Canad. Math. Bull. Vol. **30** (2), 1987

SUR LA CONVERGENCE PONCTUELLE DE QUELQUES SUITES D'OPERATEURS

PAR

I. ASSANI

ABSTRACT. Let $(\alpha_{n,K})$ be a sequence of positive numbers. We define a regular sequence (resp. a weakly regular sequence) and then show the existence of a unitary operator (resp. a contraction T) $L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ and a function $f \in L^2[0,1]$ such that the pointwise convergence of the sequence of functions $R_n(T)f = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} T^K f$ is not satisfied almost surely. As a first corollary the pointwise convergence of the Abel means of a contraction from L^2 into L^2 does not hold necessarily almost surely. As a second corollary there exists a contraction T for which the means (and powers) of Brunel's operator A do not converge pointwise a.s. We also show that, for $p > 1$ fixed, there exists a sequence of positive numbers $\alpha_{n,K}$ for which we have the pointwise convergence in L^p of the sequence of polynomials $V_n(T) = \sum_{K=0}^{n-1} \alpha_{n,K} T^K$ where T is a contraction of L^1 and L^∞. The dominated theorem does not, however, always hold for such L^p-contractions.

Introduction. Soient $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ les espaces de Banach usuels associés à un espace mesuré fini ou σ-fini $(X, \mathcal{F}, \mu)$, p étant un nombre réel compris entre 1 et l'infini $(1 \leq p \leq +\infty)$.

Soit $T: L^p \to L^p$ un opérateur. Nous dirons que T est à puissances bornées sur L^p (resp. à moyennes de Césaro bornées) si

$$\sup_{n \geq 0} \|T^n\|_p < +\infty \left(\text{resp. } \sup_{n \geq 1} \|M_n(T)\|_p < +\infty \text{ avec } M_n(T) = \frac{I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}}{n}\right).$$

La convergence presque sûre de la suite de fonctions $M_n(T)f$ a été étudiée dans L^2 pour T contraction, [4] et pour T inversible à puissances bornées dans $L^p[0,2]$, $1 < p \leq 2$, [6]. Il est obtenu dans ces articles à partir d'un résultat de [9], un opérateur T et une fonction f telle que $M_n(T)f$ ne converge pas ponctuellement presque sûrement. Considérons pour $0 < K < 1$ les expressions $(1 - K) \sum_{n=0}^{+\infty} K^n T^n$ appelées moyennes d'Abel de T. L'exemple de l'opérateur

Reçu par la rédaction le 3 décembre 1984 et sous une forme revisée le 24 février 1986.
AMS Subject Classification (1980): 47A35.

$$T = \begin{pmatrix} (-1) & 2 \\ 0 & (-1) \end{pmatrix}$$

à moyennes de Césaro bornées sur $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $X = \{1, 2\}$, $\mu\{1\} = \mu\{2\} = 1$, montre que les moyennes d'Abel peuvent converger fortement ou presque sûrement lorsque K tend vers 1 alors que les moyennes de Césaro divergent. Il semble donc intéressant de savoir si les moyennes d'Abel convergent ponctuellement dans les situations envisagées plus haut. Nous montrons dans une première partie que ce n'est pas le cas pour les contractions de $L^2[0, 1]$.

Dans une deuxième partie nous nous intéressons à la validité du théorème dominé et du théorème ponctuel dans L^p $(+\infty > p > 1)$ lorsque T est une contraction de L^1 et L^∞ pour des suites de polynômes barycentriques

$$W_n(T) = \sum_{K=0}^{n-1} \alpha_{n,K} T^K \quad \text{où} \quad \alpha_{n,K} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{K=0}^{n-1} \alpha_{n,K} = 1$$

pour tout n. Plus précisément partant d'une suite de nombres $(\alpha_n)_n$; $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots > 0$ considérons les opérateurs

$$V_n(T) = \frac{1}{S_n}\left(\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i T^i + \alpha_0 T^{n-1}\right)$$

avec $S_n = \Sigma_{i=0}^{n-2} \alpha_i$. Pour p fixé $p > 1$ en prenant

$$\alpha_i = \frac{1}{(i+1)^{1/q}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

on montre que $\forall r \geq p$, $\forall f \in L^r$, $V_n(T)f$ convergent presque sûrement vers une fonction de L^r lorsque T est une contraction de L^1 et L^∞. Pour $r = p$ on obtient une inégalité maximale de type faible (p, p). Il existe une transformation inversible qui préserve la mesure et une fonction f de L^p telle que $\sup_n V_n(T)f$ n'appartient pas à L^p. La structure d'espaces réflexifs se relève donc insuffisante pour assurer dans L^p la validité du théorème dominé bien que la convergence ponctuelle ait lieu.

1. On se propose de montrer ici que les moyennes d'Abel d'une contraction ne convergent pas, en général, ponctuellement presque sûrement. Nous nous appuyons sur un lemme [1] qui modifie une idée de [4]. Nous nous plaçons tout d'abord dans un cadre plus général et obtiendrons le résultat annoncé comme corollaire.

DÉFINITION 1. Soit $(\alpha_{n,K})$, $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Nous dirons que la suite est régulière si elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} = 1$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, $\left|\sum_{K=0}^{\infty} \alpha_{n,K} z^K\right| \underset{n}{\rightarrow} 0$.

3) $\forall n$, les séries $\sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} z^K$ ont un rayon de convergence $r_n > 1$.

DÉFINITION 2. Soit $(\alpha_{n,K})$, $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls. Nous dirons que la suite est faiblement régulière si elle vérifie les conditions suivantes :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} = 1$

2) $\forall r \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqq r < 1 \quad \sum_{K=0}^{\infty} \alpha_{n,K} r^K \underset{n}{\rightarrow} 0.$

Il est clair qu'une suite régulière est faiblement régulière. Donnons deux exemples de suite faiblement régulière et non régulière.

EXEMPLE 1. On considère une suite $\alpha_{1,K} \geqq 0$ tels que $\Sigma_{K=0}^{+\infty} \alpha_{1,K} = 1$ et la série entière $S(x) = \Sigma_{K=0}^{+\infty} \alpha_{1,K} x^K$ a un rayon de convergence 1. On définit $S_n(x) = [S(x)]^n = \Sigma_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} x^K$. La suite $(\alpha_{n,K})$ est faiblement régulière. L'opérateur de Brunel A associé à T vérifie ces conditions. Les puissances de cet opérateur sont données par les coefficients des puissances de la série entière définie par

$$S(x) = \frac{1}{x}(1 - \sqrt{1 - x}) = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{1,K} x^K$$

(voir [3]).

EXEMPLE 2. Cet exemple montre que généralement pour une suite faiblement régulière $(\alpha_{n,K})$ la condition 2 de la définition 1 n'est pas vérifiée.

Notons pour chaque n, S_n la somme de la série de terme général $1/((n + K)^2)$ et posons

$$\beta_{n,K} = \frac{1}{S_n(n + K)^2} \quad \text{on a bien} \quad \sum_{K=0}^{+\infty} \beta_{n,K} = 1, \quad \forall n.$$

Définissons maintenant $\alpha_{n,K}$ de la façon suivante

$$\alpha_{n,4K} = \beta_{n,K} \quad \text{et} \quad \alpha_{n,4K+1} = \alpha_{n,4K+2} = \alpha_{n,4K+3} = 0.$$

On a

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} r^K = \sum_{K=0}^{+\infty} \beta_{n,K} r^{4K} < \frac{1}{S_n \times n^2} \sum_{K=0}^{+\infty} r^{4K} = \frac{1}{S_n \times n^2} \frac{1}{(1 - r^4)} \underset{n}{\rightarrow} 0$$

pour $0 \leqq r < 1$.

Si l'on prend $\lambda = i$ on a

$$\sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} i^K = \sum_{K=0}^{+\infty} \beta_{n,K} = 1 \ \forall n \quad \text{et donc} \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} i^K \underset{n}{\not\rightarrow} 0$$

La proposition suivante se démontre de manière analogue à celle utilisée dans [1]. Dans le cas réel on prend une suite strictement croissante de nombres réels $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-020-7 Published online by Cambridge University Press

$< \ldots < 1$ et on utilise la continuité à gauche de 1 des fonctions

$$t \to R_n(T) = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} t^K.$$

PROPOSITION 3. *Considérons $L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$), une base orthonormale $\phi_n, n \geqq 1$, Q_n la projection sur le sous espace engendré par $\{\phi_{n+1}, \phi_{n+2}, \ldots\}$. Soit $(\alpha_{n,K})$ une suite régulière de nombres positifs, (resp. faiblement régulière), posons $z \in \mathbb{C}$, $|z| < r_n$ (resp. $0 \leqq t < 1$)*

$$R_n(z) = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} z^K \left(resp.\ R_n(t) = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} t^K\right).$$

Si (ϵ_j) est une suite de nombres réels positifs, il existe un opérateur unitaire T (resp. une contraction T) et une suite croissante d'entiers $(n_j)_{j \geqq 1}$ tels que $\|R_{n_j}(T) - Q_j\| < \epsilon_j$, pour tout j.

THÉORÈME 4. *Soit $(\alpha_{n,K})$ une suite régulière (resp. faiblement régulière) de nombres réels positifs.*

Il existe sur $L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$) un opérateur unitaire T (resp. une contraction T) et une fonction f de $L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$) tels que la suite de fonctions

$$R_n(T)f = \sum_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} T^K f$$

ne converge pas ponctuellement presque sûrement.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le résultat de Menchoff [9]. Il existe une base orthonormale ϕ_n et une fonction f telle que $Q_n f$ ne diverge presque sûrement. Prenons une suite ϵ_j telle que $\Sigma\, \epsilon_j < +\infty$ et appliquons la proposition 3. La suite $R_{n_j}(T)f$ diverge presque sûrement.

PROPOSITION 5.

1) Il existe un opérateur unitaire $T: L^2_{\mathbb{C}}[0,1] \to L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ et une fonction $f \in L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ tels que les moyennes d'Abel $(1 - K)\, \Sigma_{n=0}^{\infty} K^n T^n f$ divergent lorsque K tend vers 1.

2) Il existe aussi un opérateur unitaire T de $L^2_{\mathbb{R}}[0,1] \to L^2_{\mathbb{R}}[0,1]$ et une fonction f tels que les puissances (les moyennes) de l'opérateur de Brunel A associé à T ne convergent pas ponctuellement presque sûrement.

DÉMONSTRATION.

1) On applique le théorème précédent en prenant

$$R_n(T) = \frac{1}{n}\left(\sum_{K=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^K T^K\right)$$

moyennes d'Abel pour la valeur $(1 - 1/n)$ provenant de la suite régulière $\alpha_{n,K} = 1/n(1 - 1/n)^K$.

2) Une simple application du théorème 4 nous donne l'existence d'une contraction T ayant la propriété annoncée. On peut néanmoins obtenir plus de la façon suivante.

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-020-7 Published online by Cambridge University Press

Remarquons tout d'abord que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$ du fait que $\alpha_{1,K} > 0$, pour tout K, on a $|S(\lambda)| < 1$ et donc

$$|S_n(\lambda)| = |(S(\lambda))^n| \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

On peut donc obtenir dans $L^2_{\mathbb{C}}$ un opérateur unitaire ayant la propriété annoncée. Le passage de $L^2_{\mathbb{C}}$ à $L^2_{\mathbb{R}}$ peut se faire par les arguments de [6] Corollaire 1.

II. Dans cette partie nous proposons de montrer que la structure réflexive des espaces L^p n'est pas suffisante pour assurer à la fois la validité de la convergence ponctuelle et celle du théorème dominé pour certains opérateurs barycentriques (positifs). Pour la suite p sera un nombre fixé strictement supérieur à 1.

On note $\mathscr{C}$ une famille d'opérateurs bornés définis sur un espace $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ étant un espace mesuré fini ou σ-fini quelconque.

DÉFINITION II.1. Soit $(\alpha_{n,K})$ une suite de nombres positifs ou nuls tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\Sigma_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} = 1$. Nous dirons que la suite $(\alpha_{n,K})$ est p-universelle. (resp. p-ergodique) pour la famille d'opérateurs $\mathscr{C}$ si $\forall T \in \mathscr{C}$ il existe $\gamma(T) > 0$ tel que

$$\|\sup_n\| V_n(T)f\|_p \leq \gamma(T)\|f\|_p$$

(resp. $\forall f \in L^p$, $V_n(T)f$ converge presque sûrement) où l'on a posé

$$V_n(T)f = \Sigma_{K=0}^{+\infty} \alpha_{n,K} T^K f.$$

Nous nous proposons de montrer qu'il existe quelque soit $p > 1$ une suite de nombres $(\alpha_{n,K})$ qui est p-ergodique et non p-universelle pour la famille des contractions de L^1 et L^∞. Soit (a_i) une suite de nombres $1 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$. Pour la suite nous posons

$$V_n(T) = \frac{1}{s_n}\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i T^i + a_0 T^{n-1}\right) \quad \text{avec} \quad s_n = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i.$$

Il suffit de considérer des contractions positives pour la p-ergodicité en utilisant par exemple la méthode de [5] qui permet de dominer un opérateur de ce type par un opérateur du même type mais positif.

PROPOSITION II.2. *Soit T un opérateur à puissances bornées sur $L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ (i.e. $\sup_n \|T^n\|_p \leq M < +\infty$). Alors la suite $V_n(T)$ converge fortement vers un opérateur P invariant par T si*

$$s_n \underset{n}{\rightarrow} +\infty \quad et \quad \frac{a_{n-2}}{s_n} \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

DÉMONSTRATION. Il est bien connu qu'on a une décomposition de l'espace L^p. On a $L^p = \text{Inv}\, T \oplus \overline{(I - T)(L^p)}$. Puisque $V_n(T)$ laisse $\text{Inv}\, T$ stable, la seule chose à montrer est que

$$\|V_n(T)(I - T)g\| \underset{n}{\rightarrow} 0 \qquad \forall g \in L^p$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-020-7 Published online by Cambridge University Press

Or

$$V_n(T)(I - T)g = \frac{1}{s_n}\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_iT^i + a_0T^{n-1}\right)(I - T)g$$

$$= \frac{1}{s_n}\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i(T^i - T^{i+1})g + a_0(T^{n-1} - T^n)g\right)$$

$$\|V_n(T)(I - T)g\| \leq \frac{1}{s_n} \sup_i \|T^ig\| \left[\left(\sum_{i=1}^{n-2} (a_i - a_{i-1}) + a_1\right) + 2a_0\right]$$

$$\leq \frac{M}{s_n}\|g\|(a_{n-2} + 2a_0) \underset{n}{\rightarrow} 0. \qquad \square$$

PROPOSITION II.3. *Soit T un opérateur positif sur $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $p > 1$ et (a_i) une suite de nombres réels positifs tels que $1 = a_0 \geq a_1 \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$. Alors on a les implications (ii) $\Rightarrow$ (i) (resp. (ii′) $\Rightarrow$ (i′)).*

(i) $\forall f \in L^p, \qquad \sup_n V_n(T)f < +\infty$ p.s.

(ii) $\forall f \in L^p, \qquad \sup_n M_n(T)f < +\infty$ p.s. *et* $\sup_n \frac{T^{n-1}f}{s_n} < +\infty$ p.s.

(i′) $\forall f \in L^p, \qquad \sup_n V_n(T)f \in L^p$

(ii′) $\forall f \in L^p, \qquad \sup_n M_n(T)f \in L^p$ *et* $\sup_n \frac{T^{n-1}f}{s_n} \in L^p$

Pour la suite

$$a_i = \frac{1}{(i+1)^{1/q}} \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors i) $\Leftrightarrow$ (ii) (resp. (I′) $\Leftrightarrow$ (ii′)).

DÉMONSTRATION. T étant supposé positif il suffit de prendre f positif.

$$V_n(T)f = \frac{1}{s_n}[-a_1f + 2M_2(T)f(a_1 - a_2) + 3M_3(T)f(a_2 - a_3)$$
$$+ \ldots + (n-2)M_{n-2}(T)f(a_{n-3} - a_{n-2}) + a_{n-2}(n-1)M_{n-1}(T)f]$$
$$+ a_0\frac{T^{n-1}f}{s_n} \leq \frac{1}{s_n}[a_1 + 2(a_1 - a_2) + 3(a_2 - a_3) + \ldots + (n-2)$$
$$\times (a_{n-3} - a_{n-2}) + (n-1)a_{n-2}] \sup_{n\geq 1} M_n(T)f + a_0 \sup_{n \geq 1} \frac{T^{n-1}f}{s_n}$$
$$\leq \left(\frac{2a_1}{s_n} + 1\right) \sup_{n\geq 1} M_n(T)f + a_0 \sup_{n\geq 1}\frac{T^{n-1}f}{s_n} \quad \text{p.s.}$$

d'où

$$\sup_{n>1} V_n(T)f \leq 2 \sup_{n\geq 1} M_n(T)f + a_0 \sup_{n\geq 1} \frac{T^{n-1}f}{s_n}.$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1987-020-7 Published online by Cambridge University Press

On a donc les implications $(ii) \Rightarrow (i)$ et $(ii') \Rightarrow (i')$. Dans le cas de la suite $a_i = 1/(i+1)^{1/q})$ on remarque qu'il existe une constante K telle que pour tout n, $M_n(T)f \leqq KV_n(T)f + f/n$ p.s. Il en résulte les équivalences annoncées.

THÉORÈME II.4. *La suite $a_i = 1/((i+1)^{1/q})$ est p-ergodique mais non p-universelle pour la famille des contractions de L^1 et L^∞.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier la p-ergodicité pour des contractions positives de L^1 et L^∞. D'après [5, lemme VIII.6.5] on sait que $\sup_n M_n(T)f < +\infty$ p.s. D'après un résultat de [2] on a $(T^{n-1}f)/(n^{1/p}) \to 0$ p.s. Donc d'après la proposition précédente $\sup_n V_n(T)f < +\infty$ p.s. Il suffit de vérifier pour conclure, d'après [5, théorème IV.11.2], à la p-ergodicité que la convergence a lieu sur une partie dense. Ceci se vérifie simplement en considérant l'espace dense Inv $T + (I - T)(L^\infty)$. La suite n'est pas p-universelle car d'après [2] il existe une transformation qu préserve la mesure pour laquelle on a $\forall p > 1$, $\exists f \in L^p$ telle que $\sup_n (T^{n-1}f)/(n^{1/p}) \notin L^p$ et donc d'après la proposition précédente $\sup V_n(T)f \notin L^p$.

PROPOSITION II.5. *La suite $V_n(T)$ pour $a_i = 1/((i+1)^{1/q})$ et T contraction de L^1 et L^∞ vérifie une inégalité maximale de type faible (p,p). De plus $\forall p' > p$, $\forall f \in L^{p'}$, $\sup_n V_n(T) \in L^{p'}$ et $V_n(T)f$ converge ponctuellement presque sûrement.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer T positif et prendre donc $f \geq 0$.

$$\mu\{\omega;\ \sup_n V_n(T)f > \lambda\} \leq \mu\left\{\omega;\ \sup_n M_n(T)f \geq \frac{\lambda}{4}\right\} + \mu\left\{\omega;\ \sup_n \frac{T^{n-1}f}{s_n} \geq \frac{\lambda}{2}\right\}$$

Du théorème ergodique dominé [5, théorème VIII.6.8] (par exemple) et du lemme de Hopf [5, Lemme VIII.6.3] on a

$$\mu\{\omega;\ \sup_n V_n(T)f > \lambda\} \leq K'\left(\frac{p}{p-1}\right)^p + \frac{1}{(\lambda/4)^p}\|f\|_p^p + \frac{K''}{(\lambda/2)^p}\|f\|_p^p \leq \frac{C}{\lambda^p}\|f\|_p^p,$$

où $\boldsymbol{K}', \boldsymbol{K}''$ et C sont des constantes appropriées. On déduit du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz [8] (l'inégalité étant aussi de type fort (∞,∞)) que le théorème ergodique dominé (inégalité maximale de type fort (p',p')) est vrai dans $L^{p'}$ pour tout p' $p < p' < +\infty$. En montrant la convergence sur une partie dense (Inv $T + (I - T)(L^\infty)$) comme dans la démonstration du théorème II.4, on en déduit la convergence ponctuelle presque sûre.

REMARQUE. Dans [7] il est étudié la convergence des moyennes de Césaro d'ordre α. Un exemple est donné qui montre que les moyennes de Césaro d'ordre $1/p$ ne vérifie pas une inégalité maximale de type faible (p,p) pour une transformation qui préserve la mesure.

REFERENCES

1. M. A. Akcoglu, *Pointwise ergodic theorems in L_p spaces*, Proc. Conf. Ergodic theory (Oberwolfach 1978). Lecture Notes in Math. n° 729, pp. 13–15, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1979.

2. I. Assani and R. Mesiar, *Sur la convergence ponctuelle de* T^n/n^α, A paraître dans les annales de Clermont-Ferrand n° 3.

3. A. Brunel, *Théorème ergodique ponctuel pour un semi-groupe commutatif finiment engendré, la contractions de* L^1, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect. B, vol. 9, n° 4 (1973), pp. 327–343.

4. D. L. Burkholder, *Semi-Gaussian subspaces*, Trans. A.M.S. **104** (1962), pp. 123–131.

5. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, vol. 1, Interscience Publishers, New York, 1958.

6. M. Feder, *On power-bounded operators and the pointwise ergodic property*, Proc. A.M.S. vol. 83, n° 2, pp. 349–353, Octobre 1981.

7. R. Irmisch, *Punktweise ergodensätze für* (C,α)*-Verfahren* $0 < \alpha < 1$, (Thèse), Vom Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt, 1980.

8. J. Marcinkiewicz, *Sur l'interpolation d'opérations*, C.R.A.S. Paris A, **208** (1939), p. 1271.

9. D. Menchoff, *Sur les séries de fonctions orthogonales*, Fund. Math. **4** (1923), pp. 82–105.

Department of Mathematics
University of Toronto
Toronto, Ont. M5S 1A1