$D_F(\gamma) = \det{}_F(u \mapsto u - \gamma^{-1}u\gamma; E^\natural\backslash A(E^\natural)),$$

$$D_F^*(\gamma) = \prod_{i=1}^s D_F(\gamma_i),$$

$$\overline{D}_F(\gamma) = \det{}_F(u \mapsto u - \gamma^{-1}u\gamma; M(E^\natural)\backslash A(E^\natural)) \quad (\text{si } s = 1, \text{ on a } \overline{D}_F(\gamma) = 1).$$

Si pour $i = 1, \ldots, s$, l'extension E_i/F est séparable, alors on a

$$\overline{D}_F(\gamma) = D_F^*(\gamma)^{-1} D_F(\gamma).$$

1.3 Soient $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $G = GL(n, F)$, $P_0 \subset G$ le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures, et $A_0 \subset P_0$ le tore déployé formé des matrices diagonales. Posons $K = GL(n, \mathfrak{o}_F)$, et soit $I \subset K$ le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}_F$. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, notons $s_i \in K$ la matrice de transposition échangeant les lignes i et $i+1$, et notons $W \subset K$ le sous-groupe engendré par $s_1, \ldots, s_{n-1}$. Choisissons une uniformisante ϖ de F. On note s_ϖ et t_ϖ les matrices

$n\times n$ définies par

$$s_\varpi=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&\varpi^{-1}\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\\\varpi&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad t_\varpi=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\\varpi&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

Soit $W(\varpi)$ le sous-groupe de G engendré par $s_1,\dots,s_{n-1},s_\varpi$ et t_ϖ. On a la décomposition d'Iwahori $G=\coprod_{\tilde w\in W(\varpi)}I\tilde wI$. Notons $\Delta(\varpi)\subset A_0\cap W(\varpi)$ l'ensemble des matrices diagonales de la forme $\mathrm{diag}(1,\varpi^{\alpha_1},\dots,\varpi^{\alpha_{n-1}})$ avec $0\le\alpha_1\le\cdots\le\alpha_{n-1}$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$. Soit Z le centre de G, naturellement identifié à $F^\times$. À partir de la décomposition d'Iwahori, on obtient la décomposition $G=\bigcup_{\tilde w}ZI\tilde wK$ où $\tilde w$ parcourt les éléments de l'ensemble $W\Delta(\varpi)=\{w\delta : w\in W,\delta\in\Delta(\varpi)\}$.

Soit $J\subset G$ un sous-groupe parahorique *standard*, c'est-à-dire un sous-groupe parahorique vérifiant la double inclusion $I\subset J\subset K$. D'après le paragraphe précédent, on a la décomposition

$$G=\bigcup_{\tilde w\in W\Delta(\varpi)}ZJ\tilde wK.$$

Pour $\tilde w\in W\Delta(\varpi)$, on note $c_J(\tilde w)$ le cardinal de l'ensemble $W\Delta(\varpi)\cap ZJ\tilde wK$, qui est aussi le cardinal de $ZI\backslash ZJ\tilde wK/K$.

Un élément $\gamma\in G$ est dit *régulier* si son polynôme caractéristique est produit de polynômes irréductibles sur F deux à deux distincts, et *elliptique* si son polynôme caractéristique est irréductible sur F. On note $G_{\mathrm r}$ (resp., $G_{\mathrm e}$) l'ensemble des éléments réguliers (resp., elliptiques) de G. Si $\gamma\in G_{\mathrm e}$, on note $\mathfrak{A}_\gamma$ l'unique $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire dans $M(n,F)$ normalisé par $F[\gamma]^\times$, et l'on pose $J_\gamma=\mathfrak{A}_\gamma^\times$; c'est un sous-groupe parahorique de G. Si J_γ est standard, on dit que γ est *en position standard*. D'après la remarque 1.2.1, pour tout $\gamma\in G_{\mathrm e}$, il existe un $g\in G$ tel que $g^{-1}\gamma g$ soit en position standard.

1.4 Soient dg et dz des mesures de Haar sur G et Z, et soit dp une mesure de Haar à gauche sur P_0. Dans ce numéro, fixons un élément $\gamma\in G_{\mathrm e}$. Puisque la F-algèbre $F[\gamma]$ ne contient pas d'élément nilpotent non nul, pour $w\in W$, l'application $\phi_\gamma^w\colon G\times P_0\to G$, $(g,p)\mapsto g^{-1}\gamma gwpw^{-1}$ est partout submersive [HC3, Theorem 1]. Et d'après [HC1, Theorem 11], il existe une unique application linéaire surjective $C_{\mathrm c}^\infty(G\times P_0)\to C_{\mathrm c}^\infty(\phi_\gamma^w(G))$, $u\mapsto\phi_{\gamma,u}^w$ vérifiant la propriété : pour toute fonction $u\in C_{\mathrm c}^\infty(G\times P_0)$ et toute fonction $f\in C_{\mathrm c}^\infty(G)$, on a

$$\iint_{G\times P_0}u(g,p)f\circ\phi_\gamma^w(g,p)\,dgdp=\int_G\phi_{\gamma,u}^w(g)f(g)\,dg.$$

Fixons un caractère κ de $F^\times$ trivial sur $(F^\times)^n$. Nous noterons aussi κ le caractère de G donné par $\kappa\circ\det$; il est trivial sur Z. Soit $J\subset G$ un sous-groupe parahorique standard. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $K^a = 1 + \mathfrak{p}_F^a M(n, \mathfrak{o}_F)$, $P_0^a = P_0 \cap K^a$, et l'on note $u_{J,\kappa}^a \in C_c^\infty(G \times P_0)$ la fonction définie par

$$u_{J,\kappa}^a(g, p) = \begin{cases} \kappa(g) & \text{si } (g, p) \in J \times P_0^a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $w \in W$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose

$$\phi_{\gamma,J,\kappa}^{w,a} = \phi_{\gamma,u_{J,\kappa}^a}^w.$$

Pour $f \in C_c^\infty(G)$, on pose

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \int_{Z\backslash G} \kappa(g) f(g^{-1}\gamma g) \, \frac{dg}{dz}$$

et l'on note $f_\kappa^K \in C_c^\infty(G)$ la fonction définie par

$$f_\kappa^K(g) = \int_K \kappa(k) f(k^{-1}gk) \, dk$$

avec $dk = \mathrm{vol}(K, dg)^{-1} dg|_K$ (de sorte que $\mathrm{vol}(K, dk) = 1$). Si Γ est un sous-groupe ouvert compact de G, on note $\mathcal{H}(G, \Gamma)$ le sous-espace de $C_c^\infty(G)$ formé des fonctions Γ-biinvariantes, muni du produit de convolution défini par la mesure de Haar $d_\Gamma g$ sur G telle que $\mathrm{vol}(\Gamma, d_\Gamma g) = 1$.

Lemme 1.4.1 *Soit $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K^a)$, on a la formule*

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \sum_{w \in W} \sum_{\delta \in \Delta(\omega)} c_J^{w\delta,a} \kappa(w\delta) \int_G \phi_{\gamma,J,\kappa}^{w,a}(g) f_\kappa^K(\delta^{-1} w^{-1} g w \delta) \, dg$$

avec

$$c_J^{\tilde{w},a} = c_J(\tilde{w})^{-1} \frac{\mathrm{vol}\big(Z\backslash ZJ\tilde{w}K, \frac{dg}{dz}\big)}{\mathrm{vol}(J, dg)\,\mathrm{vol}(P_0^a, dp)} \quad (\tilde{w} \in W\Delta(\varpi)).$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{H}(G, K^a)$. D'après la décomposition $G = \bigcup_{\tilde{w} \in W\Delta(\varpi)} ZJ\tilde{w}K$, on a

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \sum_{\tilde{w} \in W\Delta(\varpi)} c_J(\tilde{w})^{-1} I_{\tilde{w}}$$

avec

$$I_{\tilde{w}} = \int_{Z\backslash ZJ\tilde{w}K} \kappa(g) f(g^{-1}\gamma g) \, \frac{dg}{dz}.$$

Soit $\tilde{w} \in W\Delta(\varpi)$. Écrivons $\tilde{w} = w\delta$ avec $w \in W$ et $\delta \in \Delta(\varpi)$ (l'écriture est unique). Puisque f appartient à $\mathcal{H}(G, K^a)$ et que K^a est distingué dans K, on a $f_\kappa^K \in \mathcal{H}(G, K^a)$. Comme $\delta^{-1}P_0^a\delta \subset K^a$, on obtient que

$$I_{\tilde{w}} = \frac{\mathrm{vol}(Z\backslash ZJ\tilde{w}K, \frac{dg}{dz})}{\mathrm{vol}(J, dg)} \int_J \kappa(g\tilde{w}) f_\kappa^K(\tilde{w}^{-1}g^{-1}\gamma g\tilde{w})\, dg$$
$$= \frac{\mathrm{vol}(Z\backslash ZJ\tilde{w}K, \frac{dg}{dz})}{\mathrm{vol}(J, dg)\,\mathrm{vol}(P_0^a, dp)} \kappa(\tilde{w}) \iint_{J\times P_0^a} \kappa(g) f_\kappa^K(\delta^{-1}w^{-1}g^{-1}\gamma gwp\delta)\, dgdp.$$

Or par définition, on a

$$\iint_{J\times P_0^a} \kappa(g) f_\kappa^K(\delta^{-1}w^{-1}g^{-1}\gamma gwp\delta)\, dgdp = \int_G \phi_{\gamma,J,\kappa}^{w,a}(g) f_\kappa^K(\tilde{w}^{-1}g\tilde{w})\, dg.$$

D'où le lemme. ∎

Remarque 1.4.2 Le lemme ci-dessus est une simple généralisation du lemme 1 de [L1, §2.2]. Notons que l'énoncé de ce dernier comporte une erreur : il faut remplacer $\mathrm{vol}(F^\times H\delta K_F, \frac{dg}{dz})$ par $\mathrm{vol}(F^\times Hs\delta K_F, \frac{dg}{dz})$. Notons aussi que cette erreur n'entraîne aucune conséquence fâcheuse quant au résultat principal de [L1], *cf.* la fin de la démonstration de [L1, §3.3, théorème].

1.5 Posons $A = \mathrm{M}(n, F)$. Fixons un caractère Ψ_F de $(F, +)$ de conducteur $\mathfrak{p}_F$, et notons Ψ_A le caractère de $(A, +)$ défini par $\Psi_A = \Psi_F \circ \mathrm{tr}$ où $\mathrm{tr}\colon A \to F$ désigne la trace usuelle. La forme bilinéaire symétrique $A \times A \to F, (x, y) \mapsto \Psi_A(xy)$ est non dégénérée. Si R est un $\mathfrak{o}_F$-réseau dans A, on note $R^\vee$ l'$\mathfrak{o}_F$-réseau dual défini par $R^\vee = \{x \in A : \Psi_A(xR) = 1\}$.

Soit $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$. Posons $E = F[\gamma]$, $e = e(E/F)$, $k_0 = k_F(\gamma)$ et $k_1 = k_F^*(\gamma)$. Soit $\mathfrak{N}_\gamma$ l'$\mathfrak{o}_F$-réseau dans A défini par [BK, 1.4.3] $\mathfrak{N}_\gamma = \mathfrak{N}_{k_0}(\gamma, \mathfrak{A}_\gamma)$. Rappelons que $\mathfrak{N}_\gamma$ est un $(\mathfrak{o}_E, \mathfrak{o}_E)$-bimodule. Posons

$$\Lambda_\gamma = (\mathfrak{p}_E^{1-k_1}\mathfrak{N}_\gamma)^\vee.$$

Soit $\mathfrak{P}_\gamma$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{A}_\gamma$. Par définition de $\mathfrak{N}_\gamma$, on a les inclusions $\mathfrak{P}_\gamma^{k_1} \subset \Lambda_\gamma \subset \mathfrak{A}_\gamma$.

On suppose jusqu'à la fin de ce numéro que γ est *en position standard* (*cf.* 1.3). Pour $w \in W$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $J_\gamma^a = 1 + \mathfrak{P}_\gamma^a$, $\phi_{\gamma,\kappa}^{w,a} = \phi_{\gamma,J_\gamma,\kappa}^{w,a}$, et l'on note dp_w la mesure de Haar à gauche sur wP_0w^{-1} telle que $\mathrm{vol}(wP_0w^{-1} \cap K, dp_w) = 1$.

Lemme 1.5.1 *Soient $w \in W$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, et soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \geq \sup\{1+\frac{k_1}{e}, a-\frac{k_1}{e}\}$ et $\kappa(J_\gamma^{em}) = 1$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, on a*

$$\int_G \phi_{\gamma,\kappa}^{w,a}(g) f(g)\, dg = d_\gamma^{w,a} \sum_{(i,j)} \kappa(x_i) \int_{x_i^{-1}\gamma(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)x_iy_j} f(g)\, dg$$

avec

$$d_\gamma^{w,a} = \frac{\mathrm{vol}(J_\gamma^{em}, dg)\,\mathrm{vol}(wP_0w^{-1}\cap J_\gamma^{em+k_1}, dp_w)}{\mathrm{vol}(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma, dg)}\,;$$

les couples (x_i, y_j) parcourant un système de représentants dans $J_\gamma \times wP_0^a w^{-1}$ des classes $(J_\gamma^{em}\backslash J_\gamma)\times((wP_0w^{-1}\cap J_\gamma^{em+k_1})\backslash wP_0^aw^{-1})$.

Preuve Soit $f \in C_c^\infty(G)$. Puisque $m \geq \sup\{1+\frac{k_1}{e}, a-\frac{k_1}{e}\}$, on a l'inclusion $J_\gamma^{em+k_1} \subset K^a$. Et puisque $wP_0^aw^{-1} = wP_0w^{-1}\cap K^a$, on a

$$\int_G \phi_{J,\kappa}^{w,a}(g)f(g)\,dg = \iint_{J_\gamma\times wP_0^aw^{-1}} \kappa(g)f(g^{-1}\gamma g p_w)\,dg dp_w$$

$$= \sum_{(i,j)}\kappa(x_i)\iint_{J_\gamma^{me}x_i\times(wP_0w^{-1}\cap J_\gamma^{em+k_1})y_j} f(g^{-1}\gamma g p_w)\,dgdp_w,$$

les couples (x_i, y_j) étant pris comme dans l'énoncé. Fixons un tel couple (x_i, y_j), et notons $\mathfrak{p}_0 = \mathrm{Lie}(P_0)$ la sous-F-algèbre parabolique de A formée des matrices triangulaires supérieures. D'après [L1, §1.2, lemme 1]

$$\pi_{i,j}\colon \mathfrak{A}_\gamma^{em}\times(x_iw\mathfrak{p}_0w^{-1}x_i^{-1}\cap\mathfrak{A}_\gamma^{em+k_1}) \to \mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma,\ (x,y)\mapsto x-\gamma^{-1}x\gamma+y$$

est un morphisme surjectif de $\mathfrak{o}_F$-modules. Et d'après [L1, §1.2, lemme 2], l'application $G\times wP_0w^{-1}\to G$, $(g,p_w)\mapsto g^{-1}\gamma g p_w$ induit une application surjective

$$\phi_{i,j}\colon J_\gamma^{me}x_i\times(wP_0w^{-1}\cap J_\gamma^{em+k_1})y_j \to x_i^{-1}\gamma(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)x_iy_j.$$

On applique ensuite [L2, lemme 5.3.3] : il existe un système de coordonnées

$$\beta_{i,j}\colon J_\gamma^{me}x_i\times(wP_0w^{-1}\cap J_\gamma^{em+k_1})y_j \to \mathfrak{A}_\gamma^{em}\times(x_iw\mathfrak{p}_0w^{-1}x_i^{-1}\cap\mathfrak{A}_\gamma^{em+k_1})$$

de jacobien constant égal à 1, tel que, posant

$$\lambda_{i,j}\colon x_i^{-1}\gamma(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)x_iy_j \to \mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma,\ g\mapsto \gamma^{-1}x_igy_j^{-1}x_i^{-1}-1,$$

on ait $\pi_{i,j}\circ\beta_{i,j} = \lambda_{i,j}\circ\phi_{i,j}$. D'où le résultat [L2, corollaire 5.3.4]. ■

Pour $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $\mathcal{V}(\gamma,m) = \gamma(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)$. Notons que puisque $\mathfrak{P}^{k_1}\subset\Lambda_\gamma$, pour $m\geq\frac{k_1}{e}$, on a $(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma) = (1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)$.

Proposition 1.5.2 *Soit $a\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, et soit $m\in\mathbb{Z}$ tel que $m\geq\sup\{1+\frac{k_1}{e}, a-\frac{k_1}{e}\}$ et $\kappa(J_\gamma^{em}) = 1$. Alors $\mathcal{V}(\gamma,m)\subset G_e$, et pour tout $y\in\mathcal{V}(\gamma,m)$, on a*

$$\Lambda_\kappa^G(y,f) = \Lambda_\kappa^G(\gamma,f)\quad(f\in\mathcal{H}(G,K^a)).$$

Preuve On a $\mathcal{V}(\gamma,m)\subset\gamma(1+\mathfrak{P}_\gamma^{1+k_1})$, et d'après [L1, §2.3], on a $\gamma(1+\mathfrak{P}_\gamma^{1+k_1})\subset G_e$. De plus [L1, §2.3], pour $y\in\mathcal{V}(\gamma,m)$, on a $\mathfrak{A}_y = \mathfrak{A}_\gamma$ (donc $e(F[y]/F) = e$), $k_0(y,\mathfrak{A}_\gamma) = k_0$, $\Lambda_y = \Lambda_\gamma$ et $y(1+\varpi\mathfrak{p}_F^m\Lambda_y) = \gamma(1+\mathfrak{p}_F^m\Lambda_\gamma)$. On conclut grâce aux lemmes 1.4.1 et 1.5.1. ■

2 κ-intégrales orbitales régulières et corps locaux proches

Dans cette section, on montre le résultat principal de l'article (théorème 2.6.2). Ce résultat généralise [L1, théorème 3.5], dans lequel on relève des intégrales orbitales régulières non tordues, *i.e.*, $\kappa = 1$. La structure de la démonstration est la même dans le cas tordu et dans le cas non tordu : on traite d'abord les éléments elliptiques grâce à la proposition 1.5.2, et en utilisant plusieurs calculs de la démonstration de [L1, §3.3, théorème]. Puis on étend le résultat aux éléments réguliers non elliptiques par descente parabolique, comme dans [L1, §3.5, §3.6].

2.1 Soit $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On note $\mathcal{E}(F)$ la catégorie des extensions finies séparables de F, et $\mathcal{E}_r(F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(F)$ définie de la manière suivante [D, §1.3] : une extension finie séparable L/F est dans $\mathcal{E}_r(F)$ si et seulement si $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/F)^r = \{1\}$, où $\tilde{L}/F$ désigne une clôture normale de L/F et $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/F)^r$ le r-ième groupe de ramification de $\mathrm{Gal}(\tilde{L}/F)$ *en notation supérieure* [S, ch. IV, §3]. Notons $T_r(F)$ le triplet $(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F^r, \mathfrak{p}_F/\mathfrak{p}_F^{r+1}, \epsilon_F)$ où ϵ_F désigne la projection canonique $\mathfrak{p}_F/\mathfrak{p}_F^{r+1} \to \mathfrak{p}_F/\mathfrak{p}_F^r$. Dans [D, §2], Deligne construit une catégorie $(\mathrm{ext}\ T_r(F))^r$ et une équivalence de catégories $T\colon (\mathrm{ext}\ T_r(F))^r \to \mathcal{E}_r(F)$.

Soit $\overline{F}$ une clôture séparable de F. Une sous-extension finie L/F de $\overline{F}/F$ est dans $\mathcal{E}_r(F)$ si et seulement si L est contenu dans le sous-corps de $\overline{F}$ fixé par $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^r$; pour la définition de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, *cf.* [S, ch. IV, §3, remarque 1, p. 83]. D'après [D, §3.5], la catégorie $\mathcal{E}_r(F)$ détermine le groupe profini $\mathcal{G}_r(\overline{F}/F) = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)/\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^r$ à automorphisme intérieur près. Précisément, soient F_1 et F_2 deux corps commutatifs localement compacts non archimédiens, et soit $\eta\colon T_r(F_1) \to T_r(F_2)$ un isomorphisme de triplets. Alors via l'équivalence T, η induit une équivalence de catégories $T(\eta)\colon \mathcal{E}_r(F_1) \to \mathcal{E}_r(F_2)$. Et pour toute clôture séparable $\overline{F}_1$ de F_1 et toute clôture séparable $\overline{F}_2$ de F_2, l'équivalence $T(\eta)$ induit un isomorphisme de groupes $\mathcal{G}_r(\overline{F}_1/F_1) \simeq \mathcal{G}_r(\overline{F}_2/F_2)$ unique à automorphisme intérieur près. Par passage aux abélianisés $\mathcal{G}_r(\overline{F}_i/F)^{\mathrm{ab}}$ de $\mathcal{G}_r(\overline{F}_i/F)$ ($i = 1, 2$), on obtient un isomorphisme *canonique* $\mathcal{G}_r(\overline{F}_1/F)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathcal{G}_r(\overline{F}_2/F)^{\mathrm{ab}}$.

Par définition, η est donné par une paire $(\tau, \tilde{\tau})$ où $\tau\colon \mathfrak{o}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F_1}^r \to \mathfrak{o}_{F_2}/\mathfrak{p}_{F_2}^r$ est un isomorphisme d'anneaux et $\tilde{\tau}\colon \mathfrak{p}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F}^{r+1} \to \mathfrak{p}_{F_2}/\mathfrak{p}_{F_2}^{r+1}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{o}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F_1}^r$-modules (pour la structure de $\mathfrak{o}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F_1}^r$-module sur $\mathfrak{p}_{F_2}/\mathfrak{p}_{F_2}^{r+1}$ donnée par τ) tels que $\epsilon_{F_2} \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \epsilon_{F_1}$. D'après [D, §1.2], η détermine un isomorphisme de groupes $\eta^\times : F_1^\times/U_{F_1}^r \simeq F_2^\times/U_{F_2}^r$. On rappelle la construction : on choisit des uniformisantes ϖ_1 et ϖ_2 de F_1 et F_2 telles que $\tilde{\tau}(\varpi_1 + \mathfrak{p}_{F_1}^{r+1}) = \varpi_2 + \mathfrak{p}_{F_2}^{r+1}$. Pour $x \in F_1^\times$, on écrit $x = \varpi_1^\nu u$ avec $\nu = \nu_{F_1}(x)$ et $u = \varpi_1^{-\nu} x \in U_{F_1}$, on choisit un $v \in U_{F_2}$ tel que $\tau(u + \mathfrak{p}_{F_1}^r) = v + \mathfrak{p}_{F_2}^r$, et l'on pose $\eta^\times(xU_{F_1}^r) = \varpi_{F_2}^\nu v U_{F_2}^r$. On vérifie que $\eta^\times$ est bien défini et ne dépend pas du choix de la paire (ϖ_1, ϖ_2).

Soit maintenant L_1/F_1 une sous-extension abélienne de $\overline{F}_1/F_1$ contenue dans $\mathcal{E}_r(F_1)$, et soit L_2/F_2 la sous-extension de $\overline{F}_2/F_2$ qui lui correspond via $T(\eta)$. Par passage aux quotients, l'isomorphisme $\mathcal{G}_r(\overline{F}_1/F)^{\mathrm{ab}} \simeq \mathcal{G}_r(\overline{F}_2/F)^{\mathrm{ab}}$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L_1/F_1) \simeq \mathrm{Gal}(L_2/F_2)$. Pour $i = 1, 2$, puisque $\mathrm{Gal}(L_i/F_i)^r = 1$, on a $U_{F_i}^r \subset N_{L_i/F_i}(U_{L_i})$; et par passage aux quotients, $\eta^\times$ induit un isomorphisme

$F_1^\times/N_{L_1/F_1}(L_1^\times) \simeq F_2^\times/N_{L_2/F_1}(E_2^\times)$. D'après [D, §3.6], le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(L_1/F_1) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(L_2/F_2) \arrow[d] \\ F_1^\times/N_{L_1/F_1}(L_1^\times) \arrow[r, "\simeq"] & F_2^\times/N_{L_2/F_2}(L_2^\times) \end{tikzcd}$$

est commutatif, où les flèches verticales désignent les isomorphismes de réciprocité de la théorie du corps de classe normalisés de telle manière qu'ils envoient les substitutions de Frobenius géométriques sur les uniformisantes. Si κ_1 est un caractère de $F_1^\times$ vérifiant l'inclusion $N_{L_1/F_1}(L_1^\times) \subset \ker\kappa_1$, on note $\eta^\times(\kappa_1)$ le caractère de $F_2^\times$ déduit de κ_1 via l'isomorphisme $F_1^\times/N_{L_1/F_1}(L_1^\times) \simeq F_2^\times/N_{L_2/F_2}(L_2^\times)$.

2.2 Soit $\mathfrak{I}$ l'$\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire dans $M(n, F)$ formé des matrices dans $M(n, \mathfrak{o}_F)$ qui sont triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}_F$. On note $\mathfrak{I}^1$ le radical de Jacobson de $\mathfrak{I}$. Posons $I^0 = I$, et pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, posons $I^a = 1 + \mathfrak{I}^a$ avec $\mathfrak{I}^a = (\mathfrak{I}^1)^a$. On a donc $I^0 = \mathfrak{I}^\times$ et $I^{na} = 1 + \mathfrak{p}_F^a\mathfrak{I}$ $(a \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note $\mathcal{H}^a = \mathcal{H}^{n,a}$ l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, I^{na})$, et $f_x^a \in \mathcal{H}^a$ $(x \in G)$ la fonction caractéristique de la double classe $I^{na}xI^{na}$. D'après [Ho, ch. 3] (*cf.* [L3, §2.1]), les fonctions $f_{s_i}^a$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $f_{s_\varpi}^a$, $f_{t_\varpi}^a$, $f_{t_\varpi^{-1}}^a$, f_x^a $(x \in I^{na})$ engendrent l'algèbre $\mathcal{H}^a$.

On pose aussi $\mathcal{H}^{1,a} = \mathbb{C}[F^\times/U_F^a]$ $(a \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ avec $U_F^0 = U_F$.

Conventions d'écriture On aura besoin par la suite de changer le corps de base F. C'est pourquoi l'on note aussi $G(F)$, $P_0(F)$, $A_0(F)$, $Z(F)$, K_F, K_F^a, I_F les groupes notés G, P_0, A_0, Z, K^a, I dans les numéros 1.3 et 1.4. De la même manière, on note aussi $\mathfrak{I}_F$, $\mathfrak{I}_F^a$, I_F^a, $f_{s_i,F}^a$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $\mathcal{H}_F^a$ les objets notés $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}^a$, I^a, $f_{s_i}^a$, $\mathcal{H}^a$ ci-dessus.

Soient r, F_1, F_2 et $\eta = (\tau, \tilde{\tau})$ comme dans le numéro 2.1. D'après [L3, 3.1.2], η détermine un isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta = \zeta_\eta^n \colon \mathcal{H}_{F_1}^r \to \mathcal{H}_{F_2}^r$. On rappelle la construction : η détermine un isomorphisme de groupes $\beta_\eta \colon I_{F_1}/I_{F_1}^{nr} \to I_{F_2}/I_{F_2}^{nr}$. On choisit des uniformisantes ϖ_1 et ϖ_2 de F_1 et F_2 telles que $\tilde{\tau}(\varpi_1 + \mathfrak{p}_{F_1}^{r+1}) = \varpi_2 + \mathfrak{p}_{F_2}^{r+1}$. Alors il existe un unique isomorphisme d'algèbres $\zeta \colon \mathcal{H}_{F_1}^r \to \mathcal{H}_{F_2}^r$ tel que $\zeta(f_{s_{i,F_1}}^r) = f_{s_{i,F_2}}^r$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $\zeta(f_{s_{\varpi_1}}^r) = f_{s_{\varpi_2}}^r$, $\zeta(f_{t_{\varpi_1}}^r) = f_{t_{\varpi_2}}^r$, $\zeta(f_{t_{\varpi_1}^{-1}}^r) = f_{t_{\varpi_2}^{-1}}^r$ et $\zeta(f_x^r) = f_y^r$ pour tout $(x, y) \in I_{F_1} \times I_{F_2}$ tel que $\beta_\eta(xI_{F_1}^{nr}) = yI_{F_2}^{nr}$. De plus, l'isomorphisme ζ ne dépend pas du choix de la paire (ϖ_1, ϖ_2) ; on le note ζ_η.

De même, on note $\zeta_\eta^1 \colon \mathbb{C}[F_1^\times \backslash U_{F_1}^r] \to \mathbb{C}[F_2^\times \backslash U_{F_2}^r]$ l'unique isomorphisme d'algèbres prolongeant l'isomorphisme de groupes $\eta^\times$, *cf.* 2.1.

Si $\Omega \subset G(F)$ est une partie compacte $I_{F_1}^{nr}$-biinvariante, on note $\zeta_\eta(\Omega)$ la partie de $G(F_2)$ définie par $\mathbf{1}_{\zeta_\eta(\Omega)} = \zeta_\eta(\mathbf{1}_\Omega)$, où $\mathbf{1}_\Omega$ désigne la fonction caractéristique de Ω.

Remarque 2.2.1 Les définitions de $\mathcal{H}^a$ et f_x^a introduites ici sont légèrement différentes de celles utilisées dans [L1]. En effet dans [L1], l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^a$ est munie du produit de convolution défini par la mesure de Haar dg sur G telle que

$\mathrm{vol}(K,dg)=1$; et $f_x^a=\mathrm{vol}(I^{na}xI^{na},dg)^{-1}\mathbf{1}_{I^{na}xI^{na}}$. On vérifie facilement que le lemme de [L1, §3.3] et le lemme 1 de [L1, 3.3] restent vrais pour les définitions de $\mathcal{H}^a$ et f_x^a introduites ici.

2.3 Soient r, F_1, F_2 et $\eta=(\tau,\tilde{\tau})$ comme dans le numéro 2.1, et soit κ_1 un caractère de $F_1^\times$. Soit L_1/F_1 la sous-extension (finie cyclique) de $\overline{F}_1/F_1$ définie par κ_1. On note t_{κ_1} le plus petit entier $t\geq -1$ tel que $\mathrm{Gal}(L_1/F_1)^t=\{1\}$. On suppose que $t_{\kappa_1}\leq r$ (*i.e.,* que l'extension L_1/F_1 est dans $\mathcal{E}_r(F_1)$) et l'on pose $\kappa_2=\eta^\times(\kappa_1)$. On suppose aussi que κ_1 est trivial sur $(F_1^\times)^n$; alors par construction, κ_2 est trivial sur $(F_2^\times)^n$.

Soient $d\bar{g}_1$ et $d\bar{g}_2$ des mesures de Haar sur $Z(F_1)\backslash G(F_1)$ et $Z(F_2)\backslash G(F_2)$, choisies de manière *compatible*; *i.e.,* telles que $\mathrm{vol}(U_{F_1}\backslash K_{F_1},d\bar{g}_1)=\mathrm{vol}(U_{F_2}\backslash K_{F_2},d\bar{g}_2)$. Pour $i=1,2$, $\gamma\in G(F_i)_{\mathrm{e}}$ et $f\in C_c^\infty(G(F_i))$, on pose

$$\Lambda_{\kappa_i}^{G(F_i)}(f,\gamma)=\int_{Z(F_i)\backslash G(F_i)}\kappa_i(g_i)f(g_i^{-1}\gamma g_i)\,d\bar{g}_i.$$

Lemme 2.3.1 *Pour $f\in\mathcal{H}(G(F_1),K_{F_1}^r)$, on a l'égalité $\zeta_\eta\big(f_{\kappa_1}^{K_{F_1}}\big)=\zeta_\eta(f)_{\kappa_2}^{K_{F_2}}$.*

Preuve Puisque $r\geq t_{\kappa_1}$ et $\det(K_{F_1}^r)=U_{F_1}^r$, on a $\kappa_1(K_{F_1}^r)=1$. Par restriction et passage aux quotients, la bijection $\zeta_\eta\colon I_{F_1}^{nr}\backslash G(F_1)/I_{F_1}^{nr}\to I_{F_2}^{nr}\backslash G(F_2)/I_{F_2}^{nr}$ induit un isomorphisme *de groupes* $K_{F_1}^r\backslash K_{F_1}\simeq K_{F_2}^r\backslash K_{F_2}$ compatible avec les caractères κ_1 et κ_2, *i.e.,* tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K_{F_1}^r\backslash K_{F_1} & \xrightarrow{\simeq} & K_{F_2}^r\backslash K_{F_2}\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\kappa_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\kappa_2}\\ \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

soit commutatif. Choisissons un système de représentants $\mathcal{R}$ dans K_{F_1} des classes $K_{F_1}^r\backslash K_{F_1}$. Soit $f\in\mathcal{H}(G(F_1),K_{F_1}^r)$. Pour $g\in G(F_1)$, on a

$$f_{\kappa_1}^{K_{F_1}}(g)=(K_{F_1}:K_{F_1}^r)^{-1}\sum_{k\in\mathcal{R}}\kappa_1(k)f(k^{-1}gk)$$

Pour chaque $k\in\mathcal{R}$, choisissons un $k_\eta\in K_{F_2}$ tel que $\zeta_\eta(K_{F_1}^rk)=K_{F_2}^rk_\eta$. On a donc $\zeta_\eta(K_{F_1}^rk^{-1})=K_{F_2}^rk_\eta^{-1}$ et $\kappa_1(k)=\kappa_2(k_\eta)$. En particulier, pour tout $k\in\mathcal{R}$ et tout $(g,g')\in G(F_1)\times G(F_2)$ tel que $\zeta_\eta(K_{F_1}^rgK_{F_1}^r)=K_{F_2}^rg'K_{F_2}^r$, on a l'égalité $\zeta_\eta(K_{F_1}^rk^{-1}gkK_{F_1}^r)=K_{F_2}^rk_\eta^{-1}g'k_\eta K_{F_2}^r$. D'où le lemme, puisque $(K_{F_1}:K_{F_1}^r)=(K_{F_2}:K_{F_2}^r)$. ∎

La proposition suivante est une première étape vers le résultat principal de l'article. On y traite les éléments elliptiques.

Proposition 2.3.2 *Soient $\gamma \in G(F_1)_{\mathrm{e}}$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Il existe un entier $r_0(\gamma, \kappa_1, a) \geq \sup\{t_{\kappa_1}, a\}$ tel que si $r \geq r_0(\gamma, \kappa_1, a)$, alors il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1$ de γ dans $G(F_1)_{\mathrm{e}}$ tel que $\zeta_\eta(\mathcal{V}_1) \subset G(F_2)_{\mathrm{e}}$ et*

$$\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f), y) = \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$.

Preuve On suppose tout d'abord que γ est en position standard. Posons $e = e(F[\gamma]/F)$ et $k_1 = k_F^*(\gamma)$. Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \geq \sup\{1 + \frac{k_1}{e}, a - \frac{k_1}{e}, t_{\kappa_1}\}$, et soit $r_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $r_0 \geq m + \frac{k_1}{e}$. Supposons $r \geq r_0$. Comme en 1.5, γ détermine un $\mathfrak{o}_{F_1}$-réseau Λ_γ dans $M(n, F_1)$, et l'on pose $\mathcal{V}_1 = \gamma(1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma)$. D'après la proposition 1.5.2, on a $\mathcal{V}_1 \subset G(F_1)_{\mathrm{e}}$. Comme $r \geq m + \frac{k_1}{e}$, on a les inclusions

$$I_{F_1}^{nr} \subset J_\gamma^{er} \subset J_\gamma^{em+k_1} \subset J_\gamma^{em} \subset 1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma.$$

Puisque $(1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma)(1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma) = (1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma)$ et $I_F^{nr}\gamma = \gamma I_{F_1}^{nr}$, on obtient que $I_{F_1}^{nr}\mathcal{V}_1 I_{F_1}^{nr} = \mathcal{V}_1$.

Posons $\mathcal{V}_2 = \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$. D'après [BK, 1.5.8], le $G(F_1)$-entrelacement

$$X = \{g \in G(F_1) : g^{-1}\gamma J_\gamma^{1+k_1} g \cap \gamma J_\gamma^{1+k_1} \neq \varnothing\}$$

coïncide avec $F_1[\gamma]^\times(1 + \mathfrak{p}_{F_1[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma)$. Par suite, X est une partie $J_\gamma^{1+k_1}$-biinvariante : c'est l'union des doubles classes $X_g = J_\gamma^{1+k_1} g J_\gamma^{1+k_1}$ ($g \in G(F_1)$) telles que $\gamma X_g \cap X_g\gamma \neq \varnothing$. Puisque γ normalise $J_\gamma^{1+k_1}$, pour $g \in G(F_1)$, γX_g et $X_g\gamma$ sont des parties $J_\gamma^{1+k_1}$-biinvariantes, et l'on a

$$\zeta_\eta(\gamma X_g) = \zeta_\eta(\gamma J_\gamma^{1+k_1}) g' \zeta(J_\gamma^{1+k_1}), \qquad \zeta_\eta(X_g\gamma) = \zeta_\eta(J_\gamma^{1+k_1}) g' \zeta(\gamma J_\gamma^{1+k_1})$$

pour tout $g' \in \zeta_\eta(J_\gamma^{1+k_1} g J_\gamma^{1+k_1})$. On en déduit que

$$\zeta_\eta(X) = \{g' \in G(F_2) : g'^{-1}\zeta_\eta(\gamma J_\gamma^{1+k_1}) g' \cap \zeta_\eta(\gamma J_\gamma^{1+k_1}) \neq \varnothing\}.$$

Puisque $F_1[\gamma]^\times(1 + \mathfrak{p}_{F_1[\gamma]}\mathfrak{N}_\gamma)$ est compact modulo $Z(F_1)$, $\zeta_\eta(X)$ est compact modulo $Z(F_2)$. Par conséquent $\zeta_\eta(\gamma J_\gamma^{1+k_1})$ est contenu dans $G(F_2)_{\mathrm{e}}$. Comme $m \geq 1 + \frac{k_1}{e}$, on a $1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma \subset J_\gamma^{1+k_1}$. D'où l'inclusion $\mathcal{V}_2 \subset G(F_2)_{\mathrm{e}}$.

Soit $y \in \mathcal{V}_2$. D'après la démonstration du [L1, §3.3, théorème], on a $n_F(y) = n_F(\gamma)$ et $k_F(y) = k_F(\gamma)$, donc $k_F^*(y) = k_1$; et $\zeta_\eta(1 + \mathfrak{p}_{F_1}^m \Lambda_\gamma) = 1 + \mathfrak{p}_{F_2}^m \Lambda_y$ donc $\mathcal{V}_2 = y(1 + \mathfrak{p}_{F_2}^m \Lambda_y)$.

Puisque $r \geq a$, le lemme 2.3.1 s'applique en particulier à toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a)$. D'autre part, puisque $r \geq t_{\kappa_1}$ et $\det(J_\gamma^{er}) = U_F^r$, on a $\kappa_1(J_\gamma^{er}) = 1$. Par restriction et passage aux quotients, la bijection $\zeta_\eta \colon I_{F_1}^{nr}\backslash G(F_1)/I_{F_1}^{nr} \to I_{F_2}^{nr}\backslash G(F_2)/I_{F_2}^{nr}$ induit un isomorphisme de groupes $J_\gamma^{er}\backslash J_\gamma \simeq J_y^{er}\backslash J_y$ compatible avec les caractères κ_1 et κ_2 (*cf.* le début de la démonstration du lemme 2.3.1). Grâce aux lemmes 1.4.1 et 1.5.1 et à cette propriété de compatibilité, pour $f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a)$, on montre comme dans [L1, §3.3] (*cf.* les deux derniers paragraphes de la démonstration du théorème de [L1, §3.3]) l'égalité $\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f),y)=\Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f,\gamma)$.

On suppose maintenant que γ n'est pas en position standard. Choisissons un $g\in G(F_1)$ tel que $\tilde{\gamma}=g^{-1}\gamma g$ soit en position standard. Choisissons successivement $m,\ \tilde{r}_0,\ r_0\in\mathbb{Z}$ de sorte que $m\geq\sup\{1+\frac{k_1}{e},a-\frac{k_1}{e},t_{\kappa_1}\}$, $\tilde{r}_0\geq m+\frac{k_1}{e}$, $g^{-1}I_{F_1}^{nr_0}g\subset I_{F_1}^{n\tilde{r}_0}$ et $gI_{F_1}^{nr_0}g^{-1}\subset I_{F_1}^{n\tilde{r}_0}$. Supposons que $r\geq r_0$. Posons $\tilde{\mathcal{V}}_1=\tilde{\gamma}(1+\mathfrak{p}_{F_1}^m\Lambda_{\tilde{\gamma}})$ et $\mathcal{V}_1=g^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_1g$. On a donc $\mathcal{V}_1\subset G(F_1)_{\mathrm{e}}$, et puisque $gI_{F_1}^{nr}g^{-1}\subset I_{F_1}^{n\tilde{r}_0}$ et $I_{F_1}^{n\tilde{r}_0}\tilde{\mathcal{V}}_1I_{F_1}^{n\tilde{r}_0}=\tilde{\mathcal{V}}_1$, on a $I_{F_1}^{nr}\mathcal{V}_1I_{F_1}^{nr}=\mathcal{V}_1$. Posons $\mathcal{V}_2=\zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$, et soit $h\in\zeta_\eta(I_{F_1}^{nr}gI_{F_1}^{nr})$. Comme dans la démonstration du [L1, §3.6, théorème], on montre que $\mathcal{V}_2=h^{-1}\zeta_\eta(\tilde{\mathcal{V}}_1)h$. Donc $\mathcal{V}_2\subset G(F_2)_{\mathrm{e}}$. Pour $y\in\zeta_\eta(\tilde{\mathcal{V}}_1)$, on a

$$\begin{aligned}\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f),h^{-1}yh)&=\kappa_2(h)^{-1}\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f),y)\\&=\kappa_2(h)^{-1}\Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f,\tilde{\gamma})\\&=\kappa_2(h)^{-1}\kappa_1(g)\Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f,\gamma).\end{aligned}$$

Puisque $\kappa_1(I_{F_1}^{nr})=1$, en écrivant $g=uwv$ avec $w\in W(\varpi)$ et $u,\ v\in I_{F_1}$, on obtient que $\kappa_1(g)=\kappa_2(h)$. D'où la proposition. ■

2.4 On traite maintenant les éléments réguliers non elliptiques (il s'agit surtout de bien mettre en place les notations). Soit Π_n^* l'ensemble des partitions non ordonnées de n, c'est-à-dire l'ensemble des suites $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}_{\geq1}$, telles que $\sum_{i=1}^s\alpha_i=n$. Pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in\Pi_n^*$, on pose

$$M_\alpha=GL(\alpha_1,F)\times\cdots\times GL(\alpha_s,F)\subset G$$

et $P_\alpha=M_\alpha P_0$. Et l'on note A_α et U_α le centre de M_α et le radical unipotent de P_α. Alors P_α est produit semidirect de M_α et U_α. On pose aussi $M_{\alpha,\mathrm{e}}=GL(\alpha_1,F)_{\mathrm{e}}\times\cdots\times GL(\alpha_s,F)_{\mathrm{e}}$ avec $GL(1,F)_{\mathrm{e}}=GL(1,F)$.

Soit $\Pi_n\subset\Pi_n^*$ le sous-ensemble formé des partitions ordonnées, c'est-à-dire des suites $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ telles que $\alpha_i\geq\alpha_{i+1}$. Pour $\gamma\in G_{\mathrm{r}}$, on définit comme suit une partition ordonnée α_γ de n: soit G_γ^{d} le tore déployé maximal du centralisateur $G_\gamma=F[\gamma]^\times$ de γ dans G (vu comme le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique défini sur F). Alors α_γ est l'unique partition ordonnée α de n telle que $G_\gamma^{\mathrm{d}}=g^{-1}A_\alpha g$ pour un $g\in G$. Pour $\alpha\in\Pi_n$, on pose $G_{\alpha,\mathrm{e}}=\{\gamma\in G_{\mathrm{r}}:\alpha_\gamma=\alpha\}$. Ainsi G_{r} est l'union disjointe des $G_{\alpha,\mathrm{e}}$ ($\alpha\in\Pi_n$). Notons que pour $\alpha\in\Pi_n^*$ et $\gamma\in M_{\alpha,\mathrm{e}}$, $\overline{D}_F(\gamma)$ (défini en 1.2) est le déterminant de l'endomorphisme $u\mapsto u-\gamma^{-1}u\gamma$ du F-espace vectoriel $\mathrm{M}(\alpha,F)\backslash\mathrm{M}(n,F)$ avec $\mathrm{M}(\alpha,F)=\mathrm{M}(\alpha_1,F)\times\cdots\times\mathrm{M}(\alpha_s,F)$. En particulier pour $\alpha\in\Pi_n$, on a $M_\alpha\cap G_{\alpha,\mathrm{e}}=M_{\alpha,\mathrm{e}}\cap G_{\mathrm{r}}=\{\gamma\in M_{\alpha,\mathrm{e}}:\overline{D}_F(\gamma)\neq0\}$.

Soit κ un caractère de $F^\times$ trivial sur $(F^\times)^n$. Notons G_{r}^κ l'ensemble des $\gamma\in G_{\mathrm{r}}$ tels que $\kappa(G_\gamma^{\mathrm{d}})=1$. Soit d l'ordre de κ. Posons $m=\frac{n}{d}$, et soit $\varphi=\varphi_{n,m}\colon\Pi_m^*\to\Pi_n^*$ l'application injective définie par

$$\varphi(\beta)=(d\beta_1,\dots,d\beta_s)$$

pour $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \Pi_m^*$. On a clairement $\varphi(\Pi_m) \subset \Pi_n$. Pour $\alpha \in \Pi_n^*$, on a $\kappa(A_\alpha) = 1$, si et seulement si $\alpha \in \varphi(\Pi_m^*)$. On en déduit que

$$G_{\mathrm{r}}^{\kappa} = \coprod_{\beta \in \Pi_m} G_{\varphi(\beta),\mathrm{e}}.$$

Remarque 2.4.1 Soit L/F une extension séparable finie cyclique telle que $\mathrm{N}_{L/F}(L^\times) = \ker \kappa$. Le choix d'une F-base de L fournit une identification $GL(m, L) \subset G$. D'après [HH, 3.9], pour $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$, on a $\kappa(G_\gamma) = 1$ si et seulement s'il existe un $g \in G$ tel que $g^{-1}\gamma g \in GL(m, L)$, *i.e.*, si et seulement si $F[\gamma] \simeq E_1 \times \cdots \times E_s$ pour des extensions finies E_i de L.

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Pi_n^*$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Rappelons qu'en 2.2, on a posé $I^0 = I$ et $U_F^0 = U_F$. On pose aussi $K^0 = K$. Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on note $I^{k,a}$ et $K^{k,a}$ les sous-groupes de $GL(k, F)$ définis comme suit : si $k = 1$, alors $I^{1,a} = K^{1,a} = U_F^a$ et si $k \geq 2$, alors $I^{k,a}$ (resp., $K^{k,a}$) est le sous-groupe de $GL(k, F)$ obtenu en remplaçant n par k dans la définition de I^a (resp., de K^a). Posons $I^{\alpha,a} = M_\alpha \cap I^a$ et $K^{\alpha,a} = M_\alpha \cap K^a$. On a donc

$$I^{\alpha,na} = I^{\alpha_1,\alpha_1 a} \times \cdots \times I^{\alpha_s,\alpha_s a}, \quad K^{\alpha,a} = K^{\alpha_1,a} \times \cdots \times K^{\alpha_s,a}.$$

Pour tout sous-groupe ouvert compact $\Gamma \subset M_\alpha$, on définit comme en 1.4 l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(M_\alpha, \Gamma)$. Notons que si $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_s$ avec $\Gamma_i \subset GL(\alpha_i, F_j)$, alors on a une identification canonique $\mathcal{H}(M_\alpha, \Gamma) = \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{H}(GL(\alpha_i, F), \Gamma_i)$. Rappelons qu'en 2.2, on a posé $\mathcal{H}^{1,a} = \mathbb{C}[F^\times/U_F^a]$. Pour $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, on note $\mathcal{H}^{k,a}$ l'algèbre de Hecke obtenue en remplaçant n par k dans la définition de $\mathcal{H}^a$. Posons $\mathcal{H}^{\alpha,a} = \mathcal{H}(M_\alpha, I^{\alpha,na})$. On a donc $\mathcal{H}^{\alpha,a} = \bigotimes_{i=1}^s \mathcal{H}^{\alpha_i,a}$.

Conventions d'écriture Comme en 2.2, on note aussi $M_\alpha(F)$, $P_\alpha(F)$, $A_\alpha(F)$, $U_\alpha(F)$ les groupes M_α, P_α, A_α, U_α ; et $I_F^{k,a}$, $K_F^{k,a}$, $I_F^{\alpha,a}$, $K_F^{\alpha,a}$ les groupes $I^{k,a}$, $K^{k,a}$, $I^{\alpha,a}$, $K^{\alpha,a}$. Et l'on note aussi $\mathcal{H}_F^{k,a}$, $\mathcal{H}_F^{\alpha,a}$ les algèbres de Hecke $\mathcal{H}^{k,a}$, $\mathcal{H}^{\alpha,a}$.

2.5 Soit $\alpha \in \varphi(\Pi_m)$. Soient dg et $d_\alpha a$ des mesures de Haar sur G et A_α. Pour $\gamma \in G_{\alpha,\mathrm{e}}$, $d_\alpha a$ induit par transport de structure une mesure de Haar $d_\gamma a$ sur G_γ^{d} : on choisit un $g \in G$ tel que $g^{-1} G_\gamma^{\mathrm{d}} g = A_\alpha$. La mesure de Haar sur G_γ^{d} déduite de $d_\alpha a$ via l'isomorphisme $A_\alpha \to G_\gamma^{\mathrm{d}}, a \mapsto gag^{-1}$ est indépendante du choix de g ; on la note $d_\gamma a$. Pour $\gamma \in G_{\alpha,\mathrm{e}}$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on pose

$$\Lambda_\kappa^G(f, \gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}} \backslash G} \kappa(g) f(g^{-1}\gamma g) \, \frac{dg}{d_\gamma a}.$$

Soit du la mesure de Haar sur U_α telle que $\mathrm{vol}(U_\alpha \cap K, du) = 1$. Pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)$, on note $f_\kappa^{\alpha,K} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(M_\alpha)$ la fonction définie par

$$f_\kappa^{\alpha,K}(m) = \delta_{P_\alpha}(m)^{1/2} \iint_{U_\alpha \times K} \kappa(k) f(k^{-1} muk) \, du dk$$

où $\delta_{P_\alpha}: P_\alpha \to q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}^\times$ désigne le caractère module sur P_α, donné par $\delta_{P_\alpha} = |\det_F(\mathrm{Ad}(p); \mathrm{Lie}(U_\alpha))|_F$. Soit dm la mesure de Haar sur M_α qui rend valide la formule d'intégration

$$\int_G f(g)\,dg = \iiint_{M_\alpha\times U_\alpha\times K} f(muk)\,dmdudk \qquad (f\in C_c^\infty(G)).$$

Pour $\gamma\in M_{\alpha,\mathrm{e}}$ et $\phi\in C_c^\infty(M_\alpha)$, on pose

$$\Lambda_\kappa^{M_\alpha}(\phi,\gamma) = \int_{A_\alpha\backslash M_\alpha} \kappa(m)\phi(m^{-1}\gamma m)\,\frac{dm}{d_\alpha a}.$$

Lemme 2.5.1 *Soit $\gamma\in M_{\alpha,\mathrm{e}}\cap G_{\mathrm{r}}$. Pour $f\in C_c^\infty(G)$, on a la formule de descente*

$$\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = |\overline{D}_F(\gamma)|_F^{-\frac12}\Lambda_\kappa^{M_\alpha}(f_\kappa^{\alpha,K},\gamma).$$

Preuve Soit $f\in C_c^\infty(G)$. On a

$$\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = \iiint_{A_\alpha\backslash M_\alpha\times U_\alpha\times K} \kappa(muk)f(k^{-1}u^{-1}m^{-1}\gamma muk)\,dmdudk$$

et $\kappa(muk)=\kappa(m)\kappa(k)$. Pour $x\in M_\alpha$, l'application $U_\alpha\to U_\alpha$, $u\mapsto x^{-1}u^{-1}xu$ est un endomorphisme de variété $\mathfrak{p}_F$-adique de jacobien

$$J(x) = |\det_F(u\mapsto u-x^{-1}ux; \mathrm{Lie}(U_\alpha))|_F.$$

Et pour $m\in M_\alpha$, on a $J(m^{-1}\gamma m) = J(\gamma) = |\overline{D}_F(\gamma)|_F^{1/2}\delta_{P_\alpha}(\gamma)^{-1/2}\in q^{\mathbb{Z}}$. Par suite, le changement de variable $U_\alpha\to U_\alpha$, $u\mapsto (m^{-1}\gamma m)^{-1}u^{-1}(m^{-1}\gamma m)u$ donne la formule souhaitée. ■

2.6 Soient r, F_1, F_2, $\eta=(\tau,\tilde\tau)$, κ_1 et $\kappa_2=\eta^\times(\kappa_1)$ comme dans le numéro 2.3. Par construction, l'ordre de κ_1, disons d, coïncide avec l'ordre de κ_2. Posons $m=\frac{n}{d}$ et $\varphi=\varphi_{n,m}: \Pi_m^*\to\Pi_n^*$. Pour $i=1,2$ et $\alpha\in\varphi(\Pi_m)$, on fixe une mesure $G(F_i)$-invariante $d_\alpha\bar g_i$ sur l'espace homogène $A_\alpha(F_i)\backslash G(F_i)$. On suppose que ces mesures sont compatibles, *i.e.*, que pour $\alpha\in\varphi(\Pi_m)$, on a $\mathrm{vol}(A_\alpha(\mathfrak{o}_{F_1})\backslash K_{F_1}, d_\alpha\bar g_1) = \mathrm{vol}(A_\alpha(\mathfrak{o}_{F_2})\backslash K_{F_2}, d_\alpha\bar g_2)$ avec $A_\alpha(\mathfrak{o}_{F_i}) = A_\alpha(F_i)\cap K_{F_i}$. Pour $i=1,2$ et $\gamma\in G(F_i)_{\mathrm{r}}^{\kappa_i}$, on note $\Lambda_{\kappa_i}^{G(F_i)}(\,\cdot\,,\gamma)$ la distribution sur $G(F_i)$ définie par $d_{\alpha_\gamma}\bar g_i$ comme en 2.5.

Soit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in\Pi_n^*$. Pour $i\in\{1,\dots,s\}$, η détermine comme en 2.2 un isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta^{\alpha_i}: \mathcal{H}_{F_1}^{\alpha_i,r}\to\mathcal{H}_{F_2}^{\alpha_i,r}$. D'où un isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta^\alpha = \bigotimes_{i=1}^s\zeta_\eta^{\alpha_i}: \mathcal{H}_{F_1}^{\alpha,r}\to\mathcal{H}_{F_2}^{\alpha,r}$.

Lemme 2.6.1 *Pour $f\in\mathcal{H}(G(F_1),K_{F_1}^r)$, la fonction $f_{\kappa_1}^{\alpha,K_{F_1}}$ appartient à*

$$\mathcal{H}(M_\alpha(F_1),K_{F_1}^{\alpha,r})$$

et l'on a l'égalité

$$\zeta_\eta^\alpha(f_{\kappa_1}^{\alpha,K_{F_1}}) = \zeta_\eta(f)_{\kappa_2}^{\alpha,K_{F_2}}.$$

Preuve Pour tout sous-groupe ouvert compact $\Gamma \subset M_\alpha(F_1)$, le caractère module $\delta_{P_\alpha(F_1)}$ est une fonction Γ-biinvariante et l'application $U_\alpha(F_1) \to U_\alpha(F_1)$, $u \mapsto xux^{-1}$ ($x \in \Gamma$) est un automorphisme de variété $\mathfrak{p}_{F_1}$-adique de jacobien constant égal à 1. Joint au fait que le groupe $K_{F_1}^r$ est distingué dans K_{F_1}, cela implique que pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^r)$, la fonction $f_{\kappa_1}^{\alpha, K_{F_1}} \in C_c^\infty(M_\alpha(F_1))$ est $K_{F_1}^{\alpha,a}$-biinvariante. D'autre part, on a vu (lemme 2.3.1) que pour $f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^r)$, on a l'égalité $\zeta_\eta(f_{\kappa_1}^{K_{F_1}}) = \zeta_\eta(f)_{\kappa_2}^{K_{F_2}}$. On conclut grâce à [L1, §3.5, lemme], comme dans la démonstration du [L1, §3.5, théorème]. ■

Voici maintenant notre résultat principal dans le cas général.

Théorème 2.6.2 *Soient $\gamma \in G(F_1)_{\mathrm{r}}^{\kappa_1}$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Il existe un entier $r_0(\gamma, \kappa_1, a) \geq \sup\{t_{\kappa_1}, a\}$ tel que si $r \geq r_0(\gamma, \kappa_1, a)$, alors il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1$ de γ dans $G(F_1)_{\alpha_\gamma,\mathrm{e}}$ tel que $\zeta_\eta(\mathcal{V}_1) \subset G(F_2)_{\alpha_\gamma,\mathrm{e}}$ et*

$$\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f), y) = \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$.

Preuve Soit $\alpha = \alpha_\gamma$. Supposons tout d'abord que $\gamma \in M_\alpha(F_1)$. Écrivons $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ avec $\gamma_i \in GL(\alpha_i, F_1)$. D'après la proposition 2.3.2, il existe un entier $r_0^\alpha \geq \sup\{t_{\kappa_1}, a\}$ tel que si $r \geq r_0^\alpha$, alors il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{\alpha,nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1^\alpha$ de γ dans $M_\alpha(F_1)_\mathrm{e}$ tel que $\zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha) \subset M_\alpha(F_2)_\mathrm{e}$ et

$$\Lambda_{\kappa_2}^{M_\alpha(F_2)}(\zeta_\eta^\alpha(\phi), y) = \Lambda_{\kappa_1}^{M_\alpha(F_1)}(\phi, \gamma) \quad (\phi \in \mathcal{H}(M_\alpha(F_1), K_{F_1}^{\alpha,a}))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha)$. Notons que puisque $I_{F_1}^{\alpha,nr} = I_{F_1}^{\alpha_1,\alpha_1 r} \times \cdots \times I_{F_1}^{\alpha_s,\alpha_s r}$, on peut toujours choisir $\mathcal{V}_1^\alpha$ de la forme $\mathcal{V}_1^\alpha = \mathcal{V}_1^{\alpha_1} \times \cdots \times \mathcal{V}_1^{\alpha_s}$ avec $\mathcal{V}_1^{\alpha_i} \subset GL(\alpha_i, F_1)_\mathrm{e}$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_s) \in M_\alpha(F_1)_\mathrm{e}$, et pour $i = 1, \ldots, s$, soit $f_{x_i} \in F_1[T]$ le polynôme minimal de x_i sur F_1. Alors $f_x = \prod_{i=1}^s f_{x_i}$ est le polynôme caractéristique de x, et l'on a

$$\overline{D}_{F_1}(x) = \det(x)^{1-n} \prod_{i \neq j} R(f_{x_i}, f_{x_j})$$

où $R(f_{x_i}, f_{x_j})$ désigne le résultant de f_{x_i} et f_{x_j}. En particulier, $x \in G(F_1)_\mathrm{r}$ si et seulement si $R(f_{x_i}, f_{x_j}) \neq 0$ ($1 \leq i, j \leq s$, $i \neq j$). L'application $M_\alpha(F_1)_\mathrm{e} \to F$, $x \mapsto \overline{D}_F(x)$ est continue, et puisque $\overline{D}_{F_1}(\gamma) \neq 0$, l'ensemble $\Omega(\gamma) = \{x \in M_\alpha(F)_\mathrm{e} : \overline{D}_F(x) \in \overline{D}_{F_1}(\gamma) U_{F_1}\}$ est un voisinage ouvert de γ dans $M_\alpha(F_1)$. On a mieux : d'après [L1, §3.6, remarque], il existe un entier $d_0 \geq 1$ tel que si $r \geq d_0$, alors il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{\alpha,nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1^\alpha$ de γ dans $\Omega(\gamma)$ tel que $\zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha) \subset M_\alpha(F_2)_\mathrm{e}$ et

$$\overline{D}_{F_2}(y) U_{F_2} = \eta^\times(\overline{D}_{F_1}(\gamma) U_{F_1})$$

pour tout $y \in \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha)$; en particulier, on a $\zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha) \subset M_\alpha(F_2)_\mathrm{e} \cap G(F_2)_\mathrm{r}$.

Soit $r_0' = \sup\{r_0^\alpha, d_0\}$, et supposons que $r \geq r_0'$. D'après ce qui précède, il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{\alpha,nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1^\alpha$ de γ dans $M_\alpha(F_1)_{\mathrm{e}} \cap G(F_1)_{\mathrm{r}}$ tel que $\zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha) \subset M_\alpha(F_2)_{\mathrm{e}} \cap G(F_2)_{\mathrm{r}}$ et

$$|\overline{D}_{F_2}(y)|_{F_2}^{-1/2} \Lambda_{\kappa_2}^{M_\alpha(F_2)}(\zeta_\eta^\alpha(\phi), y) = |\overline{D}_{F_1}(\gamma)|_{F_1}^{-1/2} \Lambda_{\kappa_1}^{M_\alpha(F_1)}(\phi, \gamma) \quad (\phi \in \mathcal{H}(M_\alpha(F_1), K_{F_1}^{\alpha,a}))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha)$. On applique alors les lemmes 2.5.1 et 2.6.1 (on rappelle que $r \geq a$) :

$$\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f), y) = \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha)$.

Posons $\mathcal{V}_2^\alpha = \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha)$. Pour $i = 1,\ 2$, l'ensemble $X_i = \{g^{-1}mg : m \in \mathcal{V}_i^\alpha, g \in I_{F_i}^{nr_0'}\}$ est ouvert dans $G(F_i)$ et contenu dans $G(F_i)_{\alpha,\mathrm{e}}$. Par conséquent il existe un entier $r_0 \geq r_0'$ tel que $I_{F_1}^{nr_0} \mathcal{V}_1^\alpha I_{F_1}^{nr_0} \subset X_1$. Supposons que $r \geq r_0$ et posons $\mathcal{V}_1 = I_{F_1}^{nr_0} \mathcal{V}_1^\alpha I_{F_1}^{nr_0}$. Alors $\zeta_\eta(\mathcal{V}_1) = I_{F_2}^{nr_0} \zeta_\eta^\alpha(\mathcal{V}_1^\alpha) I_{F_2}^{nr_0}$ et $\zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$ est contenu dans X_2. Puisque $r_0' \geq t_{\kappa_1}$, on a $\kappa_i(I_{F_i}^{nr_0'}) = 1$ $(i = 1,\ 2)$; ce qui implique que l'entier r_0 et le voisinage $\mathcal{V}_1$ vérifient les conclusions du théorème.

Supposons maintenant que $\gamma \notin M_\alpha(F_1)$. Alors il existe un $g \in G(F_1)$ tel que $g^{-1}\gamma g \in M_\alpha(F_1)$ et l'on procède comme à la fin de la démonstration de la proposition 2.3.2. ■

3 Première application : le lemme fondamental pour l'induction automorphe

3.1 Soit L une extension *non ramifiée* de F, de degré d divisant n. Posons $m = n/d$ et $\varphi = \varphi_{n,m} \colon \Pi_m^* \to \Pi_n^*$. Soient $H = H(L)$ et $K^\natural = K_L^\natural$ les groupes définis par $H = GL(m, L)$ et $K^\natural = GL(m, \mathfrak{o}_L)$. Choisissons une $\mathfrak{o}_F$-base de $\mathfrak{o}_L$. Cette base induit des identifications de L^m avec F^n et de H avec un sous-groupe de G, et l'on a $K^\natural = H \cap K$. Pour $i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on note $\mathfrak{S}_i$ le groupe de permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, i\}$. Soient

$$S = S_F \colon \mathcal{H}(G, K) \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n},$$
$$S^\natural = S_L^\natural \colon \mathcal{H}(H, K^\natural) \to \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \ldots, Y_m^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_m},$$

les isomorphismes de Satake. On rappelle la construction de S. On a une identification canonique $\mathcal{H}(A_0, A_0 \cap K) = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$: pour $f_0 \in \mathcal{H}(A_0, A_0 \cap K)$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, on pose $f_0(X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}) = f_0(\mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \ldots, \varpi^{a_n}))$ où ϖ désigne une uniformisante de F (le choix de ϖ est indifférent) ; par prolongement linéaire, on obtient un élément de $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$. Soient U_0 le radical unipotent de P_0 et du la mesure de Haar sur U_0 telle que $\mathrm{vol}(U_0 \cap K, du) = 1$. Pour $f \in \mathcal{H}(G, K)$, on note $S(f) \in \mathcal{H}(A_0, A_0 \cap K)$ la fonction définie par

$$S(f)(a) = \delta_{P_0}(a)^{1/2} \int_{U_0} f(au)\, du\,;$$

on a $S(f) \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm n}]^{\mathfrak{S}_n}$, et l'application $\mathcal{H}(G, K) \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$, $f \mapsto S(f)$ ainsi définie est un isomorphisme d'algèbres.

Soit κ un caractère *non ramifié* de $F^\times$ d'ordre d. Dans [W] est défini un homomorphisme d'algèbres

$$b\colon \mathcal{H}(G,K) \to \mathcal{H}(H,K^\natural)\,;$$

rappelons sa construction. Pour $i = 1,\ldots,m$, on introduit une racine d-ième Z_i de Y_i: $Z_i^d = Y_i$. On note

$$\hat{b}^*\colon \mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}] \to \mathbb{C}[Z_1^{\pm 1},\ldots,Z_m^{\pm 1}]$$

l'homomorphisme d'algèbres défini par $\hat{b}^*(X_{di+k}) = \kappa(\varpi)^k Z_{i+1}$ où ϖ est une uniformisante de F (puisque $\kappa(U_F) = 1$, le choix de ϖ est sans importance). On vérifie que $\hat{b}^*$ induit par restriction un homomorphisme

$$\hat{b}\colon \mathbb{C}[X_1^{\pm 1},\ldots,X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n} \to \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1},\ldots,Y_m^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_m}.$$

Et l'on pose $b = S^\natural \circ \hat{b} \circ S^{-1}$.

3.2 Soient dg et dh des mesures de Haar sur G et H telles que $\mathrm{vol}(K,dg) = \mathrm{vol}(K^\natural,dh) = 1$. Pour chaque $\alpha \in \varphi(\Pi_m)$, on fixe une mesure de Haar $d_\alpha a$ sur A_α. D'après la remarque 2.4.1, on a l'inclusion $H \cap G_{\mathrm{r}} \subset G_{\mathrm{r}}^\kappa$. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{r}}$, le centralisateur G_γ est contenu dans H, et l'on note $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,,\gamma)$ et $\Lambda^H(\,\cdot\,,\gamma)$ les distributions sur G et H définies par

$$\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G} \kappa(g) f(g^{-1}\gamma g)\frac{dg}{d_\gamma g} \quad (f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G)),$$

$$\Lambda^H(\phi,\gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash H} \phi(h^{-1}\gamma g)\frac{dh}{d_\gamma g} \qquad (\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(H)),$$

où $d_\gamma g$ désigne la mesure de Haar sur G_γ^{d} induite par $d_{\alpha_\gamma} a$ comme en 2.5.

Soit $G_{\mathrm{sr}} \subset G_{\mathrm{r}}$ le sous-ensemble formé des éléments (absolument) semisimples réguliers, et posons $G_{\mathrm{se}} = G_{\mathrm{e}} \cap G_{\mathrm{sr}}$. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$, rappelons la définition du facteur de transfert $\Delta_G^H(\gamma)$ [W, §II-4], [Ha, §5]. Pour $\gamma,\delta \in H$, notons $\phi_\delta \in L[t]$ le polynôme caractéristique de δ, et $r(\gamma,\delta) = R(\phi_\gamma,\phi_\delta)$ le résultant de ϕ_γ et ϕ_δ. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/F)$ opère naturellement sur H. Pour $\gamma \in H$, posons

$$\tilde{D}_F^L(\gamma) = \prod_{\sigma\neq\tau} r(\sigma\gamma,\tau\gamma) \in F$$

où (σ,τ) parcourt les éléments de $\mathrm{Gal}(L/F) \times \mathrm{Gal}(L/F)$. Si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$, on a $\tilde{D}_F^L(\gamma) \neq 0$. Si d est pair, on note σ_+ l'unique élément d'ordre 2 de $\mathrm{Gal}(L/F)$. Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$, on pose

$$\Delta_G^{H,1}(\gamma) = |\tilde{D}_F^L(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}} |\det{}_G(\gamma)|_F^{-\frac{1}{2}(n-m)}\,;$$

$$\Delta_G^{H,2}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \text{ est impair,} \\ (-1)^{\nu_L(r(\gamma,\sigma_+\gamma))} & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\Delta_G^H(\gamma) = \Delta_G^{H,1}(\gamma)\Delta_G^{H,2}(\gamma).$$

Notons que d'après [HH, lemma 4.1], on a $\Delta_G^{H,1}(\gamma) = |D_F(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}} |D_L(\gamma)|_L^{-\frac{1}{2}}$.

Théorème 3.2.1 (lemme fondamental) *Soit $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$. Pour $f \in \mathcal{H}(G,K)$, on a l'égalité*

$$\Delta_G^H(\gamma)\Lambda_\kappa^G(f,\gamma) = \Lambda^H(b(f),\gamma).$$

Comme on l'a dit dans l'introduction, ce théorème est démontré pour F de caractéristique nulle [W],[HL3]. On se propose ici de le démontrer pour F de caractéristique > 0.

Soit $\mathfrak{I}^\natural = \mathfrak{I}_L^\natural$ l'$\mathfrak{o}_L$-ordre héréditaire dans $M(m,L)$ formé des matrices triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{p}_L$. Et pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, soit $I_L^{\natural,a}$ le sous-groupe de $K^\natural$ défini par $I_L^{\natural,a} = 1 + (\mathfrak{I}^{\natural,1})^a$ où $\mathfrak{I}^{\natural,1}$ désigne le radical de Jacobson de $\mathfrak{I}^\natural$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on a donc $I_L^{\natural,ma} = 1 + \mathfrak{p}_L^a\mathfrak{I}^\natural$. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, on pose $\mathcal{H}_L^{\natural,a} = \mathcal{H}(H, I_L^{\natural,ma})$.

3.3 Soient r, F_1, F_2 et $\eta = (\tau,\tilde{\tau})$ comme dans le numéro 2.1, et soit κ_1 un caractère *non ramifié* de $F_1^\times$, d'ordre d. Posons $\kappa_2 = \eta^\times(\kappa_1)$; c'est un caractère non ramifié de $(F_2)^\times$, d'ordre d. Soit L_1/F_1 la sous-extension non ramifiée de degré d de $\overline{F}_1/F_1$, et soit L_2/F_2 la sous-extension de $\overline{F}_2/F_2$ qui lui correspond via $T(\eta)$ (*cf.* le numéro 2.1). D'après [D, 3.4.1], L_2 est une extension non ramifiée de F_2, de degré d, et η détermine un isomorphisme de triplets $\eta^\natural = (\tau^\natural,\tilde{\tau}^\natural)\colon T_r(L_1) \to T_r(L_2)$. Par construction, $\tau^\natural\colon \mathfrak{o}_{L_1}/\mathfrak{p}_{L_1}^r \to \mathfrak{o}_{L_2}/\mathfrak{p}_{L_2}^r$ est un isomorphisme d'anneaux rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{o}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F_1}^r \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathfrak{o}_{F_2}/\mathfrak{p}_{F_2} \arrow[d] \\
\mathfrak{o}_{L_1}/\mathfrak{p}_{L_1}^r \arrow[r, "\tau^\natural"] & \mathfrak{o}_{L_2}/\mathfrak{p}_{L_2}^r
\end{tikzcd},$$

et $\tilde{\tau}^\natural$ est un isomorphisme de $\mathfrak{o}_{L_1}/\mathfrak{p}_{L_1}^r$-modules rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{p}_{F_1}/\mathfrak{p}_{F_1}^{r+1} \arrow[r, "\tilde{\tau}"] \arrow[d] & \mathfrak{p}_{F_2}^{r+1} \arrow[d] \\
\mathfrak{p}_{L_1}/\mathfrak{p}_{L_1}^{r+1} \arrow[r, "\tilde{\tau}^\natural"] & \mathfrak{p}_{L_2}/\mathfrak{p}_{L_2}^{r+1}
\end{tikzcd}.$$

Dans ces deux diagrammes, les flèches verticales désignent les injections canoniques.

Pour $i = 1,2$, $\eta^\natural$ détermine comme en 2.2 un isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta^\natural\colon \mathcal{H}_{L_1}^{\natural,r} \to \mathcal{H}_{L_2}^{\natural,r}$ (si $m = 1$, $\zeta_\eta^\natural\colon \mathbb{C}[L_1^\times/U_{L_1}^r] \to \mathbb{C}[L_2^\times/U_{L_2}^r]$ est l'unique isomorphisme d'algèbres prolongeant l'isomorphisme de groupes $(\eta^\natural)^\times\colon L_1^\times/U_{L_1}^r \to L_2^\times/U_{L_2}^r$).

Lemme 3.3.1 *Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}) \arrow[r, "\zeta_\eta"] \arrow[d, "b_1"'] & \mathcal{H}(G(F_2), K_{F_2}) \arrow[d, "b_2"] \\ \mathcal{H}(H(F_1), K^\natural_{F_1}) \arrow[r, "\zeta^\natural_\eta"] & \mathcal{H}(H(F_2), K^\natural_{F_2}) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve D'après [L1, §3.5, lemme] et la définition de l'isomorphisme de Satake rappelée plus haut, pour $f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1})$, on a $S_{F_2}(\zeta_\eta(f)) = S_{F_1}(f)$. De même, pour $\phi \in \mathcal{H}(H(L_1), K^\natural_{L_1})$, on a $S^\natural_{L_2}(\zeta^\natural_\eta(\phi)) = S^\natural_{L_1}(\phi)$. D'où le résultat. ■

Lemme 3.3.2 *Soit $\gamma \in H(L_1) \cap G(F_1)_{\mathrm{sr}}$. Il existe un entier $d^\natural_0 \geq 1$ tel que si $r \geq d^\natural_0$, alors il existe un voisinage compact $I^{\natural,mr}_{F_1}$-biinvariant de γ dans $H(L_1) \cap G(F_1)_{\mathrm{sr}}$ tel que $\zeta^\natural_\eta(\mathcal{V}^\natural_1) \subset H(L_2) \cap G(F_2)_{\mathrm{sr}}$ et*

$$\Delta^{H(L_2)}_{G(F_2)}(y) = \Delta^{H(L_1)}_{G(F_1)}(\gamma)$$

pour tout $y \in \zeta^\natural_\eta(\mathcal{V}^\natural_1)$.

Preuve Pour $i = 1, 2$, posons $\mathfrak{G}_i = \mathrm{Gal}(L_i/F_i)$. Pour $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}_1$, on a $r(\sigma\gamma, \tau\gamma) = \sigma r(\gamma, \sigma^{-1}\tau\gamma)$. Puisque $|\mathrm{N}_{L_1/F_1}(x)|_{F_1} = |x|_{L_1}$ $(x \in L_1^\times)$, on obtient que

$$\Delta^{H(L_1),1}_{G(L_1)} = \prod_{\sigma \neq 1} |r(\gamma, \sigma\gamma)|^{\frac{1}{2}}_{L_1} |\det{}_{G(F_1)}(\gamma)|^{-\frac{1}{2}(n-m)}_{F_1}$$

où σ parcourt les éléments de $\mathfrak{G}_1$. Soit $\Xi(\gamma)$ l'ensemble des $x \in H(L_1) \cap G(F_1)_{\mathrm{sr}}$ tels que :

- $r(x, \sigma x) \in r(\gamma, \sigma\gamma)U_{L_1}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{G}_1 \setminus \{1\}$,
- $\det_{G(F_1)}(x) \in \det_{G(F_1)}(\gamma)U_{F_1}$.

C'est un voisinage ouvert de γ dans $H(L_1)$. Et d'après [L1, §3.6, remarque], il existe un entier $d^\natural_0 \geq 1$ tel que si $r \geq d^\natural_0$, alors il existe un voisinage $I^{\natural,mr}_{L_1}$-biinvariant $\mathcal{V}^\natural_1$ de γ dans $\Xi(\gamma)$ tel que $\zeta^\natural_\eta(\mathcal{V}^\natural_1) \subset H(L_2) \cap G(F_2)_{\mathrm{sr}}$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(y, \eta^\times(\sigma)y)U_{L_2} &= (\eta^\natural)^\times(r(\gamma, \sigma y)U_{L_1}) \quad (\sigma \in \mathfrak{G}_1 \setminus \{1\}) \\ \det{}_{G(F_2)}(y)U_{F_2} &= \eta^\times(\det{}_{G(F_1)}(y)U_{F_1}) \end{aligned}$$

pour tout $y \in \zeta^\natural_\eta(\mathcal{V}^\natural_1)$, où $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$, $\sigma \mapsto \eta^\times(\sigma)$ désigne l'isomorphisme de groupes induit par $\eta^\times$ comme en 2.1. D'où le lemme. ■

3.4 Démonstration du théorème 3.2.1 pour F de caractéristique > 0 Pour tout entier $r \geq 1$, il existe un corps commutatif localement compact non archimédien F' *de caractéristique nulle* r-proche de F. Par conséquent, fixé $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{sr}}$, on peut grâce à 2.6 relever les intégrales orbitales tordues $\Lambda_\kappa^G(f, \gamma)$ ($f \in \mathcal{H}(G, K)$) et non tordues $\Lambda^H(\phi, \gamma)$ ($\phi \in \mathcal{H}(H, K^\natural)$) de la caractéristique > 0 à la caractéristique nulle. Puisque le théorème 3.2.1 est vrai en caractéristique nulle, les lemmes 3.3.1 et 3.3.2 ci-dessus impliquent l'égalité $\Delta_G^H(\gamma)\Lambda^G(f, \gamma) = \Lambda^H(b(f), \gamma)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(G, K)$.

4 Deuxième application : une version simple de la formule des traces κ-tordue locale

4.1 Soit κ un caractère de $F^\times$ trivial sur $(F^\times)^n$. D'après [W, §II-5], le groupe $G_0 = \{g \in G : \kappa(g) = 1\}$ est quotient d'un groupe réductif connexe (*i.e.,* du groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F) par un sous-groupe central compact : soit L/F une extension séparable finie cyclique telle que $\mathrm{N}_{L/F}(L^\times) = \ker \kappa$, et soient

$$G^* = \{(g, x) \in G \times L^\times : \det(g)\mathrm{N}_{L/F}(x) = 1\},$$
$$L^1 = \{x \in L^\times : \mathrm{N}_{L/F}(x) = 1\}.$$

On a la suite exacte courte

$$1 \longrightarrow L^1 \longrightarrow G^* \xrightarrow{p_1} G_0 \longrightarrow 1$$

où p_1 désigne la projection sur le premier facteur. Puisque $\kappa((F^\times)^n) = 1$, le centre Z de G est contenu dans G_0, et $Z^* = Z \times L^1$ est le centre de G^*. D'où une identification $Z^* \backslash G^* = Z \backslash G_0$.

Fixons un caractère *unitaire* ω de $Z (= F^\times)$ et une mesure de Haar $d\bar{g}$ sur le groupe $Z \backslash G_0$. Soit $C_c^\infty(G_0, \omega)$ l'espace des fonctions $\phi \colon G_0 \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact modulo Z telles que $\phi(zg) = \omega(z)^{-1}\phi(g)$ ($z \in Z$, $g \in G_0$). Les éléments réguliers (resp., elliptiques) de G_0 sont par définition les éléments de G_0 qui sont réguliers (resp., elliptiques) dans G. Pour $\gamma \in G_0 \cap G_{\mathrm{e}}$, on note $\Lambda^{G_0}(\,\cdot\,, \gamma)$ la forme linéaire sur $C_c^\infty(G_0, \omega)$ définie par

$$\Lambda^{G_0}(\phi, \gamma) = \int_{Z \backslash G_0} \phi(g^{-1}\gamma g)\, d\bar{g}.$$

Soit $C_c^\infty(G_0, \omega)_{\mathrm{e}} \subset C_c^\infty(G_0, \omega)$ le sous-espace formé des fonctions ϕ telles que toutes les intégrales orbitales régulières *non elliptiques* de ϕ soient nulles, *i.e.,* telles que pour tout $\gamma \in G_0 \cap (G_{\mathrm{r}} \smallsetminus G_{\mathrm{e}})$, on ait

$$\int_{(G_0 \cap G_\gamma^{\mathrm{d}}) \backslash G_0} \phi(g^{-1}\gamma g)\, d_\gamma\bar{g} = 0$$

où $d_\gamma\bar{g}$ désigne une mesure G_0-invariante sur l'espace homogène $(G_0 \cap G_\gamma^{\mathrm{d}}) \backslash G_0$.

Si ρ est une représentation irréductible de G_0 de caractère central ω, on note Θ_ρ la forme linéaire sur $C_c^\infty(G_0,\omega)$ définie par

$$\langle \phi, \Theta_\rho\rangle = \mathrm{trace}(\rho(\phi d\bar{g}))$$

avec $\rho(\phi d\bar{g}) = \int_{Z\backslash G_0} \phi(g)\rho(g)\,d\bar{g}$. Notons que Θ_ρ ne dépend pas vraiment de ρ mais seulement de sa classe d'équivalence. D'après [L4], il existe une fonction localement constante $\Theta_\rho\colon G_0\cap G_r \to \mathbb{C}$ telle que

- $\Theta_\rho(zg) = \omega(z)\Theta_\rho(g)$ pour tous $z\in Z$ et $g\in G_0\cap G_r$;
- $\int_{Z\backslash G_0}\phi(g)|\Theta_\rho(g)|\,d\bar{g} < +\infty$ pour toute fonction $\phi\in C_c^\infty(Z\backslash G_0)$ telle que $\phi\geq 0$;
- $\langle\phi,\Theta_\rho\rangle = \int_{Z\backslash G_0}\phi(g)\Theta_\rho(g)\,d\bar{g}$ pour toute fonction $\phi\in C_c^\infty(G_0,\omega)$.

Cette fonction $\gamma\mapsto\Theta_\rho(\gamma)$ est indépendante du choix de $d\bar{g}$. Soit $\epsilon_e(G_0,\omega)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles tempérées de G_0 de caractère central ω telles que $\Theta_\rho|_{G_0\cap G_e}\neq 0$.

4.2 Soit $C_c^\infty(G,\omega)$ l'espace des fonctions $\phi\colon G\to\mathbb{C}$ localement constantes à support compact modulo Z telles que $\phi(zg)=\omega(z)^{-1}\phi(g)$ $(z\in Z, g\in G)$. La mesure $d\bar{g}$ sur $Z\backslash G_0$ se prolonge de manière unique en une mesure de Haar sur $Z\backslash G$, que l'on note encore $d\bar{g}$. Pour $\gamma\in G_e$, $d\bar{g}$ définit comme en 1.4 une forme linéaire $\Lambda_\kappa^G(\cdot,\gamma)$ sur $C_c^\infty(G,\omega)$. Soit $C_c^\infty(G,\omega)_e^\kappa\subset C_c^\infty(G,\omega)$ le sous-espace formé des fonctions ϕ telles que pour tout $\gamma\in G_r^\kappa\smallsetminus G_e$, on ait $\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma)=0$ (*cf.* 2.5).

Une représentation irréductible π de G est dite κ-stable si $\kappa\pi\simeq\pi$ avec $\kappa\pi = \pi\otimes(\kappa\circ\det)$. Si π est une représentation irréductible κ-stable de G de caractère central ω, le choix d'un opérateur d'entrelacement $A\in\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ définit une forme linéaire Θ_π^A sur $C_c^\infty(G,\omega)$: pour $\phi\in C_c^\infty(G,\omega)$, on pose

$$\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle = \mathrm{trace}(\pi(\phi d\bar{g})\circ A)$$

avec $\pi(\phi d\bar{g}) = \int_{Z\backslash G}\phi(g)\pi(g)\,d\bar{g}$. D'après [L4], il existe une fonction $\Theta_\pi^A\colon G_r\to\mathbb{C}$ localement constante à support dans $G_0\cap G_r$ telle que :

- $\Theta_\pi^A(z\gamma)=\omega(z)\Theta_\pi^A(\gamma)$ pour tous $z\in Z$ et $\gamma\in G_r$;
- $\int_{Z\backslash G}\phi(g)|\Theta_\pi^A(g)|d\bar{g}<+\infty$ pour toute fonction $\phi\in C_c^\infty(Z\backslash G)$ telle que $\phi\geq 0$;
- $\langle\phi,\Theta_\pi^A\rangle = \int_{Z\backslash G}\phi(g)\Theta_\pi^A(g)\,d\bar{g}$ pour toute fonction $\phi\in C_c^\infty(G,\omega)$.

Cette fonction $\gamma\mapsto\Theta_\pi^A(\gamma)$ est indépendante du choix de $d\bar{g}$ (elle dépend bien sûr toujours du choix de A) et vérifie l'égalité

$$\Theta_\pi^A(g^{-1}\gamma g) = \kappa(g)\Theta_\pi^A(\gamma)\quad(\gamma\in G_r,\ g\in G).$$

D'après la théorie de Clifford, il existe une représentation ρ de G_0, unique à équivalence et G-conjugaison près, telle que $\pi\simeq\mathrm{ind}_{G_0}^G(\rho)$. Cette représentation ρ est irréductible de caractère central ω, et *régulière* : pour tout $x\in G\smallsetminus G_0$, on a $\rho^x\not\simeq\rho$ avec $\rho^x(g)=\rho(xgx^{-1})$ $(g\in G_0)$. Pour $x\in G$, il existe un unique sous-espace G_0-invariant $V_\pi^x = V_\pi(\rho^x)\subset V_\pi$ tel que $\pi|_{G_0}$ induise sur V_π^x une représentation équivalente à ρ^x. Clairement, V_π^x ne dépend pas vraiment de x mais seulement de la classe G_0x. Et l'on a la décomposition $V_\pi = \bigoplus_x V_\pi^x$ où x parcourt les éléments de $G_0\backslash G$. Puisque ρ est régulière, pour chaque $x \in G_0\backslash G$, on a $A(V_\pi^x) = V_\pi^x$ et il existe une constante complexe $\mu_x \neq 0$ telle que $A|_{V_\pi^x} = \mu_x \,\mathrm{Id}$. Comme $\pi(x)(V_\pi^x) = V_\pi^1$ ($x \in G$), pour $x \in G_0\backslash G$, on a $\mu_x = \kappa(x)\mu_1$. D'où la formule :

$$\Theta_\pi^A(\gamma) = \mu_1 \sum_{x \in G_0\backslash G} \kappa(x)\Theta_{\rho^x}(\gamma) \quad (\gamma \in G_0 \cap G_{\mathrm{r}}).$$

La constante μ_1 ne dépend que de la classe d'équivalence de ρ et du choix de A ; on la note $c_A(\rho)$. On a donc $c_A(\rho^x) = \kappa(x)c_A(\rho)$ ($x \in G$). Puisque $|\kappa| = 1$, on a $|c_A(\rho)| = 1$ si et seulement $|c_A(\rho^x)| = 1$ pour tout $x \in G$; auquel cas l'opérateur A est dit *unitaire*. Cette définition coïncide avec celle de l'introduction : on a $A^n = \mu_1^n \,\mathrm{Id}$. On note $\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}} \subset \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ le sous-ensemble formé des opérateurs unitaires.

Notons $x \mapsto \bar{x}$ la conjugaison complexe. Si π est une représentation irréductible κ-stable de G et $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}}$, alors pour $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$, la fonction $G_{\mathrm{r}} \to \mathbb{C}, \gamma \mapsto \langle \phi, \Theta_\pi^A\rangle \overline{\Theta_\pi^A(\gamma)}$ est indépendante du choix de $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}}$; par abus d'écriture, on la note $\gamma \mapsto \langle \phi, \Theta_\pi^\kappa\rangle \overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}$. Par construction, cette fonction $\gamma \mapsto \langle \phi, \Theta_\pi^\kappa\rangle \overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}$ ne dépend pas vraiment de π mais seulement de sa classe d'équivalence.

Une représentation irréductible π de G est dite κ-*discrète* si elle est tempérée, κ-stable, et si elle n'est pas équivalente à l'induite parabolique normalisée d'une représentation κ-stable d'un sous-groupe de Levi propre de G. Soit $\epsilon_{\mathrm{t}}^\kappa(G,\omega)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles tempérées κ-stables de G de caractère central ω, et soit $\epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega) \subset \epsilon_{\mathrm{t}}^\kappa(G,\omega)$ le sous-ensemble formé des représentations κ-discrètes.

Lemme 4.2.1 *Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G. L'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ-discrètes de G de caractère central ω, ayant un vecteur non nul fixé par Γ, est* fini.

Preuve On peut supposer que $\Gamma = I^{nr}$ pour un entier $r \geq 1$. Soit π une représentation irréductible κ-discrète de G de caractère central ω. D'après [HH, §5.3, Lemma], il existe un entier $s \geq 1$ divisant l'ordre de κ, et une série discrète σ de $GL(\frac{n}{s},F)$ vérifiant $\{a \in \mathbb{Z} : \kappa^a\sigma \simeq \sigma\} = s\mathbb{Z}$, tels que, posant $\alpha = (\frac{n}{s},\ldots,\frac{n}{s}) \in \Pi_n$ et notant τ la représentation $\sigma \otimes \kappa\sigma \otimes \cdots \otimes \kappa^{s-1}\sigma$ de M_α, on ait $\pi \simeq \iota_{P_\alpha}^G(\tau)$ (induite parabolique normalisée). De plus, l'entier s et la classe d'équivalence de σ sont déterminés de manière unique par π. On suppose que π a un vecteur non nul fixé par I^{nr} (ce qui implique que ω est trivial sur U_F^r). Par réciprocité de Frobenius, τ est isomorphe à un quotient du module de Jacquet normalisé π_{U_α} de π. Par conséquent d'après l'appendice A.2, τ a un vecteur non nul fixé par $I^{\alpha,nr}(= M_\alpha \cap I^{nr})$.

Posons $m = \frac{n}{s}$. Puisque τ a un vecteur non nul fixé par $I^{\alpha,nr}$ et que κ est trivial sur U_F^r, σ a un vecteur non nul fixé par $I^{m,mr}$. Le caractère central $\omega_\tau : A_\alpha = (F^\times)^s \to \mathbb{C}^\times$ de τ est donné par

$$\omega_\tau = \omega_\sigma \otimes \kappa^m\omega_\sigma \otimes \cdots \otimes \kappa^{(s-1)m}\omega_\sigma$$

où $\omega_\sigma : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ désigne le caractère central de σ. Puisque $\omega = \omega_\tau|_Z$, on a l'égalité

$$\omega = \kappa^{\frac{s(s-1)m}{2}}\omega_\sigma^s.$$

Comme σ a un vecteur non nul fixé par $I^{m,mr}$, ω_σ est trivial sur U_F^r. Par conséquent ω_σ appartient à un ensemble fini de caractères de $F^\times$, ne dépendant que de ω, n et s. Or on sait que si ω_1 est un caractère (unitaire) de $F^\times$, le nombre de classes d'équivalence de séries discrètes de $GL(m,F)$ de caractère central ω_1, ayant un vecteur non nul fixé par $I^{m,mr}$, est fini. D'où le lemme. ■

Théorème 4.2.2 *Soit $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$. Pour $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)_{\mathrm{e}}^\kappa$, on a la formule*

$$\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = \sum_{\pi \in \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega)} \langle \phi, \Theta_\pi^\kappa \rangle \overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}$$

où la somme est finie.

Remarque 4.2.3 Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, la somme est finie d'après le lemme précédent : fixée une fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$, il n'existe à équivalence près qu'un nombre fini de représentations irréductibles κ-discrètes π de G de caractère central ω, telles que $\pi(\phi d\bar{g}) \neq 0$.

D'après [HH, §5.3, Corollary 1] (valable en toute caractéristique), si une représentation irréductible tempérée κ-stable π de G est *κ-elliptique*, c'est-à-dire si elle vérifie $\Theta_\pi^A|_{G_{\mathrm{e}}} \neq 0$ pour un $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$, alors elle est κ-discrète. On peut en particulier dans l'énoncé du théorème ci-dessus, remplacer $\epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega)$ par l'ensemble $\epsilon_{\mathrm{t}}^\kappa(G,\omega)$: la somme reste la même. Réciproquement, si π est une représentation irréductible κ-discrète de G, alors d'après [HL1], elle est κ-elliptique.

La démonstration du théorème 4.2.2 occupe les cinq numéros suivants. On procède en deux temps : d'abord pour F de caractéristique nulle grâce à une version simple de la formule des traces (non tordue) locale d'Arthur. Puis pour F de caractéristique > 0, par la méthode des corps proches, grâce au théorème 2.6.2.

Avant d'attaquer la démonstration du théorème 4.2.2, énonçons le corollaire qui nous intéresse. Soit π une représentation irréductible κ-discrète de G de caractère central ω, et soit $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$. On appelle *pseudo-coefficient pour* Θ_π^A toute fonction $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ vérifiant :

(i) $\langle \phi, \Theta_\pi^A \rangle = 1$,

(ii) $\langle \phi, \Theta_{\pi_1}^{A_1} \rangle = 0$ pour tout couple (π_1, A_1) formé d'une représentation irréductible tempérée κ-stable π_1 de G de caractère central ω telle que $\pi_1 \not\simeq \pi$, et d'un opérateur $A_1 \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi_1,\pi_1)$.

D'après [HL1], on sait qu'il existe des pseudo-coefficients pour Θ_π^A. On sait aussi que si ϕ est l'un d'eux, alors $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)_{\mathrm{e}}^\kappa$. D'où le

Corollaire 4.2.4 *Soit π une représentation irréductible κ-discrète de G de caractère central ω, et soit $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}}$. Si $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)$ est un pseudo-coefficient pour Θ_π^A, on a*

$$\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = \overline{\Theta_\pi^A(\gamma)} \quad (\gamma \in G_{\mathrm{e}}).$$

Remarque 4.2.5 Rappelons qu'une représentation irréductible π de G est dite essentiellement tempérée (resp., essentiellement κ-discrète) s'il existe un caractère χ

de $F^\times$ tel que la représentation $\chi\pi$ soit tempérée (resp., κ-discrète). Si π est une représentation irréductible essentiellement κ-discrète de G et si $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$, on définit comme ci-dessus la notion de pseudo-coefficient pour Θ_π^A: si χ est un caractère de $F^\times$ tel que $\chi\pi$ soit κ-discrète, et si $\phi_0 \in C_c^\infty(G, \omega_{\chi\pi})$ est un pseudo-coefficient pour $\Theta_{\chi\pi}^A$ où $\omega_{\chi\pi}$ désigne le caractère central de $\chi\pi$, alors la fonction $g \mapsto \chi \circ \det(g)\phi_0(g)$ est un pseudo-coefficient pour Θ_π^A (et on les obtient tous de cette manière).

Soit π une représentation irréductible κ-stable de G, et soit $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$. Considérons la représentation contragrédiente $\pi^\vee$ de π. On définit comme suit un opérateur $A^\vee$ sur l'espace $V_{\pi^\vee}$: $\langle v, A^\vee v^\vee\rangle = \langle A^{-1}v, v^\vee\rangle$ pour tout $(v, v^\vee) \in V_\pi \times V_{\pi^\vee}$. Par construction, $A^\vee$ appartient à $\mathrm{Isom}_G(\kappa^{-1}\pi^\vee, \pi^\vee)$ (en particulier, $\pi^\vee$ est κ-stable). Si π est unitarisable et si A est unitaire, alors pour tout $\gamma \in G_{\mathrm{r}}$, on vérifie que $\overline{\Theta_\pi^A(\gamma)} = \Theta_{\pi^\vee}^{A^\vee}(\gamma)$. On en déduit que si π est essentiellement κ-discrète et si $\phi \in C_c^\infty(G, \omega_\pi)$ est un pseudo-coefficient pour Θ_π^A, alors on a

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = \Theta_{\pi^\vee}^{A^\vee}(\gamma) \quad (\gamma \in G_{\mathrm{e}}).$$

Notons que pour cette égalité, il n'est pas nécessaire de supposer A unitaire.

4.3 Démonstration du théorème 4.2.2 pour F de caractéristique nulle

C'est ici qu'intervient le groupe réductif connexe G^* introduit en 4.1 (il permet d'appliquer [A]). Posons $G_{\mathrm{r}}^* = p_1^{-1}(G_0 \cap G_{\mathrm{r}})$ et $G_{\mathrm{e}}^* = p_1^{-1}(G_0 \cap G_{\mathrm{e}})$. Puisque F est de caractéristique nulle, G_{r}^* est l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G^* et G_{e}^* est le sous-ensemble de G_{r}^* formé des éléments elliptiques, au sens de la théorie des groupes algébriques. Soit ω^* le caractère de Z^* défini par $\omega^*(z, x) = \omega(x)$ ($z \in Z$, $x \in L^1$). Comme pour G_0, on définit l'espace $C_c^\infty(G^*, \omega^*)_{\mathrm{e}}$ et l'ensemble $\epsilon_{\mathrm{e}}(G^*, \omega^*)$. La projection p_1 induit des identifications $C_c^\infty(G^*, \omega^*)_{\mathrm{e}} = C_c^\infty(G_0, \omega)_{\mathrm{e}}$ et $\epsilon_{\mathrm{e}}(G^*, \omega^*) = \epsilon_{\mathrm{e}}(G_0, \omega)$. Puisque F est de caractéristique nulle, d'après Arthur [A, Theorem 4.1], pour $\gamma \in G_0 \cap G_{\mathrm{e}}$ et $\varphi \in C_c^\infty(G_0, \omega)_{\mathrm{e}}$, on a la formule

$$\Lambda^{G_0}(\varphi, \gamma) = \sum_{\rho \in \epsilon_{\mathrm{e}}(G_0, \omega)} \langle \varphi, \Theta_\rho\rangle \overline{\Theta_\rho(\gamma)}$$

où la somme est finie.

Soit $\phi \in C_c^\infty(G, \omega)_{\mathrm{e}}^\kappa$. Fixons un système de représentants X dans G des classes $G_0\backslash G$, et notons $\varphi \in C_c^\infty(G_0, \omega)$ la restriction à G_0 de la fonction $\sum_{x \in X} \kappa(x)\, {}^x\phi$ avec ${}^x\phi(g) = \phi(x^{-1}gx)$ ($g \in G$). Montrons que $\varphi \in C_c^\infty(G_0, \omega)_{\mathrm{e}}$. Soit $\gamma \in G_0 \cap (G_{\mathrm{r}} \smallsetminus G_{\mathrm{e}})$. Choisissons des mesures de Haar dg et $d_\gamma a$ sur G et G_γ^{d}, et posons

$$\Lambda^{G_0}(\varphi, \gamma) = \int_{(G_0 \cap G_\gamma^{\mathrm{d}})\backslash G_0} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{d_\gamma a}.$$

On a

$$\Lambda^{G_0}(\varphi, \gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G_\gamma^{\mathrm{d}} G_0} \varphi(g^{-1}\gamma g)\, \frac{dg}{d_\gamma a}.$$

On en déduit que si $G_\gamma^{\mathrm{d}} \not\subset G_0$, alors $\Lambda^{G_0}(\varphi,\gamma) = 0$. Et si $G_\gamma^{\mathrm{d}} \subset G_0$, alors puisque $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G,\omega)_{\mathrm{e}}^\kappa$, on a

$$\Lambda^{G_0}(\varphi,\gamma) = \int_{G_\gamma^{\mathrm{d}}\backslash G} \kappa(g)\phi(g^{-1}\gamma g)\,\frac{dg}{d_\gamma a} = 0.$$

Soit maintenant $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$. Si $\gamma \notin G_0$, alors puisque

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, g^{-1}\gamma g) = \kappa(g^{-1})\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) \quad (g \in G),$$

on a $\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = 0$. On peut donc supposer que $\gamma \in G_0$. Alors on a

$$\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) = \Lambda^{G_0}(\varphi,\gamma) = \sum_{\rho\in\epsilon_{\mathrm{e}}(G_0,\omega)} \langle\varphi,\Theta_\rho\rangle\overline{\Theta_\rho(\gamma)}.$$

Soit $\epsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rég}}(G_0,\omega) \subset \epsilon_{\mathrm{e}}(G_0,\omega)$ le sous-ensemble formé des classes de représentations régulières. Pour $\rho \in \epsilon_{\mathrm{e}}(G_0,\omega)$, on a

$$\langle\varphi,\Theta_\rho\rangle = \sum_{x\in X} \kappa(x)\langle\phi|_{G_0},\Theta_{\rho^x}\rangle.$$

On en déduit que si $\rho \in \epsilon_{\mathrm{e}}(G_0,\omega) \smallsetminus \epsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rég}}(G_0,\omega)$, alors $\langle\varphi,\Theta_\rho\rangle = 0$. Fixons un système de représentants $\mathfrak{E}$ dans $\epsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rég}}(G_0,\omega)$ des orbites de l'action de $G_0\backslash G$. On obtient

$$\begin{aligned}\Lambda_\kappa^G(\phi,\gamma) &= \sum_{\rho\in\mathfrak{E}}\sum_{y\in X}\sum_{x\in X} \kappa(x)\langle\phi|_{G_0},\Theta_{\rho^{yx}}\rangle\overline{\Theta_{\rho^y}(\gamma)}\\ &= \sum_{\rho\in\mathfrak{E}}\sum_{y\in X}\sum_{z\in X} \kappa(y^{-1}z)\langle\phi|_{G_0},\Theta_{\rho^z}\rangle\overline{\Theta_{\rho^y}(\gamma)}\\ &= \sum_{\rho\in\mathfrak{E}} \langle\phi|_{G_0},\tilde{\Theta}_\rho\rangle\overline{\tilde{\Theta}_\rho(\gamma)}\end{aligned}$$

où l'on a posé $\tilde{\Theta}_\rho = \sum_{g\in G_0\backslash G}\kappa(x)\Theta_{\rho^x}$. L'induction de G_0 à G induit une bijection

$$\epsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rég}}(G_0,\omega)/G \to \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega),\ \rho \mapsto \iota(\rho).$$

Et si ρ est une représentation irréductible réguliere de G_0, alors la représentation $\pi = \mathrm{ind}_{G_0}^G(\rho)$ est irréductible κ-stable, et pour tout $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}}$, on a $\Theta_\pi^A = c_A(\rho)\tilde{\Theta}_\rho$ avec $|c_A(\rho)| = 1$. Cela achève, pour F de caractéristique nulle, la démonstration du théorème 4.2.2.

4.4 Pour traiter le cas de caractéristique > 0, il nous faut passer par l'intermédiaire des algèbres de Hecke et de leur comparaison pour des corps locaux proches : on a besoin de comparer des κ-intégrales orbitales elliptiques (proposition 2.3.2), mais aussi des traces κ-tordues.

Si π est une représentation de G, pour tout sous-groupe ouvert compact Γ de G, on note V_π^Γ le sous-espace de V_π formé des vecteurs fixés par Γ. On sait que l'application $\pi \mapsto V_\pi^\Gamma$ induit une bijection entre :

- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles π de G telles que $V_\pi^\Gamma \neq 0$,
- l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}(G,\Gamma)$-modules simples.

Soit Γ un sous-groupe ouvert compact de G_0. On définit comme suit un automorphisme κ^Γ du $\mathbb{C}$-*espace vectoriel* sous-jacent à $\mathcal{H}(G,\Gamma)$: pour $x \in G$, on note f_x^Γ la fonction caractéristique de la double classe $\Gamma x \Gamma$, et l'on pose $\kappa^\Gamma(f_x^\Gamma) = \kappa(x) f_x^\Gamma$. Grâce à la formule de Shimura pour le produit $f_x^\Gamma * f_y^\Gamma$ (x, $y \in G$), on vérifie facilement que κ^Γ est un automorphisme d'*algèbre*. Si W est un $\mathcal{H}(G,\Gamma)$-module, on note ${}_\kappa W$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel W muni de la structure de $\mathcal{H}(G,\Gamma)$-module donnée par $\mathcal{H}(G,\Gamma) \times W \to W$, $(f,w) \mapsto \kappa^\Gamma(f)\cdot w$; et l'on dit que W est κ-*stable* si $\mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W) \neq 0$. Soit π une représentation irréductible κ-stable de G telle que $V_\pi^\Gamma \neq 0$, et posons $W = V_\pi^\Gamma$. L'application

$$\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi) \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W), A \mapsto A^\Gamma = A|_W$$

est un isomorphisme de groupes, d'application réciproque $B \mapsto A_B$ donnée par

$$A_B \circ \pi(g)(w) = \kappa(g)^{-1}\pi(g) \circ B(w) \quad (g \in G, w \in W).$$

On en déduit que l'application $\pi' \mapsto V_{\pi'}^\Gamma$ induit une bijection entre :

- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ-stables π' de G telles que $V_{\pi'}^\Gamma \neq 0$,
- l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{H}(G,\Gamma)$-modules simples κ-stables.

Soit ρ une représentation de G_0 telle que $\pi \simeq \mathrm{ind}_{G_0}^G(\rho)$. D'après le numéro 4.2, on a la décomposition $V_\pi = \bigoplus_x V_\pi(\rho^x)$ où x parcourt un système de représentants dans G des classes $G_0\backslash G$. Et pour $A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)$ et $x \in G$, on a $A|_{V_\pi(\rho^x)} = c_A(\rho^x)\,\mathrm{Id}$ avec $c_A(\rho^x) = \kappa(x)c_A(\rho)$. D'où la définition suivante : un opérateur $B \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W)$ est dit *unitaire* s'il existe une décomposition $W = \bigoplus_x W_x$ où x parcourt les éléments de $G_0\backslash G$, et un nombre complexe μ de module 1, tels que $B|_{W_x} = \kappa(x)\mu\,\mathrm{Id}$. On note $\mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W)_{\mathrm{u}} \subset \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W)$ le sous-ensemble formé des opérateurs unitaires. Par définition, l'isomorphisme

$$\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi) \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W)$$

induit par restriction un isomorphisme $\mathrm{Isom}_G(\kappa\pi,\pi)_{\mathrm{u}} \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}(G,\Gamma)}({}_\kappa W, W)_{\mathrm{u}}$.

4.5 Soit dz une mesure de Haar sur Z, et soit $C_c^\infty(G) \to C_c^\infty(G,\omega)$, $f \mapsto f_\omega$ l'application linéaire définie par $f_w(g) = \int_Z \omega(z) f(zg)\,dz$. Elle est surjective [HL1, §3.3, lemme 2].

Pour $\gamma \in G_{\mathrm{e}}$, on note $\Lambda_\kappa^G(\,\cdot\,,\gamma)$ la distribution sur G définie par $d\bar{g}$ comme en 1.4. On a donc

$$\Lambda_\kappa^G(f_w,\gamma) = \int_Z \omega(z)\Lambda_\kappa^G(f, z\gamma)\,dz \quad (f \in C_c^\infty(G))$$

(l'intégrale est absolument convergente).

Soit dg la mesure de Haar sur G telle que $d\bar{g} = \frac{dg}{dz}$. Si π est une représentation irréductible de G de caractère central ω, on a $\pi(f_\omega d\bar{g}) = \pi(f dg)$ ($f \in C_c^\infty(G)$).

4.6 Soient r, F_1, F_2, $\eta = (\tau, \tilde{\tau})$, κ_1 et $\kappa_2 = \eta^\times(\kappa_1)$ comme dans le numéro 2.3. Soit aussi ω_1 un caractère de $F_1^\times$ tel que $t_{\omega_1} \leq r$ (*cf.* 2.3), et posons $\omega_2 = \eta^\times(\omega_1)$. Soient dg_1 et dg_2 des mesures de Haar sur $G(F_i)$ telles que $\mathrm{vol}(K_{F_1}, dg_1) = \mathrm{vol}(K_{F_2}, dg_2)$. Et soient dz_1 et dz_2 des mesures de Haar sur $Z(F_1)$ et $Z(F_2)$ telles que $\mathrm{vol}(U_{F_1}, dz_1) = \mathrm{vol}(U_{F_2}, dz_2)$. Alors les mesures $d\bar{g}_1 = \frac{dg_1}{dz_1}$ et $d\bar{g}_2 = \frac{dg_2}{dz_2}$ sur $Z(F_1)\backslash G(F_1)$ et $Z(F_2)\backslash G(F_2)$ sont compatibles au sens de 2.3. Pour $i = 1, 2$ et $\gamma \in G(F_i)_{\mathrm{e}}$, on note $\Lambda_{\kappa_i}^{G(F_i)}(\,\cdot\,, \gamma)$ la distribution sur $G(F_i)$ (resp., la forme linéaire sur $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F_i), \omega_i)$) définie par $d\bar{g}_i$ comme en 1.4. On note $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F_i)) \to C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F_i), \omega_i)$, $f \mapsto f_{\omega_i}$ l'application linéaire définie par dz_i comme en 4.5. Enfin, si π est une représentation irréductible κ_i-stable de $G(F_i)$ et si $A \in \mathrm{Isom}_{G(F_i)}(\kappa_i\pi, \pi)$, on note Θ_π^A la distribution sur $G(F_i)$ définie par dg_i comme en 4.5.

Soient $\gamma \in G(F_1)_{\mathrm{e}}$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. On suppose que $r \geq a$ et qu'il existe un voisinage compact $I_{F_1}^{nr}$-biinvariant $\mathcal{V}_1$ de γ dans $G(F_1)_{\mathrm{e}}$ tel que $\zeta_\eta(\mathcal{V}_1) \subset G(F_2)_{\mathrm{e}}$ et qu'on ait

$$\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f), y) = \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a))$$

pour tout $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$. Alors on a le lemme suivant :

Lemme 4.6.1 *Pour tout $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$, on a*

$$\Lambda_{\kappa_2}^{G(F_2)}(\zeta_\eta(f)_{\omega_2}, y) = \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f_{\omega_1}, \gamma) \quad (f \in \mathcal{H}(G(F_1), K_{F_1}^a)).$$

Preuve Soient $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V}_1)$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(F_1), K_{F_1}^a)$. Puisque f est une fonction $K_{F_1}^a$-biinvariante à support compact, l'application $Z(F_1) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f, z\gamma)$ est $U_{F_1}^a$-invariante à support compact. Et comme $\omega_1(U_{F_1}^r) = 1$, on a

$$\Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f_{\omega_1}, \gamma) = \mathrm{vol}(U_{F_1}^r, dz_1) \sum_{z \in F_1^\times / U_{F_1}^r} \omega_1(z) \Lambda_{\kappa_1}^{G(F_1)}(f_z, \gamma)$$

avec $f_z(g) = f(zg)$ $(g \in G(F_1))$; notons que la somme est finie. Par construction, on a $\omega_1 = \omega_2 \circ \eta^\times \colon F_1^\times / U_{F_1}^r \to \mathbb{C}^\times$ et pour $z \in F_1^\times / U_{F_1}^r$, on a $f_z \in \mathcal{H}(G, K_{F_1}^a)$ et $\zeta_\eta(f_z) = \zeta_\eta(f)_{\eta^\times(z)}$. D'où le lemme puisque $\mathrm{vol}(U_{F_2}^r, dz_2) = \mathrm{vol}(U_{F_1}^r, dz_1)$. ■

Pour $i = 1, 2$, si π est une représentation de $G(F_i)$, on note V_π^r le sous-espace de V_π formé des vecteurs fixés par $I_{F_i}^{nr}$. D'après le numéro 4.4, η induit via l'isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta \colon \mathcal{H}_{F_1}^r \to \mathcal{H}_{F_2}^r$ une bijection $[\pi_1] \mapsto \psi_\eta([\pi_1])$ entre :

- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles π_1 de $G(F_1)$ telles que $V_{\pi_1}^r \neq 0$,
- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles π_2 de $G(F_2)$ telles que $V_{\pi_2}^r \neq 0$.

Notons que si π_1 est une représentation irréductible de $G(F_1)$ telle que $V_{\pi_1}^r \neq 0$, alors le caractère central ω_{π_1} de π_1 est trivial sur $U_{F_1}^r$. Et si π_2 est une représentation irréductible de $G(F_2)$ telle que $[\pi_2] = \psi_\eta([\pi_1])$, alors on a $\omega_{\pi_2} = \omega_{\pi_1} \circ (\eta^\times)^{-1}$. Notons aussi que si Γ est un sous-groupe compact de $G(F_1)$ contenant $I_{F_1}^{nr}$, alors d'après [L1, §3.3 lemme 1], ψ_η induit par restriction une bijection entre :

- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles π_1 de $G(F_1)$ telles que $V_{\pi_1}^{\Gamma} \neq 0$,
- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles π_2 de $G(F_2)$ telles que $V_{\pi_2}^{\zeta_\eta(\Gamma)} \neq 0$.

Lemme 4.6.2 *Soit π_1 une représentation irréductible κ_1-stable de $G(F_1)$ telle que $V_{F_1}^r \neq 0$, et soit $A_1 \in \mathrm{Isom}_{G(F_1)}(\kappa_1\pi_1, \pi_1)_{\mathrm{u}}$. Soit π_2 une représentation irréductible de $G(F_2)$ telle que $\psi_\eta([\pi_1]) = [\pi_2]$. Alors π_2 est κ_2-stable, et pour tout $A_2 \in \mathrm{Isom}_{G(F_2)}(\kappa_2\pi_2, \pi_2)_{\mathrm{u}}$, on a*

$$\langle \zeta_\eta(f), \Theta_{\pi_2}^{A_2}\rangle \overline{\langle \zeta_\eta(h), \Theta_{\pi_2}^{A_2}\rangle} = \langle f, \Theta_{\pi_1}^{A_1}\rangle \overline{\langle h, \Theta_{\pi_1}^{A_1}\rangle} \quad (f,\, h \in \mathcal{H}_{F_1}^r).$$

Preuve Posons $W_i = V_{\pi_i}^r$ $(i = 1,\, 2)$. Par construction, le $\mathcal{H}_{F_1}^r$-module W_1 est κ_1-stable si et seulement si le $\mathcal{H}_{F_2}^r$-module W_2 est κ_2-stable. Donc π_2 est une représentation κ_2-stable. Pour $f \in \mathcal{H}_{F_1}^r$, on a $\pi_1(f dg_1)(V_{\pi_1}) \subset W_1$ et $B_1 = A_1|_{W_1} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(W_1)$. Par conséquent

$$\langle f, \Theta_{\pi_1}^{A_1}\rangle = \mathrm{trace}(\pi_1(f dg_1) \circ B_1; W_1).$$

Par hypothèse, il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\iota\colon W_1 \to W_2$ tel que $\iota(f \cdot v) = \zeta_\eta(f) \cdot v$ $(v \in W_1,\ f \in \mathcal{H}_{F_1}^r)$; notons que d'après le lemme de Schur, ι est unique à multiplication près par un complexe non nul. Soit B_2 le $\mathbb{C}$-automorphisme de W_2 défini par $B_2 = \iota \circ B_1 \circ \iota^{-1}$. Puisque $B_1 \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}_{F_1}^r}({}_{\kappa_1}W_1, W_1)$, on a $B_2 \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{H}_{F_2}^r}({}_{\kappa_2}W_2, W_2)$. Soit $A_2 \in \mathrm{Isom}_{G(F_2)}(\kappa_2\pi_2, \pi_2)$ l'opérateur défini par $A_2 = A_{B_2}$ comme en 4.5. Par construction, on a

$$\langle \zeta_\eta(f), \Theta_{\pi_2}^{A_2}\rangle = \langle f, \Theta_{\pi_1}^{A_1}\rangle \quad (f \in \mathcal{H}_{F_1}^r).$$

Puisque $A_1 \in \mathrm{Isom}_{G(F_1)}(\kappa_1\pi_1, \pi_1)_{\mathrm{u}}$, B_2 est unitaire et $A_2 \in \mathrm{Isom}_{G(F_2)}(\kappa_2\pi_2, \pi_2)_{\mathrm{u}}$ (*cf.* 4.4). On conclut en remarquant que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$, on a

$$\langle f', \Theta_{\pi_2}^{\lambda A_2}\rangle \overline{\langle h', \Theta_{\pi_2}^{\lambda A_2}\rangle} = \langle f', \Theta_{\pi_2}^{A_2}\rangle \overline{\langle h', \Theta_{\pi_2}^{A_2}\rangle} \quad (f', h' \in \mathcal{H}_{F_2}^r). \qquad \blacksquare$$

Lemme 4.6.3 *La bijection ψ_η induit par restriction une bijection entre :*

(i) *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles tempérées (resp., κ_1-discrètes) π_1 de $G(F_1)$ telles que $V_{\pi_1}^r \neq 0$,*

(ii) *l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles tempérées (resp., κ_2-discrètes) π_2 de $G(F_2)$ telles que $V_{\pi_2}^r \neq 0$.*

Preuve Soit π_1 une représentation irréductible de $G(F_1)$ telle que $V_{\pi_1}^r \neq 0$, et soit π_2 une représentation irréductible de $G(F_2)$ telle que $[\pi_2] = \psi_\eta([\pi_1])$. Posons $W_i = V_{\pi_i}^r$ $(i = 1,\, 2)$, et choisissons un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\iota\colon W_1 \to W_2$ tel que $\iota(f \cdot v) = \zeta_\eta(f) \cdot \iota(v)$ $(v \in W_1, f \in \mathcal{H}_{F_1}^r)$. Posons $W_i' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W_i, \mathbb{C})$ $(i = 1, 2)$, et soit $\iota'\colon W_2' \to W_1'$ l'isomorphisme défini par $\langle v, \iota'(v')\rangle = \langle \iota(v), v'\rangle$ ($v \in W_1$, $v' \in W_2'$). Soit un couple $(v, v') \in (W_1 \smallsetminus \{0\}) \times (W_2' \smallsetminus \{0\})$. Soit $\phi_1\colon G(F_1) \to \mathbb{C}$ le coefficient de π_1 défini par $\phi_1(g) = \langle \pi_1(g^{-1})v, \iota(v')\rangle$ ($g \in G$), et soit $\phi_2\colon G(F_2) \to \mathbb{C}$ le coefficient de π_2 défini par $\phi_2(g) = \langle \pi_2(g^{-1})\iota(v), v'\rangle$. Pour $i = 1, 2$, ϕ_i est une fonction $I_{F_i}^{nr}$-biinvariante telle que $\phi_i(zg) = \omega_{\pi_i}(z)^{-1}\phi_i(g)$ ($z \in Z(F_i)$, $g \in G(F_i)$). Par construction, pour $x \in G(F_1)$, on a $\phi_2(y) = \phi_1(x)$ pour tout $y \in \zeta_\eta(I_{F_1}^{nr} x I_{F_1}^{nr})$.

On rappelle que pour $i = 1, 2$, π_i est tempérée si et seulement si ϕ_i appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(G(F_i))$ (*cf.* [HC2, §14]. Or d'après la définition de l'espace de Schwartz, $\phi_1 \in \mathcal{C}(G(F_1))$ si et seulement si $\phi_2 \in \mathcal{C}(G(F_2))$. En effet, avec les notations de [HC2, §14], pour tout $(x, y) \in G(F_1) \times G(F_2)$ tel que $K_{F_2} y K_{F_2} = \zeta_\eta(K_{F_1} x K_{F_1})$, on a $\Xi_{G(F_2)}(y) = \Xi_{G(F_1)}(x)$; et pour tout $(x, y) \in G(F_1) \times G(F_2)$ tel que $K_{F_2}^1 y K_{F_2}^1 = \zeta_\eta(K_{F_1}^1 x K_{F_1}^1)$ et $K_{F_2}^1 y^{-1} K_{F_2}^1 = \zeta_\eta(K_{F_1}^1 x^{-1} K_{F_1}^1)$, on a $\|y\|_{F_2} = \|x\|_{F_1}$.

Grâce aux décompositions d'Iwahori pour $G(F_1)$ et $G(F_2)$, on vérifie facilement que

$$\int_{Z(F_2)\backslash G(F_2)} |\phi_2(g_2)|^2\, d\bar{g}_2 = \int_{Z(F_1)\backslash G(F_1)} |\phi_1(g_1)|^2\, d\bar{g}_1.$$

Par conséquent, π_1 est une série discrète si et seulement si π_2 est une série discrète.

On suppose maintenant que π_1 est κ_1-discrète. D'après [HH, §5.3, Lemma], il existe un entier $s \geq 1$ divisant l'ordre de κ_1, et une série discrète σ_1 de $GL(\frac{n}{s}, F_1)$ vérifiant $\{a \in \mathbb{Z} : \kappa_1^a \sigma_1 \simeq \sigma_1\} = s\mathbb{Z}$, tels que, posant $\alpha = (\frac{n}{s}, \dots, \frac{n}{s}) \in \Pi_n$ et notant τ_1 la représentation $\sigma_1 \otimes \kappa_1\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_1^{s-1}\sigma_1$ de $M_\alpha(F_1)$, on ait $\pi_1 \simeq \iota_{P_\alpha(F_1)}^{G(F_1)}(\tau_1)$. Posons $m = \frac{n}{s}$. D'après la démonstration du lemme 4.2.1, σ_1 a un vecteur non nul fixé par $I_{F_1}^{m,mr}$. Soit σ_2 une représentation irréductible de $GL(m, F_2)$ ayant un vecteur non nul fixé par $I_{F_2}^{m,mr}$, et telle que $\psi_\eta^m([\sigma_1]) = [\sigma_2]$ où ψ_η^m désigne la bijection associée comme plus haut à l'isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta^m\colon \mathcal{H}_{F_1}^{m,r} \to \mathcal{H}_{F_2}^{m,r}$. D'après le paragraphe précédent, σ_2 est une série discrète. Notons τ_2 la représentation $\sigma_2 \otimes \kappa_2\sigma_2 \otimes \cdots \otimes \kappa_2^{s-1}\sigma_2$ de $M_\alpha(F_2)$. Par construction, on a $\psi_\eta^\alpha([\tau_1]) = [\tau_2]$ où ψ_η^α désigne la bijection associée comme plus haut à l'isomorphisme d'algèbres (défini en 2.6) $\zeta_\eta^\alpha\colon \mathcal{H}_{F_1}^{\alpha,r} \to \mathcal{H}_{F_2}^{\alpha,r}$. Posons $\pi_2 = \iota_{P_\alpha(F_2)}^{G(F_2)}(\tau_2)$. Alors π_2 est irréductible et κ_2-discrète [HH, §5.3, Lemma], et d'après la proposition A.4.1 de l'appendice, on a $\psi_\eta([\pi_1]) = [\pi_2]$. ∎

4.7 Démonstration du théorème 4.2.2 pour F de caractéristique > 0

Soit $\phi \in C_c^\infty(G, \omega)_e^\kappa$, et choisissons une fonction $f \in C_c^\infty(G)$ telle que $f_\omega = \phi$. Soit $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $f \in \mathcal{H}(G, K^a)$. Soit $r_0(\gamma, \kappa, a) \geq \sup\{t_\kappa, a\}$ comme dans la proposition 2.3.2, et soit un entier $r \geq \sup\{r_0(\gamma, \kappa, a), t_\omega\}$. Choisissons un corps commutatif localement compact non archimédien F' de caractéristique nulle r-proche de F, et fixons un isomorphisme de triplets $\eta\colon T_r(F) \to T_r(F')$. Posons $\kappa' = \eta^\times(\kappa)$, et $\omega' = \eta^\times(\omega)$. Notons G', Z', K', K'^a les groupes $G(F')$, $Z(F')$, $K_{F'}$, $K_{F'}^a$; et pour $\alpha \in \Pi_n$, notons M'_α, A'_α, $K'^{\alpha,a}$ les groupes $M_\alpha(F')$, $A_\alpha(F')$, $K_{F'}^{\alpha,a}$. Soient dg' et dz' les mesures de Haar sur G' et Z' telles que $\mathrm{vol}(K', dg') = \mathrm{vol}(K, dg)$ et $\mathrm{vol}(U_{F'}, dz') = \mathrm{vol}(U_F, dz)$, et posons $d\bar{g} = \frac{dg'}{dz'}$. Grâce à ces mesures, on définit comme précédemment l'application linéaire $C_c^\infty(G') \to C_c^\infty(G', \omega')$, $h \mapsto h_{\omega'}$, la distribution (resp., la forme linéaire sur $C_c^\infty(G', \omega')$) $\Lambda_{\kappa'}^{G'}(\,\cdot\,, y)$ pour $y \in G'_e$, etc.

D'après le théorème 2.6.2 et le lemme 4.6.1, il existe un voisinage I_F^{nr}-biinvariant $\mathcal{V}$ de γ dans G_e tel que $\zeta_\eta(\mathcal{V}) \subset G'_e$ et

$$\Lambda_{\kappa'}^{G'}(\zeta_\eta(f)_{\omega'}, y) = \Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma)$$

pour tout $y \in \zeta_\eta(\mathcal{V})$.

Lemme 4.7.1 *On a $\zeta_\eta(f)_{\omega'} \in C_c^\infty(G', \omega')_e^{\kappa'}$.*

Preuve Posons $f' = \zeta_\eta(f) \in \mathcal{H}(G', K'^a)$, et supposons par l'absurde qu'il existe un $y \in G_r'^{\kappa'} \smallsetminus G'_e$ tel que $\Lambda_{\kappa'}^{G'}(f'_{\omega'}, y) \neq 0$. Soit $\alpha = \alpha_y$. Quitte à remplacer y par $g^{-1}yg$ pour un $g \in G'$, on peut supposer que $y \in M'_\alpha$. Posons $h' = f_{\kappa'}'^{\alpha,K'} \in C_c^\infty(M'_\alpha)$. D'après le lemme 2.5.1, on a

$$\int_{Z'} \omega'(z')\Lambda_{\kappa'}^{M'_\alpha}(h', z'y)\, dz' \neq 0.$$

En d'autres termes, on a $\Lambda_{\kappa'}^{M'_\alpha}(h'_{\omega'}, y) \neq 0$ avec $h'_{\omega'}(m) = \int_{Z'} \omega'(z')h'(z'm)\, dz'$ ($m \in M'_\alpha$). Notons $\Phi \in C_c^\infty(A'_\alpha, \omega')$ la fonction définie par $\Phi(a') = \Lambda_{\kappa'}^{M'_\alpha}(h'_{\omega'}, a'y)$. Choisissons un caractère unitaire $\tilde{\omega}$ de A'_α prolongeant ω', et posons $\tilde{\Phi}(a') = \tilde{\omega}(a')\Phi(a')$ ($a' \in A'_\alpha$). Ainsi $\tilde{\Phi} \in C_c^\infty(Z'\backslash A'_\alpha)$. Puisque $\tilde{\Phi}(1) \neq 0$, d'après le théorème d'inversion de Fourier, il existe un caractère $\bar{\omega}'_\alpha$ de A'_α trivial sur Z', tel que

$$\int_{Z'\backslash A'_\alpha} \bar{\omega}'_\alpha(a')\tilde{\Phi}(a')\, \frac{d_\alpha a'}{dz'} \neq 0$$

où $d_\alpha a'$ désigne une mesure de Haar sur A'_α. Posons $\omega'_\alpha = \bar{\omega}'_\alpha\tilde{\omega}$; c'est un caractère unitaire de A'_α prolongeant ω'. Soit $\varphi' = h'_{\omega'_\alpha} \in C_c^\infty(M'_\alpha, \omega'_\alpha)$ la fonction définie par $\varphi'(m) = \int_{A'_\alpha} \omega'_\alpha(a')h'(a'm)d_\alpha a'$. On a donc

$$\Lambda_{\kappa'}^{M'_\alpha}(\varphi', y) = \int_{Z'\backslash A'_\alpha} \bar{\omega}'_\alpha(a')\tilde{\Phi}(a')\frac{d_\alpha a'}{dz'} \neq 0.$$

Par un argument global standard que nous rappelons ci-après, on en déduit qu'il existe une représentation irréductible (générique) κ-stable τ' de $M_\alpha(F')$ de caractère central ω'_α, telle que $\langle \varphi', \Theta_{\tau'}^{B'} \rangle \neq 0$ pour un (*i.e.*, pour tout) $B' \in \mathrm{Isom}_{M'_\alpha}(\kappa'\tau', \tau')$. Plus précisément, choisissons un corps de nombres $\mathbf{F}'$ tel qu'en une place v_0 de $\mathbf{F}'$, le complété $\mathbf{F}'_{v_0}$ de $\mathbf{F}'$ en v_0 soit isomorphe à F'. Notons $\mathbb{A}_{\mathbf{F}'}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{F}'$, et $C_{\mathbf{F}'}$ le groupe des classes d'idèles. Choisissons un caractère K' de $C_{\mathbf{F}'}$ de degré celui de κ', et tel que, en considérant κ' comme un caractère de $\mathbb{A}_{\mathbf{F}'}^\times$ et en écrivant $\mathrm{K}' = \prod_v \mathrm{K}'_v$ comme produit de caractères locaux K'_v de $\mathbf{F}_v'^\times$ où v parcourt les places de $\mathbf{F}'$, on ait $\mathrm{K}'_{v_0} = \kappa'$. Choisissons aussi un caractère unitaire $\Omega' = \prod_v \Omega'_v$ de $A_\alpha(\mathbb{A}_{\mathbf{F}'})$ tel que $\Omega'|_{A_\alpha(\mathbf{F}')} = 1$ et $\Omega'_{v_0} = \omega'_\alpha$. On peut alors utiliser la version tordue de la formule des traces de Deligne–Kazhdan pour $M_\alpha(\mathbb{A}_{\mathbf{F}'})$ prouvée dans [HH, §7.3, Lemma] : puisque $\Lambda_{\kappa'}^{M'{}_\alpha}(\varphi', y) \neq 0$, on montre comme dans [HH, §8.4, §8.7], qu'il existe une fonction $\Phi' = \prod_v \Phi'_v$ avec $\Phi'_v \in C_c^\infty(M_\alpha(\mathbf{F}'_v), \Omega'_v)$ et $\Phi'_{v_0} = \varphi'$, vérifiant les conditions (iii), (iv) et (v) de [HH, §7.3], et contribuant *non trivialement* au côté spectral de la formule des traces κ'-tordue pour $M_\alpha(\mathbb{A}_{\mathbf{F}'})$. D'où l'existence de τ', comme composante locale d'une représentation irréductible cuspidale κ'-stable de $M_\alpha(\mathbb{A}_{\mathbf{F}'})$.

Puisque $f' \in \mathcal{H}(G', K'^a)$, on a $h' \in \mathcal{H}(M'_\alpha, K'^{\alpha,a})$ (lemme 2.6.1). Pour $B' \in \mathrm{Isom}_{M'_\alpha}(\kappa'\tau', \tau')$, on a $\langle h', \Theta_{\tau'}^{B'}\rangle = \langle \varphi', \Theta_{\tau'}^{B'}\rangle \neq 0$. Par conséquent la représentation τ' a un vecteur non nul fixé par $K'^{\alpha,a}$. Soit $h \in \mathcal{H}(M_\alpha, K^{\alpha,a})$ la fonction définie par $h = (\zeta_\eta^\alpha)^{-1}(h')$. Et soit τ une représentation irréductible de M_α ayant un vecteur non nul fixé par $K^{\alpha,a}$, et telle que $\psi_\eta^\alpha([\tau]) = [\tau']$ où ψ_η^α désigne la bijection associée comme en 4.6 à l'isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta^\alpha : \mathcal{H}_F^{\alpha,r} \to \mathcal{H}_{F'}^{\alpha,r}$. D'après lemme 4.6.2, τ est κ-stable ; et pour $B \in \mathrm{Isom}_{M_\alpha}(\kappa\tau, \tau)$, on a $\langle h, \Theta_\tau^B\rangle \neq 0$. Par construction, la restriction à Z du caractère central de τ coïncide avec ω. Donc $\langle h_\omega, \Theta_\tau^B\rangle = \langle h, \Theta_\tau^B\rangle \neq 0$ avec $h_\omega(m) = \int_Z \omega(z)h(zm)\,dz$ ($m \in M_\alpha$).

On sait d'après [L4] que la distribution Θ_τ^B est localement intégrable sur M_α. Par suite, l'analogue tordu de la formule d'intégration de Weyl pour $Z\backslash M_\alpha$ (*cf.* [HH, §3.11, Proposition]) implique qu'il existe un $x \in M_\alpha \cap G_{\mathrm{r}}^\kappa$ tel que $\Lambda_\kappa^{M_\alpha}(h_\omega, x) \neq 0$. D'après la démonstration du lemme 2.5.1, il existe une constante $c \neq 0$ telle que

$$\Lambda_\kappa^G(\tilde f, x) = c\Lambda_\kappa^{M_\alpha}(\tilde f_\kappa^{\alpha,K}, x) \quad (\tilde f \in C_c^\infty(G)).$$

On a donc

$$\Lambda_\kappa^G(\tilde f_\omega, x) = c\,\Lambda_\kappa^{M_\alpha}((\tilde f_\kappa^{\alpha,K})_\omega, x) \quad (\tilde f \in C_c^\infty(G)).$$

Puisque $r \geq a$, d'après le lemme 2.6.1, on a $h = f_\kappa^{\alpha,K}$. Donc $\Lambda_\kappa^G(f_\omega, x) \neq 0$, ce qui contredit le fait que $\phi \in C_c^\infty(G,\omega)_{\mathrm{e}}^\kappa$. ∎

Terminons la démonstration du théorème 4.2.2. Soit $Y = Y(G, K^a, \omega)$ l'ensemble (fini d'après le lemme 4.2.1) des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ-discrètes π de G de caractère central ω telles que $(V_\pi)^{K^a} \neq 0$. Quitte à remplacer r par un entier plus grand et $\mathcal{V}$ par un voisinage de γ plus petit, on peut supposer que pour toute représentation irréductible κ-discrète π de G telle que $[\pi] \in Y$, la fonction $x \mapsto \Theta_\pi^A(x)$ ($A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$) est constante sur $\mathcal{V}$. Soit alors $f_{\mathcal{V}} \in \mathcal{H}_F^r$ la fonction caractéristique de $\mathcal{V}$ divisée par $\mathrm{vol}(\mathcal{V}, dg)$, et posons $h = \zeta_\eta(f_{\mathcal{V}})$. Puisque $\zeta_\eta(f)_{\omega'} \in C_c^\infty(G', \omega')_0^{\kappa'}$ et $\mathrm{vol}(\zeta_\eta(\mathcal{V}), dg') = \mathrm{vol}(\mathcal{V}, dg)$, d'après 4.3, on a

$$\begin{aligned}\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) &= \mathrm{vol}(\zeta_\eta(\mathcal{V}), dg')^{-1} \int_{\zeta_\eta(\mathcal{V})} \Lambda_{\kappa'}^{G'}(\zeta_\eta(f)_{\omega'}, g')\,dg' \\ &= \sum_{\pi' \in \epsilon_{\mathrm{e}}^{\kappa'}(G',\omega')} \langle \zeta_\eta(f)_{\omega'}, \Theta_{\pi'}^{\kappa'}\rangle \overline{\langle h, \Theta_{\pi'}^{\kappa'}\rangle} \\ &= \sum_{\pi' \in \epsilon_{\mathrm{e}}^{\kappa'}(G',\omega')} \langle \zeta_\eta(f), \Theta_{\pi'}^{\kappa'}\rangle \overline{\langle h, \Theta_{\pi'}^{\kappa'}\rangle}\end{aligned}$$

avec le même abus d'écriture que dans 4.2. D'après le lemme 4.6.3 et la première assertion du lemme 4.6.2, la bijection ψ_η induit par restriction une bijection entre :

- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ-discrètes π de G de caractère central ω telles que $V_\pi^r \neq 0$,
- l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles κ'-discrètes π' de G' de caractère central ω' telles que $V_{\pi'}^r \neq 0$.

Remarquons que si π est une représentation irréductible κ-stable de G telle que $V_\pi^a = 0$, alors on a $\langle f, \Theta_\pi^A \rangle = 0$ ($A \in \mathrm{Isom}_G(\kappa\pi, \pi)$). Par suite, grâce au lemme 4.6.2, on obtient que

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = \sum_{\pi \in \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega)} \langle f, \Theta_\pi^\kappa \rangle \overline{\langle f_Y, \Theta_\pi^\kappa \rangle},$$

la somme portant sur le sous-ensemble fini $Y \subset \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G, \omega)$ défini plus haut. On a donc :

$$\begin{aligned} \Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) &= \sum_{\pi \in \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega)} \langle f, \Theta_\pi^\kappa \rangle \overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)} \\ &= \sum_{\pi \in \epsilon_{\mathrm{e}}^\kappa(G,\omega)} \langle \phi, \Theta_\pi^\kappa \rangle \overline{\Theta_\pi^\kappa(\gamma)}. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du théorème 4.2.2.

A Appendice

On prouve dans cet appendice que si F_1 et F_2 sont deux corps r-proches, alors la correspondance entre représentations de $G(F_1)$ et représentations de $G(F_2)$ définie par un isomorphisme d'algèbres $\zeta \colon \mathcal{H}_{F_1}^r \to \mathcal{H}_{F_2}^r$ comme en 2.2, est compatible à l'induction parabolique et à la restriction de Jacquet.

A.1 Notons $\mathfrak{R}(G)$ la catégorie des représentations de G. On appelle *paire cuspidale (dans G)* un couple (L, τ) formé d'un sous-groupe de Levi L de G et d'une représentation irréductible cuspidale τ de L. Deux paires cuspidales (L, τ) et (L', τ') sont dite *G-inertiellement équivalente*s s'il existe un $g \in G$ et un caractère non ramifié χ' de L', tels que $L' = g^{-1}Lg$ et $\tau^g \simeq \tau' \otimes \chi'$. Si (L, τ) est une paire cuspidale, on note $[L, \tau]_G$ sa classe de G-équivalence inertielle. L'ensemble de ces classes est noté $\mathfrak{B}(G)$. Comme dans [BD, proposition-définition 2.8], pour $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$, on définit une sous-catégorie pleine $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ de $\mathfrak{R}(G)$: si $\mathfrak{s} = [L, \tau]_G$, alors avec les notations de [BD], $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ est la catégorie $(\mathrm{Alg}\, G)(L, D)$ où D désigne l'orbite de τ sous l'action du groupe des caractères non ramifiés de L. D'après [BD, proposition 2.10], on a la décomposition en produit direct :

$$\mathfrak{R}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} \mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G).$$

Pour toute partie non vide $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}(G)$, on pose $\mathfrak{R}^{\mathfrak{S}}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$.

Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, notons $\mathfrak{R}^a(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ formée des représentations π engendrées par $V_\pi^a = V_\pi^{I^{na}}$, *i.e.*, telles que $V_\pi = \pi(G)(V_\pi^a)$. Le groupe

I^a vérifiant les conditions 3.7.1 et 3.7.2 de [BD, p. 28] (*e.g.*, [L3, 1.3]), on peut lui appliquer [BD, corollaire 3.9] : la catégorie $\mathfrak{R}^a(G)$ coïncide avec $\mathfrak{R}^{\mathfrak{S}}(G)$ pour une partie *finie* $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(a)$ de $\mathfrak{B}(G)$, et le foncteur $\pi \mapsto V_\pi^a$ est une équivalence entre $\mathfrak{R}^a(G)$ et la catégorie des $\mathcal{H}^a$-modules à gauche, que l'on note $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}_a)$. De plus, ce foncteur a pour quasi-inverse le foncteur $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a) \to \mathfrak{R}^a(G)$, $W \mapsto (\mathcal{H} * e^a) \otimes_{\mathcal{H}^a} W$ où $e^a = e_F^a$ désigne l'élément unité de $\mathcal{H}^a$ (*i.e.*, la fonction caractéristique de I^{na}).

A.2 Soit $\alpha \in \Pi_n^*$. Notons $\mathfrak{R}(M_\alpha)$ la catégorie des représentations de M_α. Comme dans A.1, on définit l'ensemble $\mathfrak{B}(M_\alpha)$ des classes de M_α-équivalence inertielle de paires cupidales dans M_α, et pour toute partie non vide $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{B}(M_\alpha)$, la sous-catégorie pleine $\mathfrak{R}^{\mathfrak{S}}(M_\alpha)$ de $\mathfrak{R}(M_\alpha)$. Si (L, τ) est une paire cuspidale dans M_α, on note $[L, \tau]_{M_\alpha}$ sa classe de M_α-équivalence inertielle. D'où une application canonique :

$$l_\alpha \colon \mathfrak{B}(M_\alpha) \to \mathfrak{B}(G),\ [L, \tau]_{M_\alpha} \mapsto [L, \tau]_G.$$

Si τ est une représentation de M_α, on note V_τ^a ($a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) le sous-espace de V_τ formé des vecteurs fixés par $I^{\alpha,na}$. Comme dans A.1, pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on note $\mathfrak{R}^a(M_\alpha)$ la sous-catégorie pleine formée des représentations τ de M_α engendrées par V_τ^a, et $\mathfrak{S}_\alpha(a)$ la partie finie de $\mathfrak{B}(M_\alpha)$ donnée par $\mathfrak{R}^a(M_\alpha) = \mathfrak{R}^{\mathfrak{S}_\alpha(a)}(M_\alpha)$. D'après la démonstration de la proposition 4 de [B, §1.6], pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a $\mathfrak{S}_\alpha(a) = l_\alpha^{-1}(\mathfrak{S}(a))$.

Soient $\iota_\alpha = \iota_{P_\alpha}^G \colon \mathfrak{R}(M_\alpha) \to \mathfrak{R}(G)$ et $r_\alpha = r_{U_\alpha} \colon \mathfrak{R}(G) \to \mathfrak{R}(M_\alpha)$ les foncteurs induction parabolique et restriction de Jacquet normalisés. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, puisque $\mathfrak{S}_\alpha(a) = l_\alpha^{-1}(\mathfrak{S}(a))$, ces foncteurs induisent par restriction des foncteurs

$$\iota_\alpha^a \colon \mathfrak{R}^a(M_\alpha) \to \mathfrak{R}^a(G) \quad \text{et} \quad r_\alpha^a \colon \mathfrak{R}^a(G) \to \mathfrak{R}^a(M_\alpha).$$

A.3 Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Pi_n^*$. Identifions A_α à $(F^\times)^s$ et notons $A_\alpha^{++} \subset A_\alpha$ le sous-ensemble formé des $(z_1, \dots, z_s)$ tels que $\nu_F(z_i) > \nu_F(z_i + 1)$. Notons $\overline{P}_\alpha$ le sous-groupe parabolique de G opposé à P_α par rapport à M_α. Pour $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, notons $M_\alpha^{a,+}$ l'ensemble des éléments (P_α, I^{na})-*positifs* de M_α :

$$M_\alpha^{a,+} = \{m \in M_\alpha : m(P_\alpha \cap I^{na})m^{-1} \subset I^{na} \text{ et } m^{-1}(\overline{P}_\alpha \cap I^{na})m \subset I^{na}\}.$$

On a clairement $I^{\alpha,na} M_\alpha^{a,+} I^{\alpha,na} = M_\alpha^{a,+}$. De plus, A_α^{++} est contenu dans $M_\alpha^{a,+}$ et coïncide avec l'ensemble des éléments *fortement* (P_α, I^{na})-*positifs* de A_α au sens de [B, §3.1].

Soit $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Notons $\mathcal{A}^{\alpha,a}$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^{\alpha,a}$ formée des fonctions à support dans $M_\alpha^{a,+}$, et $\mathcal{S}^{\alpha,a}$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}^{\alpha,a}$ formé des fonctions à support dans $I^{\alpha,na} A_\alpha^{++}$. Puisque $A_\alpha^{++} A_\alpha^{++} = A_\alpha^{++}$, $\mathcal{S}^{\alpha,a}$ est une partie multiplicativement fermée de $\mathcal{H}^{\alpha,a}$; et d'après [B, §3.2], $\mathcal{H}^{\alpha,a}$ s'identifie canoniquement avec l'algèbre $(\mathcal{S}^{\alpha,a})^{-1}\mathcal{A}^{\alpha,a}$ (localisation de $\mathcal{A}^{\alpha,a}$ en $\mathcal{S}^{\alpha,a}$).

On définit comme suit une application linéaire $j_\alpha^a \colon \mathcal{A}^{\alpha,a} \to \mathcal{H}^a$: pour $m \in M_\alpha^{a,+}$ et $f \in \mathcal{H}^{\alpha,a}$ à support dans $I^{\alpha,na} m I^{\alpha,na}$, $j_\alpha^a(f)$ est l'unique fonction I^{na}-biinvariante à support dans $I^{na} m I^{na}$ telle que $j_\alpha^a(f)(m) = \delta_{P_\alpha}(m) f(m)$. D'après [B, §3.3], j_α^a est un homomorphisme injectif d'algèbres.

Soient $\mathcal{J}^a_\alpha\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a)$ et $\mathcal{R}^a_\alpha\colon \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a})$ les foncteurs définis comme suit : $\mathcal{J}^a_\alpha$ est le composé du foncteur restriction $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{\alpha,a})$, $W \mapsto W$ et du foncteur induction $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{\alpha,a}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a)$, $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\alpha,a}}(\mathcal{H}^a, W)$; et $\mathcal{R}^a_\alpha$ est le composé du foncteur restriction $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{\alpha,a})$, $W \mapsto (j^a_\alpha)^*(W)$ et du foncteur localisation $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{\alpha,a}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a})$, $W \mapsto (\mathcal{S}^{\alpha,a})^{-1}W = \mathcal{H}^{\alpha,a} \otimes_{\mathcal{A}^{\alpha,a}} W$.

Proposition A.3.1 ([B, §4.1, Corollary 1]) *Soient $\alpha \in \Pi^*_n$ et $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Les diagrammes suivants*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}^a(M_\alpha) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\iota^a_\alpha"'] & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a}) \arrow[d, "\mathcal{J}^a_\alpha"] \\ \mathfrak{R}^a(G) \arrow[r, "\approx"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{R}^a(G) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "r^a_\alpha"'] & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^a) \arrow[d, "\mathcal{R}^a_\alpha"] \\ \mathfrak{R}^a(M_\alpha) \arrow[r, "\approx"] & \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^{\alpha,a}) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Notons que dans [B, §4.1], Bushnell travaille avec un groupe du type K^a pour $a \geq 1$. Mais compte-tenu de A.1 et A.2, son résultat reste vrai pour I^{na} ($a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

A.4 Soient r, F_1, F_2 et $\eta = (\tau, \tilde{\tau})$ comme dans 2.1. Via les équivalences $\mathfrak{R}^r(G(F_1)) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{H}^r_{F_1})$, $\pi_1 \mapsto V^r_{\pi_1}$ et $\mathrm{Mod}(\mathcal{H}^r_{F_2}) \to \mathfrak{R}^r(G(F_2))$, $W \mapsto (\mathcal{H}_{F_2} * e^r_{F_2}) \otimes_{\mathcal{H}^r_{F_2}} W$, l'isomorphisme d'algèbres $\zeta_\eta\colon \mathcal{H}^r_{F_1} \to \mathcal{H}^r_{F_2}$ induit une équivalence de catégories

$$\Psi_\eta\colon \mathfrak{R}^r(G(F_1)) \to \mathfrak{R}^r(G(F_2)).$$

Par restriction et passage aux quotients, Ψ_η induit une bijection entre classes d'équivalence de représentations irréductibles : c'est l'application noté ψ_η en 4.6.

Pour $\alpha \in \Pi^*_n$, l'isomorphisme d'algèbres $\zeta^\alpha_\eta\colon \mathcal{H}^{\alpha,r}_{F_1} \to \mathcal{H}^{\alpha,r}_{F_2}$ induit de la même manière une équivalence de catégories

$$\Psi^\alpha_\eta\colon \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_1)) \to \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_2)).$$

Proposition A.4.1 *Soit $\alpha \in \Pi^*_n$. Les diagrammes suivants*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_1)) \arrow[r, "\Psi^\alpha_\eta"] \arrow[d, "\iota^{G(F_1)}_{P_\alpha(F_1)}"'] & \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_2)) \arrow[d, "\iota^{G(F_2)}_{P_\alpha(F_2)}"] \\ \mathfrak{R}^r(G(F_1)) \arrow[r, "\Psi_\eta"] & \mathfrak{R}^r(G(F_2)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{R}^r(G(F_1)) \arrow[r, "\Psi_\eta"] \arrow[d, "r_{U_\alpha(F_1)}"'] & \mathfrak{R}^r(G(F_2)) \arrow[d, "r_{U_\alpha(F_2)}"] \\ \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_1)) \arrow[r, "\Psi^\alpha_\eta"] & \mathfrak{R}^r(M_\alpha(F_2)) \end{tikzcd}$$

sont commutatifs.

Démonstration Pour $i = 1, 2$, on définit comme en A.3 les sous-ensembles $A_\alpha(F_i)^{++} \subset A_\alpha(F_i)$, $M_\alpha(F_i)^{r,+} \subset M_\alpha(F_i)$ et $\mathcal{S}_{F_i}^{\alpha,r} \subset \mathcal{H}_{F_i}^{\alpha,r}$, la sous-algèbre $\mathcal{A}_{F_i}^{\alpha,r} \subset \mathcal{H}_{F_i}^{\alpha,r}$, et l'homomorphisme injectif d'algèbres $j^r_{\alpha,F_i} : \mathcal{A}_{F_i}^{\alpha,r} \to \mathcal{H}^r_{F_i}$. On a clairement $\zeta^\alpha_\eta(I_{F_1}^{\alpha,nr} A_\alpha(F_1)^{++}) = I_{F_2}^{\alpha,nr} A_\alpha(F_2)^{++}$, *i.e.*, $\zeta^\alpha_\eta(\mathcal{S}_{F_1}^{\alpha,nr}) = \mathcal{S}_{F_2}^{\alpha,nr}$. Puisque pour $i = 1, 2$, $M_\alpha(F_i)^+$ est une partie $I_{F_i}^{\alpha,0}$-biinvariante de $M_\alpha(F_i)$, les décompositions d'Iwahori pour $M_\alpha(F_1)$ et $M_\alpha(F_2)$ impliquent l'égalité $\zeta^\alpha_\eta(M_\alpha(F_1)^{r,+}) = M_\alpha(F_2)^{r,+}$. On en déduit que ζ^α_η induit par restriction un isomorphisme d'algèbres ξ^α_η rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{F_1}^{\alpha,r} & \xrightarrow{j_{F_1}^{\alpha,r}} & \mathcal{H}^r_{F_1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi^r_\eta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \zeta^r_\eta} \\ \mathcal{A}_{F_2}^{\alpha,r} & \xrightarrow{j_{F_2}^{\alpha,r}} & \mathcal{H}^r_{F_2} \end{array}$$

On conclut grâce à la proposition A.3.1. ■

Références

[A] J. Arthur, *On the Fourier transforms of weighted orbital integrals.* J. Reine Angew. Math. **452**(1994), 163–217.

[BD] I. Bernstein et P. Deligne, *Le "centre" de Bernstein.* Dans: Représentations des groupes réductifs sur un coprs local. Hermann, Paris, 1984, pp. 33–117.

[B] C. Bushnell, *Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke algebras and applications.* J. London Math. Soc. (2) **63**(2001), no. 2, 364–386.

[BH1] C. Bushnell et G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondance. I.* J. Amer. Math. Soc. **18**(2005), no. 3, 685–710.

[BH2] C. Bushnell et G. Henniart, *The essentially tame local Langlands correspondance. II.* Comp. Math. **141**(2005), 979–1011.

[BK] C. Bushnell et P. Kutzko, *The admissible dual of GL(N) via open compact subgroups.* Annals of Mathematical Studies 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[D] P. Deligne, *Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique* 0. Dans: Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984, pp. 119–157.

[Ha] T. Hales, *Unipotent representations and unipotent classes in SL(n).* Amer. J. Math. **115**(1993), no. 6, 1347–1384.

[Ho] R. Howe, *Harish-Chandra homomorphism for p-adic groups.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 59, American Mathematical Society, Providence, RI, 1985.

[HC1] Harish-Chandra, *Harmonic Analysis on Reductive p-Adic Groups.* Lecture Notes in Mathematics 162, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[HC2] ———, *Harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Dans: Harmonic analysis on homogeneous spaces, American Mathematical Society, Providence, RI, 1972, pp. 167–192.

[HC3] ———, *A submersion principle and its applications.* Dans: Geometry and Analysis, Indian Academy of Sciences, Bangalore, 1990, pp. 95-102.

[HH] G. Henniart et R. Herb, *Automorphic induction for GL(n)(over local non-archimedean fields).* Duke Math. J. **78**(1995), no. 1, 131–192.

[HL1] G Henniart et B. Lemaire, *Existence de pseudo-coefficients pour les caractères tordus des séries κ-discrètes de $GL(n, F)$.*, manuscrit.

[HL2] ———, *Sur l'induction automorphe I: formules de caractères*, en préparation.

[HL3] ———, *Le lemme fondamental pour l'induction automorphe en caractéristique nulle*, en préparation.

[L1] B. Lemaire, *Intégrales orbitales sur $GL(n)$ et corps locaux proches.* Ann. Institut Fourier **46**(1996), no. 4, 1027–1056.

[L2] B. Lemaire, *Intégrales orbitales sur $GL(n,F)$ où F est un corps local non archimédien.* Mém. Soc. Math. France 70, 1997.

[L3] B. Lemaire, *Représentations génériques de GL_n et corps locaux proches.* J. Algebra **236**(2001), no. 2, 549–574.

[L4] B. Lemaire, *Intégrabilité locale des caractères de $SL_n(D)$*, to appear in Pacific J. Math.

[S] J.-P. Serre, *Corps locaux.* (Troisième édition, corrigée), Hermann, Paris, 1968.

[W] J.-L. Waldspurger, *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires: un lemme fondamental.* J. Canad. Math. **43**(1991), no. 4, 852–896.

Département de Mathématiques et
UMR 8628 du CNRS
Université de Paris-Sud
bât. 425
91405 Orsay cedex
France
e-mail: Guy.Henniart@math.u-psud.fr
Bertrand.Lemaire@math.u-psud.fr