Canad. Math. Bull. Vol. **45** (3), 2002 pp. 388–398

Algèbres simples centrales de degré 5 et E_8

Philippe Gille

Abstract. As a consequence of a theorem of Rost-Springer, we establish that the cyclicity problem for central simple algebra of degree 5 on fields containg a fifth root of unity is equivalent to the study of anisotropic elements of order 5 in the split group of type E_8.

Soit k un corps, k_s une clôture séparable de k et $\mathcal{G}$ le groupe de Galois absolu de k_s/k. Une algèbre simple centrale D/k est cyclique si elle admet un corps neutralisant cyclique. Dans cet article, on s'intéresse au cas $l = 5$ du problème classique suivant.

Le problème de cyclicité *Toute k-algèbre simple centrale de degré premier l est-elle cyclique?*

Pour cette question, on peut, suivant la proposition de l'appendice, supposer le premier l inversible dans k et même k de caractéristique nulle. La question de cyclicité a une réponse positive lorsque $l = 2$ et 3. Pour $l = 2$, les algèbres simples centrales sont les algèbres de quaternions et le cas $l = 3$ est un résultat classique de Wedderburn [W]. Le cas $l = 5$ est donc le premier cas où l'on ignore la réponse. Toutefois, nous mentionnons une liste non exhaustive de résultats connus sur ce problème. Soit D/k une algèbre simple centrale de degré 5.

1) Il existe $a, b \in k^\times$ et $c \in k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ telle que $D \otimes_k k(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt[3]{c})$ est cyclique (Brauer [Br]).
2) Si D/k est déployée par une extension galoisienne de groupe diédral $D_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors D est cyclique (Rowen-Saltman [RoS]).
3) Soit K un corps contenant une racine primitive cinquième de l'unité, complet pour une valuation discrète de corps résiduel k. Si toutes les algèbres simples centrales de degré 5 sur k sont cycliques, il en est de même sur K (Tignol [T]).

Dans cet article, comme conséquence d'un théorème de Rost-Springer, nous montrons que si le corps k contient une racine primitive 5-ième de l'unité ζ, alors le problème de cyclicité pour le corps k est équivalent à la conjecture suivante pour le corps k, où E_8/k désigne le groupe semi-simple déployé de type E_8.

Conjecture 1 Tout élément anisotrope (*i.e.*, n'appartenant à aucun k-parabolique propre) de $E_8(k)$ d'ordre 5 normalise un k-tore déployé maximal de E_8.

Notons que cette conjecture est le dernier cas restant en suspens d'une conjecture générale [G3, Section 1.2, Conjecture 2′]. Ce point de vue et les travaux de Chernousov pour le principe de Hasse des groupes de type E_8 [C1] nous permettent de

Reçu par la rédaction le 23 octobre, 2001.
Classification (AMS) par sujet: 16S35, 12G05, 20G15.
Mots clés: algèbres simples centrales, cohomologie galoisienne.

donner alors une nouvelle preuve du résultat de Brauer 1). Il est à noter que Rowen est moins optimiste quant à la cyclicité des algèbres de degré 5 et qu'il dispose de candidats pour des contre-exemples [Ro].

J'ai plaisir à remercier Markus Rost et Tony Springer de m'avoir informé de leurs travaux communs, ainsi que Jean-Pierre Tignol pour l'intérêt porté à ce travail.

Nous adoptons les notations suivantes :

- $H^i(k, M)$, le i-ième groupe de cohomologie galoisienne pour un faisceau galoisien M sur $\mathrm{Spec}(k)$ [Se1], $H^i_{fppf}(k, M)$ la cohomologie plate d'un faisceau M sur $\mathrm{Spec}(k)$ pour la topologie plate [Mi].
- $\mathrm{Br}(k)$ le groupe de Brauer d'un corps k, pour tout caractère $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ et tout $(a) \in k^\times/k^{\times l}$ (l inversible dans k), on note $\chi \cup (a) \in H^2(k, \mu_l)$ le cup-produit de χ par (a); cette classe est représentée par une algèbre cyclique.
- $H^3(k) = \bigoplus_{l \neq \mathrm{car}(k)} H^3\big(k, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l(2)\big)$.
- $K_2(k)$ est le second groupe de K-théorie de Milnor, *i.e.*, le quotient du groupe abélien $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times$ par les relations $x \otimes (1-x) = 0$ pour tout $x \in k^\times \setminus \{1\}$.
- Pour tout caractère $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$, on dispose du cup-produit $K_2(k) \xrightarrow{\chi \cup ?} H^3(k)$.

Pour les notions générales sur les algèbres simples centrales, groupe de Brauer et cohomologie galoisienne, nous nous référons au livre de Serre [Se1].

1 Le théorème de Rost-Springer

On considère le sous–groupe maximal

$$H = \mathrm{SL}_5 \times \mathrm{SL}_5 / \mu_5 \subset E_8,$$

le plongement $\mu_5 \to \mu_5 \times \mu_5$ étant défini par $x \mapsto (x, x^2)$. La suite exacte $1 \to \mu_5 \to \mathrm{SL}_5 \times \mathrm{SL}_5 \to H \to 1$ donne lieu à un bord $\delta\colon H^1(k, H) \to H^2_{fppf}(k, \mu_5) = {}_5\mathrm{Br}(k)$. On note $i\colon H \to G$ le plongement de H de G et $i_* : H^1(k, H) \to H^1(k, E_8)$ l'application induite sur la cohomologie.

Théorème 1.1 ([**RS, th. 17**]) *Il existe une unique bijection* $f_k\colon H^1(k, \mathrm{PGL}_5) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\big(H^1(k, H) \xrightarrow{i_*} H^1(k, E_8)\big)$ *tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} H^1(k, \mathrm{PGL}_5) \arrow[r, "f_k", "\sim"'] \arrow[d, "\delta_0"'] & \mathrm{Ker}\big(H^1(k, H) \xrightarrow{i_*} H^1(k, E_8)\big) \arrow[dl, "\delta"] \\ {}_5\mathrm{Br}(k) & \end{tikzcd}$$

où δ_0 est la flèche de bord associée à la suite exacte $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_5 \to \mathrm{PGL}_5 \to 1$.

Démonstration (librement adaptée de [RS]) : cas de caractéristique nulle On note $r\colon H^1(k, E_8) \to H^3(k)$ l'invariant de Rost (voir [EKLV], [Se2]). L'unicité provient du

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

fait que δ_0 est injectif ainsi que δ suivant [G4, Section 4.1, lemme 6]. Nous allons définir une application f_k tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H^1(k,\mathrm{PGL}_5) \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "\delta_0"'] & H^1(k,H) \arrow[dl, "\delta"] \\ {}_5\,\mathrm{Br}(k) & \end{tikzcd}$$

commute et tel que le composé

$$H^1(k,\mathrm{PGL}_5) \xrightarrow{f_k} H^1(k,H) \longrightarrow H^1(k,E_8) \xrightarrow{r_k} H^3(k)$$

est nul; nous montrons ensuite que $i_* \circ f_k = 0$. Soit donc A/k une algèbre simple centrale de degré 5 de classe $[A] \in H^1(k,\mathrm{PGL}_5) \hookrightarrow {}_5\,\mathrm{Br}(k)$.

Lemme 1.2

a) *Il existe* $[z] \in H^1(k,H)$ *satisfaisant* $\delta([z]) = [A]$.
b) *Il existe une unique classe* $f_k([A])$ *de* $H^1(k,H)$ *telle que* $r\big[i_* f_k([A])\big] = 0$.

Démonstration du lemme a) L'image du bord $H^1(k,\mathrm{PGL}_5) \to {}_5\,\mathrm{Br}(k)$ consiste en les classes d'algèbres simples centrales de degré 5, c'est un exercice laissé au lecteur de voir que l'image de $\delta\colon H^1(k,H) \to {}_5\,\mathrm{Br}(k)$ est la même.

b) On note X la variété de Severi-Brauer de A. Vu que $H^1(k,\mathrm{SL}_5) = 1$, le bord $\delta\colon H^1(k,H) \to {}_5\,\mathrm{Br}(k)$ a un noyau trivial et la classe $[z]$ est tuée par $k(X)$. Ainsi

$$r_k\big(i_*([z])\big) \in \mathrm{Ker}\Big(H^3(k) \to H^3\big(k(X)\big)\Big).$$

Suivant [P, prop. 4.4], il existe alors un scalaire $c \in k^\times$ tel que

$$r_k\big(i_*([z])\big) = [A] \cup (c) \in H^3(k).$$

On tord par le cocycle z et il vient

$${}_zH = \mathrm{SL}(A) \times \mathrm{SL}(B)/\mu_5 \subset {}_zE_8,$$

où B/k est une algèbre de degré 5 satisfaisant $[B] = 3[A]$ dans $\mathrm{Br}(k)$ (*cf.* [RS]). La suite exacte $1 \to \mu_5 \to \mathrm{SL}(A) \times \mathrm{SL}(B) \to {}_zH \to 1$ donne lieu à la suite exacte longue d'ensembles pointés

$$\begin{tikzcd} H^1(k,\mu_5) \arrow[r] & H^1\big(k,\mathrm{SL}(A)\big) \times H^1\big(k,\mathrm{SL}(B)\big) \arrow[r] & H^1(k,{}_zH) \arrow[r, "{}_z\delta"] & H^2(k,\mu_5) \\ k^\times/k^{\times 5} \arrow[r, "(\times 1,\times 2)"] \arrow[u, "\wr"] & k^\times/\,\mathrm{Nrd}(A^\times) \times k^\times/\,\mathrm{Nrd}(B^\times) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^1(k,{}_zH) \arrow[r, "{}_z\delta"] \arrow[u, equal] & {}_5\,\mathrm{Br}(k). \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

Suivant un théorème de Dieudonné, on a $\mathrm{Nrd}(A^\times) = \mathrm{Nrd}(B^\times)$; en rendant nul le second facteur de $k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times) \times k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times)$, la suite exacte devient

$$1 \longrightarrow k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times) \xrightarrow{j} H^1(k, {}_zH) \xrightarrow{{}_z\delta} {}_5\,\mathrm{Br}(k).$$

Suivant [C2], le composé

$$k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times) \xrightarrow{j} H^1(k, {}_zH) \longrightarrow H^1(k, {}_zE_8) \xrightarrow{r_{{}_zE_8}} H^3(k)$$

s'identifie à l'invariant de Merkurjev-Suslin $k^\times / \mathrm{Nrd}(A^\times) \xrightarrow{[A]\cup ?} H^3(k)$, qui est injectif car le degré de A est sans facteurs carrés [MS]. La classe $j(c^{-1}) \in H^1(k, {}_zH)$ satisfait donc $r_{{}_zE_8} \circ {}_zi_*[j(c^{-1})] = 0$ dans $H^3(k)$. Comme le diagramme suivant est commutatif [G2, p. 76, lemme 7]

$$\begin{tikzcd}
H^1(F, H) \arrow[r, "i_*"] & H^1(k, E_8) \arrow[r, "r_{E_8}"] & H^3(k) \\
H^1(F, {}_zH) \arrow[u, "\tau_z", "\wr"'] \arrow[r, "{}_zi_*"] & H^1(k, {}_zE_8) \arrow[u, "\tau_z", "\wr"'] \arrow[r, "r_{{}_zE_8}"] & H^3(k), \arrow[u, "?+r(i_*[z])", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

la classe

$$f_k([A]) := \tau_z\big(j(c^{-1})\big) \in H^1(k, H)$$

est donc l'unique classe de $H^1(k, H)$ satisfaisant $r_{E_8}\big(i_*\big[f_k([A])\big]\big) = 0$. Le lemme est donc démontré. On va maintenant voir que $i_* \circ f_k$ est nul par un argument de paramétrisation. Tout d'abord, on établit le

Lemme 1.3 *Si A est cyclique de degré 5, alors $i_*\big(f_k([A])\big) = 1$.*

Par spécialisation, cela résulte immédiatement du

Sous-lemme 1.4 *Soit $\chi \in H^1(k, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$. Alors*

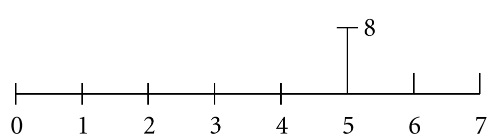
$$i_* f_{k(t)}[\chi \cup (t)] = 1 \in H^1\big(k(t), E_8\big)$$

et a fortiori dans $H^1\big(k((t)), E_8\big)$.

Démonstration du sous-lemme On montre tout d'abord que cette classe est nulle dans $H^1\big(k((t)), E_8\big)$ en utilisant la décomposition de Bruhat-Tits [BT, Cor. 3.15], c'est-à-dire la décomposition

$$H^1\big(k((t)), E_8\big) = \coprod_i H^1(k, M_i)_{an},$$

où les M_i/k sont des groupes réductifs déployés de rang 8, dont le diagramme de Dynkin est un sous-diagramme du diagramme de Dynkin étendu



(E_8)

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

L'image de $\chi \cup (t)$ correspond à une classe $[a] \in H^1(k, M_i)$ où l'on peut supposer M_i/k maximal, donc semi-simple. La classe $[a]$ est déployée par l'extension cyclique de degré 5 donnée par χ. Si $M_i \neq M_0 = E_8$ et $M_i \neq A_4.A_4$, alors 5 n'est pas un premier de torsion pour le groupe M_i et le théorème C [G1, p. 200] montre que le groupe ${}_aM_i$ est déployé, donc que $[a] = 1$. Si M_i est de type $A_4.A_4$, $M_i = H$ et le diagramme [G2, th. 4]

$$\begin{tikzcd}
H^1(K, E_8) \arrow[r, "r_K"] & H^3\big(k((t))\big) \arrow[d, "\partial"'] \\
H^1(k, H) \arrow[u] \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Br}(k)
\end{tikzcd}$$

commute, donc $[a] = 1$ vu que $\mathrm{Ker}(\delta) = 1$. La seule possibilité est donc $M_i = M_0 = E_8$. L'image de $\chi \cup (t)$ dans $H^1\big(k(t), E_8\big)$ est donc non-ramifiée sur $\mathbb{P}^1_k$ et est donc une classe constante provenant de $H^1(k, E_8)$. En spécialisant en $t = 1$, on voit que cette constante est nulle et on conclut que $i_* f_{k(t)}[\chi \cup (t)] = 1$ dans $H^1\big(k(t), E_8\big)$. ■

Remarque Une autre démonstration de 1.4 est possible en utilisant la fonctorialité de la décomposition de Bruhat-Tits pour l'extension ramifiée $k((t^{\frac{1}{5}}))/k((t))$.

On finit la démonstration en considérant un corps neutralisant L de degré 5 de A. Notant L' la clôture galoisienne, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& L' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
L \arrow[dr, dash] & & k' \arrow[dl, dash] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

où k' désigne le sous-corps de L fixé par un 5-Sylow de $\mathrm{Gal}(L'/k)$. On note $\chi' \in H^1(k', \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ un caractère définissant l'extension cyclique L'/k'. Comme $[k' : k]$ est de degré premier à 5, la norme

$$k'^{\times}/N_{L'/k'}(L'^{\times}) \xrightarrow[\sim]{\chi' \cup} \mathrm{Br}(L'/k') \xrightarrow{N_{k'/k}} \mathrm{Br}(L/k)$$

est surjective. La classe $[A]$ de $\mathrm{Br}(L/k)$ est donc l'image de $\alpha \in k'^{\times}$ et par densité de Zariski, on peut supposer $-\alpha$ primitif pour l'extension k'/k. Ainsi $k'/k = k(\alpha)$ et on note $\pi = N_{k'/k}(t + \alpha)$. On considère alors l'image de $\gamma(t) = N_{k'/k}\big(\chi' \cup (t + \alpha)\big)$ par $i_* \circ f_{k(t)}$ dans $H^1\big(k(t), E_8\big)$. Cet élément est non-ramifié sur $\mathbb{A}^1_k \setminus \{-\alpha\}$. Mais $k((\pi))$ est un corps de série formelles et $N_{k'/k}\big(\chi' \cup (t + \alpha)\big)_{k((\pi))}$ est la classe d'une algèbre cyclique. Le lemme 1.3 montre donc que la restriction de $\gamma(t)$ à $H^1\big(k((\pi)), E_8\big)$ est nulle et donc $\gamma(t)$ est non ramifiée sur la droite affine. Suivant un lemme de Harder [H, lemme 4.1.3], la classe $\gamma(t)$ provient de $H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, E_8)$ et on a

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

$H^1(k, E_8) = H^1_{\text{ét}}(\mathbb{A}^1_k, E_8)$ suivant Raghunathan-Ramanathan [RR]. Pour déterminer cette constante, on regarde à l'infini, où l'on a

$$\begin{aligned} i_* f\big[N_{k'/k}\big(\chi' \cup (t+\alpha)\big)_{k((\frac{1}{t}))}\big] &= i_* f[N_{k'/k}(\chi') \cup (t^{[k':k]})] \\ &= 1 \quad \text{dans } H^1\left(k\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right), E_8\right) \end{aligned}$$

suivant le lemme 1.3. La constante est donc nulle et $\gamma(t) = 1$ dans $H^1\big(k(t), E_8\big)$. En spécialisant en $t = 0$, il vient $i_* f_k[A] = 1$ dans $H^1(k, E_8)$.

Caractéristique positive Soit K un corps de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète d'anneau de valuation O et de corps résiduel k. On note $\widetilde{K}$ une clôture non ramifiée maximale de K et $\widetilde{O}$ son anneau de valuation. D'après le lemme de Hensel [SGA3, Section XXIV.8], on a des isomorphismes

$$H^1_{\text{ét}}(O, H) \xrightarrow{\sim} H^1(k, H), \quad H^1_{\text{ét}}(O, E_8) \xrightarrow{\sim} H^1(k, E_8)$$

et suivant Bruhat-Tits [BT, Section 3.9], les morphismes de restrictions

$$H^1_{\text{ét}}(O, H) \longrightarrow H^1(K, H), \quad H^1_{\text{ét}}(O, E_8) \longrightarrow H^1(K, E_8)$$

sont injectifs. On dispose donc de relèvements

$$\ell \colon H^1(k, H) \hookrightarrow H^1(K, H), \quad \ell \colon H^1(k, E_8) \hookrightarrow H^1(K, E_8).$$

Ainsi, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\big(H^1(k, H) \to H^1(k, E_8)\big) \arrow[r, "\delta_k"] \arrow[d, "\ell"'] & {}_5\operatorname{Br}(k) \arrow[d, "\ell"'] \\ \operatorname{Ker}\big(H^1(K, H) \to H^1(K, E_8)\big) \arrow[r, "\delta_K"] & {}_5\operatorname{Br}(K) \end{tikzcd}$$

montre que δ_k a un noyau trivial (puisque $\operatorname{Ker}(\delta_K) = 0$) et ainsi il y a unicité de f_k. Montrons maintenant l'existence. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} H^1(k, \mathrm{PGL}_5) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\ell"'] & \operatorname{Ker}\big(H^1(k, H) \to H^1(k, E_8)\big) \arrow[d, "\ell"'] \\ H^1(K, \mathrm{PGL}_5) \arrow[r, "f_K"] & \operatorname{Ker}\big(H^1(K, H) \to H^1(K, E_8)\big). \end{tikzcd}$$

Soit $\gamma \in H^1(k, \mathrm{PGL}_5)$, on veut définir $f_k(\gamma)$ par $f_K\big(\ell(\gamma)\big) = \ell\big(f_k(\gamma)\big)$; pour cela, il suffit de voir que $f_K\big(\ell(\gamma)\big) \in \ell\big(H^1(k, H)\big)$. En fait, on a l'assertion suivante en apparence plus faible.

Lemme 1.5 *Soit π une uniformisante de K. On note $K' = K(\sqrt[5]{\pi})$ et O' son anneau de valuation. Alors $f_K\big(\ell(\gamma)\big)/K' \in \operatorname{Im}\big(H^1(k, H) \xrightarrow{\ell} H^1(K', H)\big)$.*

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

Le lemme est en fait suffisant car en remplaçant K par K', on a bien exhibé un élement $f_k(\gamma) \in \operatorname{Ker}\big(H^1(k,H) \to H^1(k,E_8)\big)$ tel que $\delta\big(f_k(\gamma)\big) = \delta_0(\gamma)$. On montre maintenant le lemme. Soit $z \in Z^1\big(\mathcal{G}, H(\widetilde{O})\big)$ un 1-cocycle tel que $\delta([z]) = \delta_0\big(\ell(\gamma)\big)$. Il existe des algèbres non-ramifiées A/K, B/K satisfaisant $[B] = 3[A]$ dans $\operatorname{Br}(K)$ telles ques

$$ {}_zH = \mathrm{SL}(A) \times \mathrm{SL}(B)/\mu_5 \subset {}_zE_8. $$

Le même diagramme que ci-dessus, mais pour la cohomologie plate, s'écrit

$$ 1 \longrightarrow K^\times / \operatorname{Nrd}(A^\times) \xrightarrow{i} H^1(K, {}_zH) \xrightarrow{{}_z\delta} {}_5\operatorname{Br}(K). $$

Notant $\tau_z \colon H^1(K, {}_zH) \xrightarrow{\sim} H^1(K,H)$ la bijection de torsion, l'égalité $\delta\Big(f_K\big(\ell(\gamma)\big)\Big) = \delta_0\big(\ell(\gamma)\big)$ montre que

$$ \tau_z^{-1}\Big(f_K\big(\ell(\gamma)\big)\Big) \in K^\times / \operatorname{Nrd}(A^\times). $$

Utilisant que $K^{\times 5} \subset \operatorname{Nrd}(A^\times)$, on en déduit

$$ \tau_z^{-1}\Big(f_K\big(\ell(\gamma)\big)\Big)_{K'} \in \operatorname{Im}\big(H^1(O', {}_zH) \to H^1(K', {}_zH)\big), $$

d'où $f_K\big(\ell(\gamma)\big)/K' \in \operatorname{Im}\big(H^1(k,H) \xrightarrow{\ell} H^1(K',H)\big)$. ■

2 Application au problème de cyclicité

On suppose dans cette section que k contient une racine primitive cinquième de l'unité.

Théorème 2.1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *les k-algèbres simples centrales de degré 5 sont cycliques,*
ii) *tout élément anisotrope d'ordre 5 du groupe déployé E_8 normalise un k-tore déployé maximal.*

Démonstration du théorème On note g_0 un générateur du centre de H et on a $H = Z_{E_8}(g_0)$ suivant [BS, Section 7, table p. 219]. On note $C_G^{\mathrm{st}}(g_0)(k)$ l'ensemble des classes de conjugaisons *stables* de g_0, *i.e.*, les élements $g \in G(k)$ (modulo conjugaison par $G(k)$) qui sont k_s-conjugués à g_0. On rappelle qu'il y a une bijection naturelle

$$ C_{E_8}^{\mathrm{st}}(g_0)(k)/E_8(k) \dashleftarrow\dashrightarrow \operatorname{Ker}\big(H^1(k,H) \to H^1(k,E_8)\big). $$

De façon précise, si $g \in C_{E_8}^{\mathrm{st}}(n)(k)$, alors $g = xg_0x^{-1}$ pour $x \in H(k_s)$ et $[x^{-1}x^s] \in \operatorname{Ker}\big(H^1(k,H) \to H^1(k,E_8)\big)$. Suivant [G4, Section 4.1, cor. 4], on sait que

$C^{\mathrm{st}}_{E_8}(g_0) \setminus E_8(k).g_0$ consiste exactement en les éléments anisotropes d'ordre 5 de $E_8(k)$. Suivant (*ibid*, lemma 6), on sait que le bord

$$\delta\colon \operatorname{Ker}\bigl(H^1(k,H) \to H^1(k,E_8)\bigr) \to {}_5\operatorname{Br}(k)$$

est injectif. En d'autres mots, comme le premier ensemble est en bijection avec $C^{\mathrm{st}}_{E_8}(g_0)(k)$, on peut associer à tout $g \in C^{\mathrm{st}}_{E_8}(g_0)(k)$ un invariant $\operatorname{Inv}(g)$ de ${}_5\operatorname{Br}(k)$ de sorte que si $g' \in C^{\mathrm{st}}_{E_8}(g_0)(k)$,

$$\operatorname{Inv}(g) = \operatorname{Inv}(g') \quad \Longleftrightarrow \quad g \text{ et } g' \text{ sont } E_8(k)\text{-conjugués.}$$

De plus, suivant [G4, Section 4.2, th. 3.d], si g est anisotrope, on dispose du critère suivant :

$$\begin{aligned}&\operatorname{Inv}(g) \text{ est la classe d'une algèbre cyclique}\\ &\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad g \text{ normalise un } k\text{-tore maximal déployé.}\end{aligned}$$

On en conclut que i) $\Longrightarrow$ ii). Mais selon le théorème de Rost-Springer, l'image de Inv consiste en les classes des algèbres de degré 5. On en déduit la réciproque, c'est-à-dire l'implication ii) $\Longrightarrow$ i). ■

3 Remarques

3.1 Lien avec la méthode du principe de Hasse pour E_8

Notre point de vue permet de retrouver sous une forme non effective le résultat de Brauer 1) mentionné dans l'introduction.

Proposition 3.1 *On suppose* $\operatorname{car}(k) = 0$ *et* $k^6 = k$. *Alors la conjecture 1 est vraie pour* k. *En particulier, les algèbres simples centrales de degré* 5 *sont cycliques.*

Démonstration On note ζ une racine primitive cinquième de l'unité. On note $K = k((t))$, $L = k((t^{\frac{1}{5}}))$; on note $\chi \in H^1(K,\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ un caractère de noyau définissant L/K. Soit g un élément anisotrope d'ordre 5 de $E_8(k)$. Suivant [G3], considérant l'élément g comme un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to E_8$, on définit la classe de cohomologie

$$\gamma_\chi(g) = g_*(\chi) \quad \text{dans} \quad H^1(K,E_8).$$

On sait que g est anisotrope si et seulement si la classe $g_*(\chi)$ est anisotrope (*ibid*, Section 3, prop. 5). Suivant Chernousov [C1] (voir aussi [PR, p. 394]), il existe une extension K'/K (galoisienne résoluble) de degré $2^\alpha 3^\beta$ telle que

$$\gamma_\chi(g)_{K'} \in \operatorname{Im}\bigl(H^1(K'.L/K',H) \to H^1(K',E_8)\bigr).$$

L'extension K'/K est totalement ramifiée, donc $K'/K = K((t^{\frac{1}{2^\alpha 3^\beta}}))$. Il est loisible de remplacer le corps K par K' dans la construction de la classe $\gamma_\chi(g)$, c'est-à-dire que l'on peut en fait supposer

$$\gamma_\chi(g) \in \operatorname{Im}\bigl(H^1(L/K,H) \to H^1(K,E_8)\bigr).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-041-3 Published online by Cambridge University Press

L'image du bord $\delta\colon H^1(L/K, H) \to {}_5\operatorname{Br}(K)$ est égale à $\operatorname{Ker}\big(\operatorname{Br}(K) \to \operatorname{Br}(L)\big)$, c'est-à-dire constituée des classes des algèbres cycliques $A_\zeta(t, x)$ pour $x \in k^\times$. Ainsi, il existe $x \in k^\times$ tel que

$$\delta\big(\gamma_\chi(g)\big)_{k(\sqrt[5]{x})((t))} = 0 \quad \text{dans} \quad \operatorname{Br}\big(k(\sqrt[5]{x})((t))\big).$$

Vu que $\operatorname{Ker}(\delta) = 0$, il résulte que

$$\gamma_\chi(g)_{k(\sqrt[5]{x})((t))} = 1 \quad \text{dans} \quad H^1\big(k(\sqrt[5]{x})((t)), E_8\big).$$

Par suite, $g_{k(\sqrt[5]{x})}$ est isotrope, donc la classe de l'algèbre associée $\operatorname{Inv}(g)$, déployée par $k(\sqrt[5]{x})$, est donc cyclique. Le théorème 3 de [G4] indique alors que g normalise un k-tore déployé maximal de E_8. ■

Remarque En reprenant en détail l'article [C1], il est probable que l'on peut donner une version effective du nombre de racines carrées et de racines cubiques à extraire pour rendre une algèbre de degré 5 cyclique; à première vue, il nous a semblé que l'on ne puisse pas améliorer ainsi le résultat de Brauer.

3.2 Algèbres simples centrales de degré 3 et F_4

Si l'on suppose maintenant que k contient une racine primitive troisième de l'unité, que $G = F_4$ et que $H = \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 / \mu_3$ (plongement diagonal) est le sous-groupe maximal de type $A_2.A_2$ de F_4, la même approche permet de montrer la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3, c'est-à-dire le théorème de Wedderburn. De façon analogue, on obtient que la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3 est équivalent au fait que tout élément anisotrope d'ordre 3 de F_4 normalise un tore maximal déployé. Comme cette dernière assertion est connue [Gi3, Section 4, th. 3], cela démontre la cyclicité des algèbres simples centrales de degré 3. Cependant, la démonstration du théorème de Rost-Springer dans ce cas est bien plus facile, car on dispose alors d'un plongement $\mathrm{PGL}_3 \to H$, ce qui n'était pas le cas pour E_8.

4 Appendice : réduction au cas de caractéristique nulle

Soient K un corps complet pour une valuation discrète, O son anneau de valuation et F son corps résiduel. Les F-algèbres simples centrales de degré n sont classifiées par l'ensemble pointé de cohomologie galoisienne $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$. Suivant le lemme de Hensel [SGA3, Section 24.8], on a un isomorphisme $H^1_{\text{ét}}(O, \mathrm{PGL}_n) \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$, *i.e.*, toute algèbre simple centrale D/F se relève en une algèbre d'Azumaya $\mathfrak{D}/O$ dont on considère la fibre générique $\mathfrak{D} \times_O K$.

Proposiiton 4.1 *L'algèbre simple centrale D/F est cyclique si et seulement si $\mathfrak{D} \times_O K/K$ est cyclique.*

Démonstration Supposons que D/F est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une extension cyclique F'/F de degré m divisant n telle que $D \otimes_F F'$ est déployée. L'extension

F'/F est définie par le noyau d'un caractère $\theta \in H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Suivant le lemme de Hensel, on a un isomorphisme $H^1_{\text{ét}}(O, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et donc un relèvement (injectif) $\ell\colon H^1(F, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \to H^1(K, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Il existe donc une extension étale O'/O relevant F'/F et le corps de fractions K' de O' est une extension cyclique de K. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(F, \mathrm{PGL}_n) & \xleftarrow{\sim} & H^1_{\text{ét}}(O, \mathrm{PGL}_n) & \longrightarrow & H^1(K, \mathrm{PGL}_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(F', \mathrm{PGL}_n) & \xleftarrow{\sim} & H^1_{\text{ét}}(O', \mathrm{PGL}_n) & \longrightarrow & H^1(K', \mathrm{PGL}_n) \end{array}$$

montre que l'algèbre $\mathfrak{D} \times_O K'$ est déployée.

Réciproquement, supposons que $\mathfrak{D} \times_O K/K$ est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une extension cyclique K''/K de degré m divisant n déployant $\mathfrak{D} \times_O K$. On note alors K'/K la sous-extension non-ramifiée maximale de K, O' (resp. O'') l'anneau de valuation de K' (resp. K'') et $F' = F''$ le corps résiduel O' (resp. O''). Nous affirmons que F'/F déploie D/F. Dans ce but, on considère le diagramme commutatif de restrictions

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Br}(F) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Br}(O) & \hookrightarrow & \mathrm{Br}(K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Br}(F') & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Br}(O') & \hookrightarrow & \mathrm{Br}(K') \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Br}(F') & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Br}(O'') & \hookrightarrow & \mathrm{Br}(K''), \end{array}$$

où la flèche $\mathrm{Br}(O) \to \mathrm{Br}(K)$ est injective suivant [Gr, Section 1]. Une chasse au diagramme montre alors que l'extension F'/F déploie D/F. ■

Références

[BS] A. Borel et J. de Siebenthal, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos*. Comment. Math. Helv. **23**(1949), 200–221.

[Br] R. Brauer, *On normal division algebras of degree* 5. Proc. Nat. Acad. Sci. **24**(1938), 243–246.

[BT] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes algébriques sur un corps local III. Compléments et application à la cohomologie galoisienne.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **34**(1987), 671–698.

[C1] V. Chernousov, *The Hasse principle for groups of type* E_8. Dokl. Akad. Nauk SSSR (5) **306**(1989), 1059–1063; traduction anglaise dans Soviet Math. Dokl. (3) **39**(1989), 592–596.

[C2] ———, *Remark on the Serre mod-5 invariant for groups of type* E_8. Mat. Zametki (1) **56**(1994), 116–121; traduction anglaise dans Math. Notes (1) **56**(1994), 730–733.

[EKLV] H. Esnault, B. Kahn, M. Levine et E. Viehweg, *The Arason invariant and mod* 2 *algebraic cycles.* J. Amer. Math. Soc. (1) **11**(1998), 73–118.

[G1] P. Gille, *La R-équivalence sur les groupes réductifs définis sur un corps global*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **86**(1997), 199–235.

[G2] ———, *Invariants cohomologiques de Rost en caractéristique positive.* K-theory **408**(2000), 1–45.

[G3] ———, *Unipotent subgroups of reductive groups in characteristic* $p > 0$. Duke Math. J., à paraître.

[G4] ———, *An invariant of elements of finite order in semisimple simply connected algebraic groups.* J. Group Theory, à paraître.

[Gr] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer. I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses, II. Théorie cohomologique*. Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 46–66 et 67–87.

[Ha] H. Harder, *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen.* Invent. Math. **4**(1967), 165–191.

[MS] A.-S. Merkurjev et A.-A. Suslin, *$\mathcal{K}$-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*. Izv. Akad. Nauk SSSR **46**(1982), 1011–1046; traduction dans Math. USSR Izv. **21**(1983), 307–340.

[Mi] J. S. Milne, *Étale Cohomology.* Princeton Math. Ser. **33**, Princeton, 1980.

[P] E. Peyre, *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology.* Proc. Sympos. Pure Math. **58**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, 369–401.

[PR] V.-P. Platonov et A.-S. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory* (traduction anglaise). Academic Press, 1994.

[RR] M. S. Raghunathan et A. Ramanathan, *Principal bundles on the affine line*. Proc. Indian Acad. Sci. **93**(1984), 137–144.

[RS] M. Rost et T. A. Springer, *On subgroups of type A_4 in E_8*. Travaux en cours.

[Ro] L. H. Rowen, *Are p-algebras having cyclic quadratic extensions necessarily cyclic?* J. Algebra **215**(1999), 205–228.

[RoS] L. H. Rowen et D. Saltman, *Dihedral algebras are cyclic*. Proc. Amer. Math. Soc. **84**(1982), 162–164.

[Se1] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*. Lecture Notes in Math. **5**, 5^e édition, Springer-Verlag, 1994.

[Se2] ———, *Cohomologie galoisienne: Progrès et problèmes.* Séminaire Bourbaki, exposé 783 (1993–94), Astérisque **227**(1995), 4, 229–257.

[SGA3] *Schémas en groupes*. Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963–1964, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. **151–153**, Springer, 1970.

[T] J.-P. Tignol, *Metacyclic division algebras of degree* 5. Ring Theory 1989 (Jerusalem, 1988/89), Israel Math. Conf. Proc. **1**(1989), 344–355.

[W] J. H. M. Wedderburn, *On division algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **22**(1921), 129–135.

Département de Mathématiques, CNRS
Bât. 425, Université de Paris–Sud
F-91405 Orsay Cedex
France
courriel: gille@math.u-psud.fr