Compositio Mathematica **110:** 39–49, 1998.

Loi des grands nombres pour des sommes de Riesz–Raikov multidimensionnelles

EMMANUEL LESIGNE
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Université François Rabelais, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France; e-mail: lesigne@univ-tours.fr

Received 11 September 1996; accepted in final form 17 September 1996

Abstract. Let A and x be $d \times d$ and $d \times 1$ real matrices. We study the asymptotic distribution of the sequence $((A^n x)\mathrm{mod}.\mathbb{Z}^d)$ in the torus $\mathbb{T}^d$. We prove that for any A, for almost all x, this distribution exists; we characterize the case where this distribution is uniform; we give a description of the non uniform case. Finally we ask a question on the asymptotic distribution modulo 1 of the coefficients of the sequence of powers (A^n).

Mathematics Subject Classification (1991): 11K.

Key words: distribution modulo 1, uniform distribution, multidimensional distribution, Weyl criteria, Koksma metric theorem.

Introduction

Il est bien connu, depuis les travaux de H. Weyl et J. F. Koksma, que si a est un nombre réel strictement plus grand que 1, alors pour presque tout nombre réel x (au sens de la mesure de Lebesgue), la suite $(a^n x)_{n \geqslant 0}$ est équidistribuée modulo 1. Autrement dit, pour presque tout x, pour toute fonction réelle 1-périodique et continue définie sur $\mathbb{R}$, la suite des moyennes de Riesz–Raïkov

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{n<N} f(a^n x) \right) \tag{1}$$

converge vers l'intégrale de la fonction f entre 0 et 1.

Ce résultat est exposé dans les ouvrages classiques sur la distribution modulo 1, comme [7] ou [9]. Des propriétés plus fines sur la distribution des sommes de Riesz–Raïkov ont été récemment étudiées par J. Bourgain ([2]), B. Petit ([8]) et K. Fukuyama ([5]). Nous nous intéressons dans cet article à la situation correspondante en dimension supérieure à 1.

Nous notons d un nombre entier strictement positif, et les éléments de l'espace $\mathbb{R}^d$ sont représentés par des vecteurs colonnes. Le tore $\mathbb{T}^d$ est le quotient $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, et si $x \in \mathbb{R}^d$ nous notons $\{x\} := x + \mathbb{Z}^d \in \mathbb{T}^d$.

Rappelons la définition classique de la notion de distribution asymptotique.

DÉFINITION. Soient $s = (s_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans un espace topologique localement compact T, et μ une mesure de probabilité régulière sur T. La suite s admet μ comme distribution asymptotique si, pour toute fonction continue bornée f,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} f(s_n) = \int_T f(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

(Autrement dit, la suite de probabilités $(1/N)\Sigma_{n<N}\delta_{s_n}$ converge étroitement vers μ) Si T est un groupe compact et μ sa probabilité de Haar on dit que la suite s est équidistribuée dans T.

1. Présentation des résultats

THÉORÈME 1. *Soit A une matrice réelle (d,d). Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $(\{A^n x\})_{n\geqslant 0}$ possède une distribution asymptotique dans le tore $\mathbb{T}^d$.*

Génériquement (pour le choix de la matrice A), deux situations peuvent se présenter:

- si le rayon spectral de la matrice A est strictement inférieur à 1, on a bien sûr, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\quad \lim_{n\to\infty} A^n x = 0$;
- si la matrice A possède un vecteur propre associé à une valeur propre de module > 1 et dont les composantes sont rationnellement indépendantes, alors, pour presque tout x, la suite $(\{A^n x\})_{n\geqslant 0}$ est équidistribuée dans le tore $\mathbb{T}^d$.

Dans la Section 3, on décrit la distribution asymptotique de la suite $(\{A^n x\})$. En particulier, on caractérise les matrices A telles que, pour presque tout x, cette suite soit équidistribuée. Comme on vient de l'affirmer c'est généralement le cas quand le rayon spectral de A est > 1; c'est également le cas (en général) quand A possède une valeur propre de module 1 et que le sous-espace caractéristique associé ne coïncide pas avec le sous-espace propre (autrement dit, il y a un bloc de Jordan non trivial associé à une valeur propre de module 1).

Remarque. Si la matrice A est à coefficients entiers, le Théorème 1 est une version du théorème ergodique de Birkhoff. Par contre, dans le cas général d'une matrice réelle, il est différent de considérer la suite $(\{A^n x\})$ ou la suite des images de x sous les itérés de la transformation $y \mapsto Ay + \mathbb{Z}^d$.

2. Existence de la distribution asymptotique

L'objet de ce paragraphe est de donner une démonstration du Théorème 1. Pour tout nombre réel t, nous noterons $e(t) := \exp(2i\pi t)$. On considère une matrice A fixée.

PROPOSITION 1. *Soit* $u \in \mathbb{R}^d$, *tel que la suite* $({}^t A^n u)_{n \geqslant 0}$ *soit non bornée dans* $\mathbb{R}^d$. *Pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e({}^t u A^n x) = 0.$$

La démonstration de cette proposition est basée sur des estimations du même type que celles utilisées par Koksma dans [6] et sur le lemme suivant.

LEMME 1. *Soit* $u \in \mathbb{R}^d$, *tel que la suite* $(A^n u)_{n \geqslant 0}$ *soit non bornée dans* $\mathbb{R}^d$. *Il existe une constante* $c > 0$ *et un nombre entier* $p \geqslant 0$ *tels que, si* $0 \leqslant m \leqslant n - p$, *alors*

$$\| A^n u - A^m u \| \geqslant c(n-m).$$

Preuve du Lemme 1. On peut écrire $A = P^{-1} B P$ où P est une matrice complexe inversible et B une matrice de Jordan. En utilisant une norme adaptée à la structure d'algèbre de l'espace des matrices, on a

$$\| B^n P u \| \geqslant \| P^{-1} \|^{-1} \| A^n u \|,$$

et

$$\| A^n u - A^m u \| \geqslant \| P \|^{-1} \| B^n P u - B^m P u \| .$$

Il nous suffit donc de démontrer que si B est une matrice de Jordan et si v est un vecteur colonne tels que la suite $(B^n v)$ soit non bornée, alors il existe c et p tels que, pour $0 \leqslant m \leqslant n - p$,

$$\Big| \| B^n v \| - \| B^m v \| \Big| \geqslant c\, |n-m| .$$

Les puissances d'une matrice de Jordan sont faciles à décrire. Le fait que la suite $(B^n v)$ soit non bornée peut venir de la présence de valeurs propres de module > 1 ou de blocs de Jordan non triviaux associés à des valeurs propres de module 1. En notant $a_n := \| B^n v \|$ on voit ainsi que l'on est nécessairement dans un des deux cas suivants:

1^er^ cas: à une constante multiplicative près, il existe un nombre réel $\rho > 1$ et un nombre entier $k \geqslant 0$ tels que

$$a_n \sim n^k \rho^n \text{ quand } n \to \infty.$$

2^nd^ cas: à une constante multiplicative près, il existe un nombre entier $k > 0$ tel que

$$a_n = n^k + O(n^{k-1}).$$

Étude du premier cas.

Soit $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$n < n^k \rho^{n-1/4} < a_n < n^k \rho^{n+1/4}.$$

Soient $b := \max\{u_k \mid 0 \leqslant k \leqslant n_0\}$ et n_1 entier tel que $n_1 \geqslant n_0$ et $[n \geqslant n_1 \Rightarrow a_n > 2b]$.

On a alors, pour tout $n \geqslant n_1$:
si $n_0 \leqslant m < n$,

$$\begin{aligned} a_n - a_m > n^k \rho^{n-1/4} - m^k \rho^{m+1/4} &\geqslant \rho^{n-1/4} - \rho^{m+1/4} \geqslant \rho^{n-m-1/2} - 1 \\ &\geqslant (n - m - \tfrac{1}{2})\ln(\rho) \geqslant \tfrac{1}{2}(n-m)\ln(\rho); \end{aligned}$$

si $m \leqslant n_0$,

$$a_n - a_m \geqslant a_n - b > \tfrac{1}{2}a_n > \tfrac{1}{2}n > \tfrac{1}{2}(n-m).$$

Ainsi, pour tout n assez grand et pour tout $m \leqslant n, a_n - a_m > c(n-m)$.

Étude du second cas. Il existe une constante b telle que, pour tout $n > 0$, $| a_n - n^k | < bn^{k-1}$.
Si $0 \leqslant m < n$, on a

$$\begin{aligned} a_n - a_m &\geqslant n^k - m^k - bn^{k-1} - bm^{k-1} \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}(n-m)(n^{k-1} + m^{k-1}) - b(n^{k-1} + m^{k-1}) \geqslant \tfrac{1}{2}(n-m) - b. \end{aligned}$$

Si $n - m > 4b$, alors $a_n - a_m > \frac{1}{4}(n-m)$.

Le Lemme 1 est démontré.

Preuve de la Proposition 1. Par hypothèse, la suite $({}^tA^n u)$ est non bornée. Suivant un théorème métrique classique en théorie de l'équidistribution (cf. [3], [9] III. 3, ou [7] I.4), il suffit, pour démontrer la Proposition 1, de prouver que, pour tous nombres a et b tels que $a < b$,

$$\sum_{N>0} \frac{1}{N^3} \int_{[a,b]^d} \left| \sum_{n<N} e({}^t u A^n x) \right|^2 \mathrm{d}x < \infty. \tag{2}$$

On a

$$\begin{aligned} &\int_{[a,b]^d} \left| \sum_{n<N} e({}^t u A^n x) \right|^2 \mathrm{d}x \\ &\quad = (b-a)^d N + 2\,\mathrm{Re} \sum_{0 \leqslant m < n < N} \int_{[a,b]^d} e({}^t u (A^n - A^m) x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3}$$

En notant ${}^t u(A^n - A^m) = (v^1_{n,m}, v^2_{n,m}, \dots, v^d_{n,m})$, on a

$$\left| \int_{[a,b]^d} e({}^t u(A^n - A^m)x)\,\mathrm{d}x \right| = \prod_{j=1}^{d} \int_a^b e(v^j_{n,m} x_j)\,\mathrm{d}x_j$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{e(v^j_{n,m} b) - e(v^j_{n,m} a)}{2\pi v^j_{n,m}} \right|.$$

D'où

$$\left| \int_{[a,b]^d} e({}^t u(A^n - A^m)x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant (b-a)^{d-1} \min\left\{ \frac{1}{\pi |v^j_{n,m}|} \mid 1 \leqslant j \leqslant d \right\}.$$

Or, d'après le Lemme 1, il existe $c > 0$ et $p > 0$ tels que, si $0 \leqslant m \leqslant n-p$,

$$\| {}^t u(A^n - A^m) \| \geqslant c(n-m).$$

Il existe donc une constante $c' > 0$ telle que, si $0 \leqslant m \leqslant n-p$, alors

$$\min\left\{ \frac{1}{|v^j_{n,m}|} \mid 1 \leqslant j \leqslant d \right\} \leqslant c' \frac{1}{(n-m)}.$$

On a

$$2 \operatorname{Re} \sum_{0 \leqslant m < n < N} \int_{[a,b]^d} e({}^t u(A^n - A^m)x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2p(b-a)^d N + 2 \left| \sum_{0 \leqslant m \leqslant n-p} \int_{[a,b]^d} e({}^t u(A^n - A^m)x)\,\mathrm{d}x \right|.$$

Revenant à (3), on obtient, grâce aux inégalités précédentes,

$$\int_{[a,b]^d} \left| \sum_{n<N} e({}^t u A^n x) \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant (2p+1)(b-a)^d N + \frac{2c'}{\pi}(b-a)^{d-1} \sum_{0 \leqslant m < n < N} \frac{1}{n-m}$$

$$\leqslant (2p+1)(b-a)^d N + \frac{2c'}{\pi}(b-a)^{d-1} N \ln N.$$

Cette majoration assure la condition (2) et la Proposition 1 est démontrée.

https://doi.org/10.1023/A:1000281522303 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2. *Soit B une matrice carrée complexe (d, d). Si la suite $(B^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, elle possède une distribution asymptotique dans l'espace des matrices.*

Preuve de la Proposition 2. On peut écrire $B = P^{-1}CP$ où P est une matrice inversible et C une matrice de Jordan. Si la suite (B^n) est non bornée alors la suite (C^n) est non bornée et si la suite (C^n) possède une distribution asymptotique, alors la suite (B^n) en possède aussi une, car l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue sur l'espace des matrices. Il nous suffit donc de considérer le cas où B est une matrice de Jordan. Si ses puissances forment une suite bornée cette matrice est nécessairement de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

où B_1 est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $(e(\theta_1), e(\theta_2), \ldots, e(\theta_p))$ sont de module 1, et où la matrice de Jordan B_2 n'a que des valeurs propres de module < 1.

Les puissances de la matrice B_2 forment une suite convergente vers zéro.

Il est bien connu que si T est une translation du tore $\mathbb{T}^p$, alors la suite $(T^n(0))$ est équidistribuée dans un sous-groupe du tore. On en déduit que la suite des puissances de la matrice B_1 possède une distribution asymptotique.

La suite (B^n) est asymptotiquement distribuée comme la suite

$$\begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

COROLLAIRE 1. *Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Si la suite $({}^tA^n u)_{n\geqslant 0}$ est bornée dans $\mathbb{R}^d$, elle possède une distribution asymptotique dans $\mathbb{R}^d$.*

En effet, si la suite $({}^tA^n u)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors le vecteur u est contenu dans la somme directe des sous-espaces propres de ${}^tA$ associés aux valeurs propres de module 1 et des sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module < 1. Cette somme directe est un sous-espace stable par ${}^tA$. Il existe une matrice B dont les puissances forment une suite bornée et telle que, pour tout $n \geqslant 0$, ${}^tA^n u = B^n u$. On conclut alors grâce à la Proposition 2.

Preuve du Théorème 1. De la Proposition 1 et du Corollaire précédent, on déduit que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} e({}^tuA^n x)\right)_{N>0}$$

est convergente. Grâce à un argument de dénombrabilité, ceci implique que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $u \in \mathbb{Z}^d$, cette suite est convergente. En utilisant l'argument d'approximation uniforme du critère de Weyl, on conclut que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour toute fonction continue f sur le tore $\mathbb{T}^d$, la suite

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{n<N} f(\{A^n x\})\right)_{N>0}$$

est convergente. D'après le théorème de représentation de Riesz, la limite de cette suite est de la forme $\int_{\mathbb{T}^d} f \, \mathrm{d}\mu$, où μ est une mesure de probabilité sur le tore.

Le Théorème 1 est démontré.

3. Description de la distribution asymptotique

Soit A une matrice réelle(d,d) et L l'endomorphisme de l'espace complexe associé à la matrice A dans la base canonique. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ une base de l'espace dans laquelle la matrice associée à L a une forme de Jordan. Cette base est une réunion de familles libres de vecteurs du type $(e_{1,\lambda}, e_{2,\lambda}, \dots, e_{k,\lambda})$ où λ désigne une valeur propre, le sous-espace engendré par cette famille étant stable sous L et la matrice de L dans cette base de sous-espace s'écrivant

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & O & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & O & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

On dira que l'indice k est l'indice maximal de ce bloc de Jordan. Plusieurs blocs de ce type peuvent bien sûr être associés à la même valeur propre λ.

Notons E le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ engendré par l'ensemble des $e = e_{j,\lambda}$ avec

$$|\lambda| > 1 \text{ ou}$$

$$|\lambda| = 1 \text{ et l'indice } j \text{ n'est pas maximal dans le bloc du vecteur } e.$$

Notons G_E l'adhérence, dans le tore $\mathbb{T}^d$, du sous-groupe $(E + \mathbb{Z}^d)/\mathbb{Z}^d$.

THÉORÈME 2. *Il y a équivalence entre:*

(1) *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $(\{A^n x\})_{n\geqslant 0}$ est équidistribuée dans le tore $\mathbb{T}^d$.*
(2) *Il existe un vecteur v dans le sous-espace E, dont les composantes sont rationnellement indépendantes.*
(3) *Pour tout vecteur non nul u à composantes entières, la suite $({}^t A^n u)_{n\geqslant 0}$ est non-bornée.*

https://doi.org/10.1023/A:1000281522303 Published online by Cambridge University Press

(4) $G_E = \mathbb{T}^d$.

Preuve du Théorème 2. $\underline{(2) \Rightarrow (3)}$ On suppose que la propriété (2) est satisfaite. Soit $u \in \mathbb{Z}^d, u \neq 0$. Il existe $v \in E$ tel que ${}^t uv \neq 0$.

Notons I l'ensemble des indices i entre 1 et d tels que le vecteur e_i appartienne au sous-espace E. Il existe $i \in I$ tel que ${}^t ue_i \neq 0$. Fixons un tel indice i en le choisissant de façon que le vecteur e_i soit d'indice minimal dans son bloc de Jordan et notons λ la valeur propre de A telle que e_i appartienne au sous-espace caractéristique associé à λ. Grâce à cette propriété d'indice minimal, on a

$$ {}^t u(Ae_i - \lambda e_i) = 0. $$

En se remémorant la définition de E, on peut distinguer deux cas. Si $|\lambda| > 1$, alors, ${}^t uA^n e_i = \lambda^n({}^t ue_i)$ est une suite non bornée. Si $|\lambda| = 1$, alors il existe un indice j tel que $Ae_j = \lambda e_j + e_i$, ce qui nous donne

$$ {}^t uA^n e_j = \lambda^n({}^t ue_j) + n\lambda^{n-1}({}^t ue_i), $$

et la suite $({}^t uA^n e_j)$ est non bornée.

Dans les deux cas on peut conclure que la suite de formes linéaires $({}^t uA^n)$ est non bornée.

$\underline{(3) \Rightarrow (2)}$ Supposons que, pour tout $v \in E$, il existe $u \in \mathbb{Z}^d$, $u \neq 0$ tel que ${}^t uv = 0$. Étant donné que le sous-espace E ne peut pas être contenu dans une réunion dénombrable d'hyperplans sans être contenu dans l'un d'entre eux (car si E n'est pas contenu dans l'hyperplan H, alors $E \bigcap H$ est négligeable dans E), il existe $u \in \mathbb{Z}^d$ tel que, pour tout $v \in E$, ${}^t uv = 0$. Fixons un tel vecteur u.

Notons B la matrice de Jordan représentant l'endomorphisme L dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ et $B^n = [b_{j,i}^{(n)}]_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ ses puissances. Soit i un indice entre 1 et d. On a

$$ {}^t uA^n e_i = {}^t u \sum_{j=1}^{n} b_{j,i}^{(n)} e_j = \sum_{j \notin I} b_{j,i}^{(n)} ({}^t ue_j). $$

Or I est le complémentaire de l'ensemble des indices j tels que, pour tout i entre 1 et d, la suite $(b_{j,i}^{(n)})$ est bornée. On conclut que, pour tout i, la suite $({}^t uA^n e_i)$ est bornée. Il existe donc un vecteur non nul u à composantes entières tel que la suite $({}^t uA^n)$ soit bornée, ce qui contredit la propriété (3).

$\underline{(2) \Rightarrow (4)}$ Si v est un élément de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes sont rationnellement indépendantes, alors la 'droite' $\{tv + \mathbb{Z}^d \mid t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans le tore $\mathbb{T}^d$. Si de plus $v \in E$ on a donc $G_E = \mathbb{T}^d$.

$\underline{(4) \Rightarrow (2)}$ Si tout élément v de E a des composantes rationnellement dépendantes, alors E est contenu dans un 'hyperplan rationnel', c'est à dire qu'il existe $u \in \mathbb{Z}^d$

tel que, pour tout $v \in E$, ${}^t uv = 0$ (cette remarque a été faite précédemment). Le sous-groupe G_E du tore est alors contenu dans le sous-groupe propre $\{w \in \mathbb{T}^d \mid {}^t uw = 0\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sous la condition (3), on a, d'après la Proposition 1, pour tout $u \in \mathbb{Z}^d, u \neq 0$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} e({}^t u A^n x) = 0.$$

C'est exactement le critère de Weyl pour l'équidistribution de la suite $(\{A^n x\})$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Supposons que G_E soit un sous-groupe propre du tore $\mathbb{T}^d$ et montrons que, pour tout x assez proche de zéro, la distribution asymptotique de la suite $(\{A^n x\})$ est portée par une partie propre du tore. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si B_ε désigne une boule de rayon ε, alors $G_E + [B_\varepsilon + \mathbb{Z}^d] \neq \mathbb{T}^d$. (Ceci est une propriété satisfaite par toute partie fermée propre du tore). Fixons un tel nombre ε.

Notons F le sous-espace engendré par les vecteurs de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ qui ne sont pas dans le sous-espace E. Les sous-espaces E et F sont supplémentaires. Rappelons que E est stable sous l'action de A. Notons A_F la matrice définie par

$$\text{si } x \in \mathbb{R}^d, \text{ alors } A_F x \in F \quad \text{et} \quad Ax - A_F x \in E.$$

De la définition de E, on déduit que la suite des puissances de la matrice A_F est bornée (cf. les formules utilisées dans l'implication (3) $\Rightarrow$ (2)).

Si $x \in \mathbb{R}^d$, on écrit $x = x' + x''$ avec $x' \in E$ et $x'' \in F$. On a alors $A^n x - A_F^n x'' \in E$. D'autre part, il existe $\eta > 0$ tel que, si $\| x \| < \eta$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\| A_F^n x'' \| < \varepsilon$, et donc

$$\{A^n x\} \in G_E + [B_\varepsilon + \mathbb{Z}^d].$$

La suite $(\{A^n x\})$ est donc contenue dans une partie fermée propre du tore. Et ceci étant vrai pour tout x dans une boule, on obtient bien une contradiction avec la propriété (1). Le Théorème 2 est démontré.

On peut donner une description de la distribution asymptotique dans le cas général.

THÉORÈME 3. *Si la matrice A ne possède pas de valeur propre de module* 1, *alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $(\{A^n x\})_{n \geqslant 0}$ admet, comme distribution asymptotique, la probabilité uniforme sur le groupe G_E.*

Dans tous les cas, pour presque tout x, il existe un compact $M(x)$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que la suite $(\{A^n x\})$ admette, comme distribution asymptotique, une probabilité portée par $G_E + [M(x) + \mathbb{Z}^d]$.

La preuve de ce théorème est contenue dans la preuve du précédent. Donnons deux exemples simples pour illustrer diverses situations possibles.

Exemple 1. Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda > 1,$$

alors

$$G_E = \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{T}\}.$$

Si de plus θ/π est irrationnel, alors pour presque tout x, la suite $(\{A^n x\})$ admet comme distribution asymptotique la probabilité uniforme sur le cylindre $G_E + [C(x) + \mathbb{Z}^3]$, où $C(x)$ est le cercle $\{(0, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_2^2 + y_3^2 = x_2^2 + x_3^2\}$. (On a noté ici ${}^t x = (x_1, x_2, x_3)$). Si par contre θ/π est rationnel, alors, pour presque tout x, la suite $(\{A^n x\})$ admet comme distribution asymptotique la probabilité uniforme sur une réunion finie de translatés de la droite G_E.

Exemple 2. Plaçons nous à nouveau en dimension 3. Si la matrice A possède une direction propre associée à une valeur propre de module > 1 contenue dans le plan $\{x, y, 0\}$ et de pente irrationnelle, si le plan $\{0, y, z\}$ est stable sous l'action de A et si la restriction de cette action à ce plan est une rotation d'angle irrationnel, alors, pour presque tout x, le support de la distribution asymptotique de la suite $(\{A^n x\})$ est une 'tranche' du tore

$$\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |y_3| \leqslant |x_3|\} + \mathbb{Z}^3.$$

4. Une précision et une question

Dans le cas où la restriction de l'action de la matrice A aux sous-espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module 1 est diagonalisable (il n'y a alors pas de bloc de Jordan non trivial associé à une valeur propre de module 1), nous savons démontrer le résultat suivant: *pour toute forme linéaire f sur l'espace des matrices (d, d), pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(tf(A^n))$ possède une distribution asymptotique modulo* 1.

Ce résultat contient la conclusion du Théorème 1; en effet, il entraine que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(\{tA^n x\})$ possède une distribution asymptotique dans le tore $\mathbb{T}^d$; par le théorème de Fubini, la conclusion du Théorème 1 s'en déduit.

Nous ignorons si cette propriété est satisfaite par toutes les matrices A. Ceci est lié à de délicates questions sur la distribution asymptotique de combinaisons linéaires de suites du type $(n^k \cos n\theta)_{n>0}$. Dans cette direction, l'article [1] contient des résultats intéressants. On y trouve en particulier la proposition suivante: si θ est un nombre réel tel que θ/π soit irrationnel et si k est un nombre entier > 0, alors, pour tout t, la suite $(tn^k \cos n\theta)$ est équidistribuée modulo 1.

Après avoir achevé la rédaction de cet article, l'auteur a pris connaissance de la note [4] dans laquelle la question de l'équidistribution de la suite $(\{A^n x\})$ est discutée sous l'hypothèse que la matrice A possède au moins une valeur propre de module > 1.

References

1. Berend, D. and Kolesnik, G.: Distribution modulo 1 of some oscillating sequences. *Israel J. Math.* 71 (1990) 161–179.
2. Bourgain, J.: The Riesz–Raïkov theorem for algebraic numbers. *Israel Math. Conf. Proc.* 3 (1990) 1–45.
3. Davenport, H., Erdös, P. and LeVeque, W. J.: On Weyl's criterion for uniform distribution. *Michigan Math. J.* 10 (1963) 315–319.
4. Fan, A.: Equirépartition des orbites d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. *C. R. Acad. Sci. Paris* 313 Série I, (1991) 735–738.
5. Fukuyama, K.: The central limit theorem for the Riesz–Raïkov sums. *Probability Theory and related fields* 100 (1994) 57–75.
6. Koksma, J. F.: Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins. *Compositio Math.* 2 (1935) 250–258.
7. Kuipers, L. and Niederreiter, H.: *Uniform distribution of sequences*. John Wiley and Sons, 1974.
8. Petit, B.: Le théorème limite central pour des sommes de Riesz–Raïkov. *Probability Theory and related fields* 93 (1992) 185–203.
9. Rauzy, G.: *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*. Presses Universitaires de France, 1976.