COMPOSITIO MATHEMATICA

Descente fidèlement plate pour les n-champs d'Artin

Bertrand Toën

Compositio Math. **147** (2011), 1382–1412.

doi:10.1112/S0010437X10005245

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

The London Mathematical Society

Compositio Math. 147 (2011) 1382–1412
doi:10.1112/S0010437X10005245

Descente fidèlement plate pour les n-champs d'Artin

Bertrand Toën

Abstract

We prove two flat descent results in the setting of Artin n-stacks. First of all, a stack for the etale topology which is an Artin n-stack (in the sense of Simpson and Toën–Vezzosi) is also a stack for the flat (*fppf*) topology. Moreover, an n-stack, for the *fppf* topology, which admits a flat (*fppf*) n-atlas is an Artin n-stack (i.e. possesses a smooth n-atlas). We deduce from these two results a comparison between etale and *fppf* cohomologies (with coefficients in non-smooth group schemes and also non-abelian). This work is written in the setting of the derived stacks of Toën and Vezzosi, and all of these results are therefore also valid for derived Artin n-stacks.

Résumé

Nous montrons deux résultats de descente fidèlement plate de présentation finie dans le cadre des n-champs d'Artin. Tout d'abord, un champ pour la topologie étale et qui est un n-champ d'Artin (au sens de Simpson et de Toën et Vezzosi) est aussi un champ pour la topologie plate (*fppf*). De plus, un n-champ pour la topologie *fppf* et qui possède un n-atlas plat (*fppf*) est un n-champ d'Artin (i.e. possède aussi un n-atlas lisse). Nous déduisons de ces deux résultats un théorème de comparaison entre cohomologies étale et *fppf* (à coefficients dans des schémas en groupes non nécessairement lisses ou encore non-abéliennes). Ce travail est écrit dans le contexte des champs dérivés de Toën et Vezzosi, et ces résultats vallent donc aussi pour des n-champs d'Artin dérivés.

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce travail est de démontrer l'équivalence de deux notions, à priori différentes, de n-champs algébriques.[1] Comme cela est expliqué dans [TV08, § 1.3], il existe une notion

[1] Par la suite, l'expression *champs* fera toujours référence à la notion de champs supérieurs. Les champs en groupoïdes seront alors appelés des 1-*champs*.

Received 7 May 2010, accepted in final form 7 September 2010, published online 25 July 2011.
2000 Mathematics Subject Classification 14A20.
Keywords: n-Champs d'Artin, descente fidèlement plate, cohomologie non-abélienne.

générale de *champs (n-)géométriques*, qui dépend du choix d'un couple $(\tau, \mathbf{P})$, formé d'une topologie de Grothendieck τ sur le site des schémas affines, et d'une classe de morphismes $\mathbf{P}$ entre schémas affines, et satisfaisant à certaines conditions de compatibilité. Par définition, les champs géométriques pour le coupe $(\tau, \mathbf{P})$ sont obtenus en recollant des schémas affines le long de relations d'équivalences itérées de type $\mathbf{P}$. Si $\tau = et$ est la topologie étale, et $\mathbf{P} = et$ la classe des morphismes étales, la notion de champs géométriques correspondante est celle de champs algébriques de Deligne–Mumford, ou plus précisément son extension au cadre des champs supérieurs. Si $\tau = et$ est la topologie étale et $\mathbf{P} = li$ est la classe des morphismes lisses, alors la notion de champs géométriques correspond à celle de champs algébriques d'Artin (au sens de [Sim96] et de [TV08, § 2.1]). Dans ce travail nous intéresserons au cas du couple (*fppf*, *pl*), formé de la topologie fidèlement plate et de présentation finie (notée *fppf*), et de la classe *pl* des morphismes plats de présentation finie. Notre résultat principal affirme que les champs géométriques pour le couple (*fppf*, *pl*) sont exactement les champs géométriques pour le couple (*et*, *li*), c'est à dire les champs algébriques d'Artin.

THÉORÈME 0.1. *Le foncteur* champ associé pour la topologie *fppf induit une équivalence de la catégorie des champs géométriques pour le couple (et, li) avec celle des champs géométriques pour le couple (fppf, pl).*

De manière équivalente, le théorème précédent peut aussi s'énoncer en deux assertions, l'une concernant la pleine fidèlité et l'autre l'essentielle surjectivité :

(1) un champ géométrique pour le couple (*et*, *li*) est un champ pour la topologie *fppf* ;

(2) un champ pour la topologie *fppf*, qui possède un atlas plat et localement de présentation finie, possède un atlas lisse.

La première assertion affirme que la cohomologie non-abélienne, pour la topologie étale et à valeurs dans un champs algébrique d'Artin, peut aussi se calculer en utilisant la topologie *fppf*. Il s'agit donc d'un énoncé de comparaison entre cohomologie étale et *fppf*, qui généralise le fait bien connu $H^i_{et}(X, G) \simeq H^i_{fppf}(X, G)$, pour X un schéma et G un schéma en groupes abéliens lisse (voir [Gro68, Appendice 11]). La seconde assertion est une généralisation au cadre des champs supérieurs d'un théorème d'Artin qui affirme que le 1-champ quotient d'un groupoïde plat et de présentation finie dans les schémas peut aussi s'écrire comme le 1-champ quotient d'un groupoïde lisse (voir par exemple [LM-B00]). Comme nous le verrons, il se trouve que le point (1) est une conséquence du point (2) (voir notre lemme 2.2). Le contenu du théorème 0.1 est donc essentiellement le fait que l'existence d'un atlas plat et localement de présentation finie implique l'existence d'un atlas lisse.

Le théorème 2.1 possède plusieurs conséquences intéressantes. L'une est l'existence d'une théorie des *n-gerbes algébriques*, généralisation d'ordre supérieur des gerbes algébriques de [LM-B00], et de l'existence de gerbes résiduelles (ce qui implique, entre autre, la représentabilité des faisceaux d'homotopie). Nous ne présenterons pas ces conséquences dans ce travail, et nous renvoyons le lecteur à [Toe05, §§ 2.2, 2.3], où il trouvera, de plus, des applications aux invariants cohomologiques des n-champs d'Artin. En contre partie, nous avons inclu des applications à la comparaison entre cohomologies (non-abéliennes) étales et *fppf*. Pour G un champ en groupes lisses, nous montrons que les espaces $H^1_{et}(X, G)$ et $H^1_{fppf}(X, G)$ coincident, généralisant ainsi l'énoncé analogue pour des schémas en groupes. Travailler avec des champs supérieurs nous permet d'introduire la notion de champs en k-groupes G, qui possède des champs classifiants $K(G, i)$ pour tout $i \leqslant k$, ce qui permet ainsi de définir les espaces $H^i_\tau(X, G)$ pour tout $i \leqslant k$

(pour τ une des deux topologies et ou *fppf*). Lorsqu'un tel G est plat de localement de présentation finie le théorème 0.1 implique que $K(G,i)$ est un champ géométrique, lisse lorsque $i>0$. Nous tirons de cela, pour tout schéma en groupes abéliens plats et localement de présentation finie G, et tout schéma X, l'existence d'une suite exacte longue

$$H^{i-2}_{et}(X, \underline{H}^1_{fppf}(-,G)) \longrightarrow H^i_{et}(X,G) \longrightarrow H^i_{fppf}(X,G) \\ \longrightarrow H^{i-1}_{et}(X, \underline{H}^1_{fppf}(-,G)) \longrightarrow H^{i+1}_{et}(X,G),$$

où $\underline{H}^1_{fppf}(-,G)$ est le faisceau, pour la topologie étale, associé au préfaisceau $U \mapsto H^1_{fppf}(U,G)$. Ceci s'exprime aussi en disant que $\mathbb{R}^i f_*(G)=0$ pour tout $i>1$, où f est le morphisme géométrique de passage de la topologie *fppf* à la topologie étale. Dans le même genre d'idée, si A est un anneau hensélien excellent de corps résiduel k, et si G est un schéma en groupes plat et localement de présentation finie sur A, de fibre spéciale G_0, alors nous montrons que le morphisme de restriction

$$H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G) \longrightarrow H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, k, G_0)$$

est un isomorphisme pour $i>1$, et surjectif pour $i=1$. Nous n'avons pas trouvé d'énoncés dans ce goût dans la littérature, et il est possible que ces deux résultats soient nouveaux.

La stratégie de preuve du théorème 0.1 est tout à fait analogue à celle utilisée dans [LM-B00] pour traiter le cas des 1-champs. Le point clé est la construction, à partir d'un recouvrement plat et localement de présentation finie entre schémas $p: X' \to X$, d'un recouvrement lisse $Y \to X$. Le schéma Y est le schéma des *quasi-sections quasi-lisses* de la projection p, qui classifie les extensions finies plates $Z \to X$ munies d'un morphisme *l.c.i.* $Z \to X'$ au-dessus de X. Le principal apport de ce travail est de montrer que cette construction reste raisonnable lorsque p est maintenant un atlas *fppf* de n-champs, ce qui complique considérablement les détails techniques. Cependant, les étapes de la preuve que nous donnons suivent essentiellement celles dans le cas des schémas, avec même une simplification pour démontrer la lissité de Y, due à l'utilisation du langage de la géométrie algébrique dérivée (ce qui permet de ramener la preuve de la lissité de $Y \to X$ au *simple calcul* d'un espace cotangent). L'intégralité de ce travail est d'ailleur écrit dans le langage des champs dérivés de [TV08], et notre théorème 0.1 est donc aussi valable dans ce contexte.

Notation et terminologie

- k : un anneau commutatif de base fixé, ou plus généralement un anneau commutatif simplicial (pour les lecteurs *braves*).
- $sk-C\mathrm{Alg}$: la catégorie des k-algèbres simpliciales.
- $d\mathrm{Aff}_k := (sk-C\mathrm{Alg})^{\mathrm{op}}$: la catégorie des k-schémas affines dérivés.
- τ : une topologie de modèles sur $d\mathrm{Aff}_k$, ou bien la topologie étale, ou bien la topologie *fppf*.
- τ-champ dérivé : un champ sur le site de modèles $(d\mathrm{Aff}_k, \tau)$.
- τ-champ non dérivé (ou tronqué) : un champ sur le site Aff_k des k-schémas affines (non dérivés) munie de la topologie τ induite.
- $d\mathrm{St}_\tau(k)$: la catégorie des τ-champs dérivés.
- $\mathrm{St}_\tau(k)$: la catégorie des τ-champs non dérivés, vue comme sous-catégorie pleine de $d\mathrm{St}_\tau(k)$.

1. Deux notions de champs dérivés n-géométriques

Dans cette section nous rappelons la notion de n-champs géométriques introduite dans [TV08, § 1.3]. Nous travaillerons au-dessus de la catégorie de modèles des k-algèbres simpliciales, dont nous ferons varier la topologie τ ainsi que la classe de morphismes $\mathbf{P}$ utilisée pour définir les atlas. Le lecteur trouvera le formalisme général des champs géométriques au-dessus d'un homotopical algebraic geometry (HAG) contexte dans [TV08], dont les notions présentées ici sont des cas particuliers.

1.1 Changement de topologie et de contextes pour les champs dérivés

Nous notons $sk-C\mathrm{Alg}$ la catégorie des k-algèbres simpliciales commutatives, que nous munissons de sa structure de modèles standard (voir par exemple [TV08, § 2.2.1]). Nous notons aussi $d\mathrm{Aff}_k := sk-C\mathrm{Alg}^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée, muni de la structure de modéles induite. Soit τ une (prè-)topologie de modèles sur $d\mathrm{Aff}_k$ (voir [TV05, § 4.3]). Cette topologie donne lieu à une topologies de Grothendieck sur $\mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k)$ (encore notées τ) ainsi qu'à la catégorie de modèles des champs sur $d\mathrm{Aff}_k$ qui lui correspond (voir [TV05, § 4.6]) $d\mathrm{Aff}_k^{\sim,\tau}$. La catégorie homotopique des champs dérivés pour τ (nous dirons aussi *τ-champ dérivés*, ou encore *champ dérivé* si la topologie τ est soit implicite, ou bien si l'énoncé ne dépend pas de la topologie choisie) est

$$d\mathrm{St}_\tau(k) := \mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k^{\sim,\tau}).$$

Rappelons que $d\mathrm{St}_\tau(k)$ s'identifie naturellement à la sous-catégorie pleine de la catégorie homotopique $\mathrm{Ho}(\mathrm{SPr}(d\mathrm{Aff}_k))$, des préfaisceaux simpliciaux sur $d\mathrm{Aff}_k$, formée des objets qui d'une part préservent les équivalences, et d'autre part possèdent la propriété de descente pour les τ-hyper-recouvrements (voir [TV05, § 4.4]). Par la suite nous verrons toujours $d\mathrm{St}_\tau(k)$ comme plongée dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{SPr}(d\mathrm{Aff}_k))$.

La catégorie des τ-champs dérivés contient une sous-catégorie pleine $\mathrm{St}_\tau(k) \subset d\mathrm{St}_\tau(k)$, formée des τ-champs *non-dérivés* (nous dirons aussi *tronqués*). La catégorie $\mathrm{St}_\tau(k)$ est équivalente à la catégorie homotopique des préfaisceaux simpliciaux sur le site des schémas affines (non-dérivés) Aff_k, muni de la topologie τ restreinte aux k-algèbres non-simpliciales. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{St}_\tau(k) \hookrightarrow d\mathrm{St}_\tau(k)$ est alors obtenu par extension de Kan à gauche des préfaisceaux simpliciaux le long de l'inclusion naturelle $\mathrm{Aff}_k \hookrightarrow d\mathrm{Aff}_k$ induite par l'inclusion des k-algèbres dans les k-algèbres simpliciales (qui consiste à voir une k-algèbre comme une k-algèbre simpliciale constante). Ce foncteur d'inclusion $i : \mathrm{St}_\tau(k) \longrightarrow d\mathrm{St}_\tau(k)$ possède un adjoint à droite

$$t_0 : d\mathrm{St}_\tau(k) \longrightarrow \mathrm{St}_\tau(k),$$

qui à un préfaisceaux simplicial sur $d\mathrm{Aff}_k$ associe sa restriction à Aff_k. Par la suite, nous identifierons systématiquement $\mathrm{St}_\tau(k)$ à une sous-catégorie pleine de $d\mathrm{St}_\tau(k)$, formée des F tels que le morphisme naturel $t_0(F) \longrightarrow F$ soit un isomorphisme. Nous renvoyons à [TV08, § 2.1] pour plus de détails sur les champs non-dérivés.

Soient maintenant une classe de morphismes $\mathbf{P}$ dans $\mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k)$. Nous supposerons que la topologie τ satisfait les conditions [TV08, 1.3.2.2]. Nous supposerons aussi que le couple $(\tau, \mathbf{P})$ satisfait les conditions [TV08, 1.3.2.11]. Nous ne rappelons pas ces conditions ici, qui affirment, en gros, que la topologie τ est sous-canonique, compatible avec les sommes disjointes finies, et que les morphismes de $\mathbf{P}$ ont de bonnes propriétés de localité par rapport à τ. Par la suite nous intéresserons à deux exemples : τ sera la topologie étale et $\mathbf{P}$ les morphismes lisses, ou encore τ sera la topologie *fppf* et $\mathbf{P}$ sera les morphismes plats et de présentation presque finie (dont les définitions seront rappelées dans les deux paragraphes suivants).

La donnée du couple $(\tau, \mathbf{P})$ permet, comme cela est expliqué dans [TV08, Definition 1.3.3.1], de définir une notion de champs dérivés $(n, \mathbf{P})$-géométriques. Les champs dérivés $(n, \mathbf{P})$-géométriques forment une sous-catégorie pleine de $d\mathrm{St}_\tau(k)$, notée $d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k)$. On a des inclusions naturelles

$$d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k) \subset d\mathrm{St}_\tau^{n+1,\mathbf{P}}(k) \subset d\mathrm{St}_\tau(k),$$

et la réunion de ces sous-catégories sera notée

$$d\mathrm{St}_\tau^{\mathbf{P}}(k) := \bigcup_n d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k).$$

Rappelons la définition, par induction sur n, des catégories $d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k)$. Pour $n=0$, la sous-catégorie $d\mathrm{St}_\tau^{0,\mathbf{P}}(k)$ consiste en tous les champs dérivés affines, c'est à dire de la forme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$ pour un $A \in sk - C\mathrm{Alg}$.[2] Les conditions sur τ impliquent que le foncteur

$$\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}} : \mathrm{Ho}(sk - C\mathrm{Alg})^{\mathrm{op}} \longrightarrow d\mathrm{St}_\tau(k)$$

est pleinement fidèle. Ainsi, $d\mathrm{St}_\tau^{0,\mathbf{P}}$ est naturellement équivalente à la catégorie $\mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k)$ (et se trouve donc être indépendante du choix de $\mathbf{P}$ et de τ). Un morphisme entre champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est dit 0-géométrique (ou affine), si pour tout X affine et tout $X \longrightarrow G$, le champ dérivé $F \times_G^h X$ est 0-géométrique. Un tel morphisme est de plus dans $\mathbf{P}$ si la projection induite $X \longrightarrow F \times_G^h X$ correspond à un morphisme de $\mathbf{P}$ dans $\mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k)$.

Supposons maintenant $n > 0$ et que la catégorie $d\mathrm{St}_\tau^{n-1,\mathbf{P}}(k)$ soit définie, ainsi que la notion de morphismes $(n-1, \mathbf{P})$-représentables et de morphismes $(n-1, \mathbf{P})$-représentables dans $\mathbf{P}$. On définit alors la sous-catégorie $d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k)$, ainsi que les notions de morphismes $(n, \mathbf{P})$-représentables et de morphismes $(n, \mathbf{P})$-représentables et dans $\mathbf{P}$, de la façon suivante.

(1) Un champ dérivé $F \in d\mathrm{St}_\tau(k)$ est $(n, \mathbf{P})$-géométrique s'il existe une famille $\{X_i\}_i$ d'affines, et un épimorphisme de champs

$$\coprod_i X_i \longrightarrow F$$

tel que chaque morphisme $X_i \longrightarrow F$ soit un morphisme $(n-1, \mathbf{P})$-géométrique et dans $\mathbf{P}$. Une telle donnée pour F sera appelée par la suite un $(n, \mathbf{P})$-*atlas pour* F.

(2) Un morphisme de champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est $(n, \mathbf{P})$-représentable (nous dirons aussi $(n, \mathbf{P})$-géométrique) si pour tout affine X, et tout morphisme $X \longrightarrow G$, le champ dérivé $F \times_G^h X$ est $(n, \mathbf{P})$-géométrique.

(3) Un morphisme de champs dérivés $f : F \longrightarrow G$ est $(n, \mathbf{P})$-représentable et dans $\mathbf{P}$ s'il est d'une part $(n, \mathbf{P})$-représentable, et d'autre part si pour tout $X \longrightarrow G$ avec X affine, il existe un $(n, \mathbf{P})$-atlas

$$\coprod_i X_i \longrightarrow F \times_G^h X$$

tel que tous les morphismes induits $X_i \longrightarrow X$ entre champs affines soient dans $\mathbf{P}$.

Supposons maintenant que l'on se donne deux topologies de modèles τ et τ', et deux classes de morphismes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$, de sorte à ce que les couples $(\tau, \mathbf{P})$ et $(\tau', \mathbf{P}')$ satisfassent tous deux aux conditions [TV08, 1.3.2.2, 1.3.2.11]. Nous supposerons que le couple $(\tau, \mathbf{P})$ est *plus fort* que $(\tau', \mathbf{P}')$ au sens suivant.

[2] Les conventions de ce travail diffèrent de celles de [TV08], les objets affines dans [TV08] étant (-1)-géométriques.

(1) Tout τ-champ dérivé est un τ'-champ dérivé.

(2) On a $\mathbf{P}' \subset \mathbf{P}$.

La condition (1) ci-dessus dit qu'un préfaisceau simplicial $F : d\mathrm{Aff}_k^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{SEns}$, qui présèrve les équivalences et qui vérifie la condition de descente pour les τ-hyper-recouvrements, vérifie aussi la condition de descente pour les τ'-hyper-recouvrements. En identifiant les catégories $d\mathrm{St}_\tau(k)$ et $d\mathrm{St}_{\tau'}(k)$ à des sous-catégories pleines de $\mathrm{Ho}(\mathrm{SPr}(d\mathrm{Aff}_k))$, cette condition est équivalente au fait que $d\mathrm{St}_\tau(k) \subset d\mathrm{St}_{\tau'}(k)$.

Considérons maitenant le foncteur d'inclusion

$$i : d\mathrm{St}_\tau(k) \longrightarrow d\mathrm{St}_{\tau'}(k).$$

Le foncteur de champs associés pour la topologie τ, restreint à $d\mathrm{St}_{\tau'}(k)$, fournit un adjoint à gauche de ce foncteur d'inclusion

$$a : d\mathrm{St}_{\tau'}(k) \longrightarrow d\mathrm{St}_\tau(k).$$

Rappelons de plus que ce foncteur, ou plutôt son relevé naturel au niveau des catégories de modèles, commute aux limites homotopiques finies (voir [TV05, Proposition 3.4.10]). Cette propriété d'exactitude et la condition $\mathbf{P}' \subset \mathbf{P}$ impliquent alors facilement (c'est à dire en utilisant les propriétés élémentaires des champs géométrique données dans [TV08, § 1.3.3]), par induction sur n, que le foncteur a transforme les τ'-champs dérivés $(n, \mathbf{P}')$-géométriques en des τ-champs dérivés $(n, \mathbf{P})$-géométriques. Il induit ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, un foncteur

$$a : d\mathrm{St}_{\tau'}^{n,\mathbf{P}'}(k) \longrightarrow d\mathrm{St}_\tau^{n,\mathbf{P}}(k).$$

1.2 Champs dérivés (n, li)-géométriques et (n, pl)-géométriques

Nous spécifions dans ce paragraphe deux couples $(\tau, \mathbf{P})$ et $(\tau', \mathbf{P}')$ comme dans le paragraphe précédent. Le premier couple $(\tau, \mathbf{P})$ sera formé de la topologie fidèlement plate de présentation (presque) finie et des morphismes plats de présentation (presque) finie, et le second, $(\tau', \mathbf{P}')$, de la topologie étale et des morphismes lisses. Nous commencerons donc par rappeler les définitions des morphismes étales, lisses, plats et plats de présentation presque finie entre k-algèbres simpliciales commutatives. Soit donc $f : A \longrightarrow B$ un morphisme dans $sk - C\mathrm{Alg}$. On rappelle les notions suivantes, qui sont essentiellement tirées de [TV08] (sauf la notion (1)), référence dans laquelle le lecteur trouvera aussi des définitions équivalentes en termes de complexes cotangents ou d'exactitude de foncteurs de changement de bases.

(1) Le morphisme f est *de présentation presque finie* si le morphisme induit $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme de présentation finie d'anneaux commutatifs.

(2) Le morphisme f est *plat* si le morphisme $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est plat, et si de plus pour tout $i > 0$ le morphisme naturel

$$\pi_i(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_i(B)$$

est un isomorphisme.

(3) Le morphisme f est *lisse* s'il est plat et si de plus $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme lisse (en particulier de présentation finie) d'anneaux commutatifs.

(4) Le morphisme f est *étale* s'il est plat et si de plus $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme étale (en particulier de présentation finie) d'anneaux commutatifs.

On montre que les morphismes plats, plats de présentation presque finie, lisses et étales sont stables par changement de bases (homotopiques) dans $\mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k)$ et par composition. Cela se

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

déduit aisément du fait que lorsque $A \longrightarrow B$ est plat, alors pour tout A-module simplicial M le morphisme naturel

$$\pi_*(M) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_*(M \otimes^{\mathbb{L}}_A B)$$

est un isomorphisme.

Remarque 1.1. Les morphismes lisses et étales définis ci-dessus sont *(homotopiquement) de présentation finie* dans la catégorie de modèles $sk - C\mathrm{Alg}$ (voir [TV08, Definition 1.2.3.1]). Cependant les morphismes de présentation presque finie ne sont pas de présentation finie en ce sens, ni même les morphismes plats et de présentation presque finie. Par exemple, si k est un corps, toute k-algèbre de type finie est presque de présentation finie et plate au sens ci-dessus, mais elle n'est homotopiquement de présentation finie dans $sk - C\mathrm{Alg}$ que lorsqu'elle est localement d'intersection complète.

Pour finir, une famille de morphismes $\{A \longrightarrow A_i\}$ dans $sk - C\mathrm{Alg}$ est *surjective*, si le morphisme de schémas

$$\{\mathrm{Spec}\, \pi_0(A_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}\, \pi_0(A)\}$$

est surjectif (i.e. tout idéal premier de $\pi_0(A)$ se relève en un idéal premier d'un des $\pi_0(A_i)$). Nous dirons alors qu'une telle famille $\{A \longrightarrow A_i\}$ est un *recouvrement plat et de présentation presque finie*, si tous les morphismes $A \longrightarrow A_i$ sont plats et de présentation presque finie, et si de plus la famille $\{A \longrightarrow A_i\}$ est surjective. De même, une telle famille est un *recouvrement étale* si tous les morphismes $A \longrightarrow A_i$ sont étales, et si de plus la famille $\{A \longrightarrow A_i\}$ est surjective. On voit sans peine que les recouvrements plats et de présentation presque finie, et les recouvrement étale, forment deux topologie de modèles sur $d\mathrm{Aff}_k$. Ces deux topologies seront respectivement appelées les topologies *plate et de présentation presque finie*, et *étale*. La topologie plate et de présentation presque finie sera symbôliquement notée *fppf*. La topologie étale sera notée *et*.

Nous considérons maintenant *pl*, la classe des morphismes plats et de présentation presque finie dans $d\mathrm{Aff}_k$, et *li* celle des morphismes lisses. Les couples (*et*, *li*) et (*fppf*, *pl*) satisfont aux conditions de [TV08, 1.3.2.2, 1.3.2.11]. De plus, le couple (*fppf*, *pl*) est clairement plus fort que le couple (*et*, *li*). On dispose donc d'un foncteur entre les catégories de champs dérivés n-géométriques correspondantes

$$\phi_n : d\mathrm{St}^{n,li}_{et} \longrightarrow d\mathrm{St}^{n,pl}_{fppf}$$

induit par le foncteur de champ associé pour la topologie *fppf*.

Pour terminer cette section signalons l'aspect local pour la topologie *fppf* de la lissité. Ce résultat nous sera utile par la suite.

Proposition 1.2. *Soit $X \longrightarrow Y$ un morphisme dans $d\mathrm{Aff}_k$. Alors, f est lisse si et seulement s'il existe un recouvrement fppf $\{X_i \longrightarrow X\}$ tel que les morphismes composés $X_i \longrightarrow Y$ soient lisses.*

Preuve. Seule la suffisance demande une preuve. Soit $X = \mathrm{Spec}\, B$, $Y = \mathrm{Spec}\, A$, et $X_i = \mathrm{Spec}\, B_i$. On commence par voir que $A \longrightarrow B$ est un morphisme plat. En effet, la famille de morphismes d'anneaux non simpliciaux $\{\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)\}$ est fidèlement plate par hypothèse, et les morphismes composés $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B_i)$ sont plats. Cela implique que $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est un morphisme plat. Il faut de plus montrer que le morphisme

$$f : \pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \longrightarrow \pi_*(B)$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

est bijectif. Mais, par changement de base le long de $\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)$ ce morphisme devient

$$\pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \otimes_{\pi_0(B)} \pi_0(B_i) \simeq \pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B_i) \longrightarrow \pi_0(B_i).$$

Par hypothèse ces morphismes sont bijectifs, et comme $\{\pi_0(B) \longrightarrow \pi_0(B_i)\}$ est un recouvrement fidèlement plat on en déduit que f est bijectif.

On vient de voir que $A \longrightarrow B$ est un morphisme plat. Il nous reste à montrer que $\pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(B)$ est aussi lisse. Pour cela on peut sans perte de généralité supposer que $A = \pi_0(A)$ (et donc $B \simeq \pi_0(B)$, $B_i \simeq \pi_0(B_i)$), et l'énoncé se ramène alors à la localité pour la topologie *fppf* des morphismes lisses entre anneaux non simpliciaux. Ce dernier fait est bien connu (voir par exemple [Gro67, Proposition 17.7.7]), et peut se démontrer de la façon suivante. Soit donc un morphisme plat $A \longrightarrow B$, et un recouvrement *fppf* $\{B \longrightarrow B_i\}$, tel que chaque $A \longrightarrow B_i$ soit un morphisme lisse, tout cela pour des anneaux commutatifs non simpliciaux. En particulier $A \longrightarrow B_i$ est de présentation finie, et cela implique par descente fidèlement plate que $A \longrightarrow B$ est un morphisme de présentation finie. On pourra donc, par l'argument standard, se ramener au cas où tous les anneaux sont de type fini sur $\mathbf{Z}$, et en particulier noethériens (voir par exemple [Gro66, Corollaire 11.2.6.1]). Il reste à montrer que $A \longrightarrow B$ est aussi formellement lisse, ou de manière équivalente que pour tout corps algébriquement clos K et tout morphisme $A \longrightarrow K$, la K-algèbre $B_K := B \otimes_A K$ est lisse. On se ramène ainsi au cas où $A = K$ est un corps algébriquement clos. On dipose ainsi de B une K-algèbre de type finie, d'un recouvrement *fppf* $\{B \longrightarrow B_i\}$, tel que chaque B_i soit lisse sur K. Pour montrer que B est lisse, il suffit de montrer que B est de dimension homologique finie comme $B \otimes_K B$-module (théorème de Serre), ou de manière équivalente de Tor-dimension finie. Or, par hypothèse cette Tor-dimension est localement, pour la topologie *fppf*, finie sur $\operatorname{Spec} B$, ce qui par descente *fppf* de la platitude implique aussi qu'elle est localement finie pour la topologie de Zariski. Par quasi-compacité on conclut qu'elle est finie. □

2. Le théorème de comparaison

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, le foncteur*

$$\phi_n : d\mathrm{St}_{et}^{n,li} \longrightarrow d\mathrm{St}_{fppf}^{n,pl}$$

est une équivalence de catégories.

Avant d'entrer dans les détails de la preuve signalons quelques réductions faciles.

Lemme 2.2. *Soit $n > 0$.*

(1) *Le foncteur ϕ_n est pleinement fidèle si tout et-champ dérivé qui est (n, li)-géométrique est aussi un fppf-champ dérivé.*

(2) *Si le foncteur ϕ_{n-1} est une équivalence alors le foncteur ϕ_n est pleinement fidèle.*

Preuve. (1) Le foncteur ϕ_n est la restriction du foncteur a, de champ associé pour la topologie *fppf*, qui possède comme adjoint à droite le foncteur d'inclusion $d\mathrm{St}_{fppf}(k) \subset d\mathrm{St}_{et}(k)$. Ainsi, ϕ_n est pleinement fidèle si pour tout $F \in d\mathrm{St}_{et}^{n,li}$, le morphisme d'adjonction

$$F \longrightarrow a(F)$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

est un isomorphisme dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$. Or, $F \longrightarrow a(F)$ est un isomorphisme précisément lorsque F est un *fppf*-champ dérivé.

(2) Soit $F \in d\mathrm{St}_{et}^{n,li}$. D'après (1) il nous suffit de montrer que le morphisme d'adjonction $f : F \longrightarrow \phi_n(F)$ est un isomorphisme dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$. Soient X et Y deux objets affines et considérons deux morphismes $X, Y \longrightarrow F$. Alors, en utilisant que ϕ_{n-1} est pleinement fidèle, on voit que le morphisme induit

$$X \times^h_F Y \longrightarrow \phi_{n-1}(X \times^h_F Y) \simeq X \times^h_{\phi_{n-1}(F)} Y$$

est un isomorphisme. Ceci implique que le morphisme f est un monomorphisme (voir [TV08, Remark 1.2.6.2]). Il nous reste donc à montrer que f est aussi un épimorphisme de champs dérivés pour la topologie étale. Soit X un objet affine, et $x : X \longrightarrow \phi_n(F)$ un morphisme. On doit montrer qu'il existe un recouvrement étale $Y \longrightarrow X$ et un relèvement $Y \longrightarrow F$ du point x, c'est à dire que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \phi_n(F) \end{tikzcd}$$

commute dans $d\mathrm{St}_{et}$. Soit $U = \coprod U_i \longrightarrow F$ un n-atlas lisse pour F. On considère le morphisme induit

$$\phi_n(U) \simeq U \longrightarrow \phi_n(F),$$

ainsi que

$$U_X := U \times^h_{\phi_n(F)} X \longrightarrow X.$$

On remarquera que U_X est le produit fibré homotopique de champs dérivés étales qui sont aussi des champs dérivés *fppf*, et donc est lui même un champs pour la topologie *fppf*. Comme $\phi_n(F)$ est le *fppf*-champ associé à F, il existe un recouvrement *fppf* $X' \longrightarrow X$ et un relèvement $X' \longrightarrow F$ de x. En utilisant que $F \longrightarrow \phi_n(F)$ est un monomorphisme, on trouve

$$U_{X'} := U_X \times^h_X X' \simeq U \times^h_F X',$$

ce qui montre que $U_{X'}$ est dans $d\mathrm{St}_{et}^{n-1,li}$. Soit $V = \coprod V_i \longrightarrow U_{X'}$ un $(n-1, li)$-atlas. Le composé $V \longrightarrow U_X$ est un morphisme de *fppf*-champs dérivés qui est $(n-2, pl)$-représentable, plat de présentation presque finie et surjectif. Ainsi, $U_X \in d\mathrm{St}_{fppf}^{n-1,pl}$, et comme ϕ_{n-1} est une équivalence on voit que $U_X \in d\mathrm{St}_{et}^{n-1,li}$. De plus, le morphisme $U \longrightarrow F$ étant lisse surjectif, le morphisme induit $U_{X'} \longrightarrow X'$ est encore lisse surjectif. Comme le morphisme $X' \longrightarrow X$ est fidèlement plat cela implique que $U_X \longrightarrow X$ est lisse et surjectif. Ainsi, il existe un recouvrement étale $Y \longrightarrow X$ et un relèvement $Y \longrightarrow U_X$ de la projection $U_X \longrightarrow X$. En composant avec les morphismes $U_X \longrightarrow U \longrightarrow F$, on trouve le relèvement du point x cherché. □

Ainsi, pour démontrer le théorème 2.1 nous procéderons par induction sur n. Pour $n = 0$ l'énoncé est évident car les champs dérivés 0-géométriques sont toujours les objets affines, et ce quelques soit le couple $(\tau, \mathbf{P})$ (toujours satisfaisant aux deux mêmes conditions). On se fixe alors $n > 0$, et on suppose que ϕ_i soit une équivalence pour tout $i < n$. Par le lemme 2.2 il nous suffit donc de démontrer que ϕ_n est essentiellement surjectif. La démonstration de cette dernière assertion se fera en plusieurs étapes.

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

2.1 Le champ dérivé des extensions finies et strictement finies

Dans cette section nous définissons des et-champs dérivés $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ et $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$, classifiant les schémas dérivés affines et de longueur finie fixée m. L'objet $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$ est une version rigidifiée de $\underline{\mathrm{Fin}}_m$, de sorte que $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$ soit affine et qu'il existe un morphisme naturel $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}_m$ qui soit un Gl_m-torseur. Cela implique en particulier que $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est un et-champ dérivé $(1, li)$-géométrique.

Pour commencer, nous dirons qu'un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $sk - C\mathrm{Alg}$ est *fini et plat* si le A-module B est projectif de type fini au sens de [TV08, § 1.2.4]. Rappelons que cela signifie que B est isomorphe, dans $\mathrm{Ho}(sB - \mathrm{Mod})$ (la catégorie homotopique des B-modules simpliciaux), à un rétracte d'un A-module de la forme A^m, pour un certain entier m. En particulier, si K est un corps et $A \longrightarrow K$ un morphisme, $B_K := B \otimes_A^{\mathbb{L}} K$ est isomorphe, dans $\mathrm{Ho}(sK - \mathrm{Mod})$ à un K-espace vectoriel de dimension finie. Nous dirons alors que $A \longrightarrow B$, plat fini, est de rang m si pour tout corps K et tout morphisme $A \longrightarrow K$ on a $\dim_K(B \otimes_A^{\mathbb{L}} K) = m$.

Par définition, $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est le foncteur qui associe à $A \in sk - C\mathrm{Alg}$ le nerf de la catégorie des équivalences entre A-algèbres plates, finies et de rang m. La construction précise de ce foncteur utilise, par exemple, la notion générale de préfaisceaux de Quillen (voir [TV08, Appendix B], ou aussi la fin du § 2.3 de [Toe09]). Concrètement le foncteur

$$\underline{\mathrm{Fin}}_m : sk - C\mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{SEns}$$

se construit de la façon suivante. Pour $A \in sk - C\mathrm{Alg}$ on considère $sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$, la catégorie dont les objets sont les cofibrations de k-algèbres simpliciales $A \longrightarrow B$, avec B plat et fini, de rang m. Les morphismes dans $sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & B' \\ & A \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

avec f une équivalence faible. Si l'on a $A \longrightarrow A'$, un morphisme dans $sk - C\mathrm{Alg}$, on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$A' \otimes_A - : sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}} \longrightarrow sA' - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}.$$

La construction $A \mapsto sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$ définit de cette façon un pseudo-foncteur $sk - C\mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{Cat}$, que l'on rectifie, à équivalence près, par la construction de Grothendieck usuelle (voir par exemple [TV08, Appendix B]), afin d'obtenir un vrai foncteur $sk - C\mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{Cat}$. Composé avec le foncteur nerf $\mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{SEns}$, on obtient le foncteur cherché

$$\underline{\mathrm{Fin}}_m : sk - C\mathrm{Alg} \longrightarrow \mathrm{SEns}.$$

La valeur de ce foncteur sur un objet $A \in sk - C\mathrm{Alg}$ est le nerf d'une catégorie qui est naturellement équivalente à $sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$, et l'on dispose ainsi d'isomorphismes fonctoriels dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{SEns})$

$$\underline{\mathrm{Fin}}_m(A) \simeq N(sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}).$$

On montre que le préfaisceau simplicial $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est un champ dérivé pour la topologie fpqc, et en particulier pour les topologies étales et *fppf* (voir par exemple [TV08, Theorem 1.3.7.2] pour les grandes étapes de la preuve).

L'oubli de la structure multiplicative fournit, pour tout $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, un foncteur $sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}} \longrightarrow sA - \mathrm{Mod}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$, où $sA - \mathrm{Mod}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$ est la catégorie des A-modules simpliciaux cofibrants, projectifs et de rang m. Cet oubli permet de construire un morphisme de

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

et-champs dérivés

$$\underline{\mathrm{Fin}}_m \longrightarrow \mathrm{Vect}_m \simeq BGl_m,$$

où Vect_m est le champ des fibrés vectoriels de rang n (voir [TV08, Definition 1.3.7.5]). La fibre homotopique de ce morphisme, prise au fibré vectoriel trivial sera notée $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$.

Proposition 2.3. *Le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$ est 0-géométrique (i.e. affine), et le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est $(1, li)$-géométrique.*

Preuve. Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le lemme de représentabilité suivant (voir [TV08, Appendix C] et [Lur] pour des versions plus générales). □

Lemme 2.4. *Soit F un et-champ dérivé. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) *Le et-champ tronqué $t_0(F)$ est affine.*

(2) *Le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times^h F$ est 0-représentable.*

(3) *F est nilcomplet : pour tout objet $A \in sk-C\mathrm{Alg}$, de tour de Postnikov*

$$A \longrightarrow \quad \longrightarrow \cdots A_{\leqslant k} \longrightarrow A_{\leqslant k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{\leqslant 0} = \pi_0(A)$$

le morphisme naturel

$$F(A) \longrightarrow \mathrm{Holim}_k F(A_{\leqslant k})$$

est une équivalence.

(4) *F est inf-cartésien : pour tout $A \in sk-C\mathrm{Alg}$, tout A-module connexe $M \in sA-\mathrm{Mod}$ (i.e. $\pi_0(M)=0$), et toute k-dérivation $d : A \longrightarrow A \oplus M$ (voir [TV08, § 1.2.1]), le carré homotopiquement cartésien suivant*

$$\begin{CD} A \oplus_d \Omega_* M @>>> A \\ @VVV @VV{(id,0)}V \\ A @>>{d}> A \oplus M \end{CD}$$

induit un carré homotopiquement cartésien.

$$\begin{CD} F(A \oplus_d \Omega_* M) @>>> F(A) \\ @VVV @VVV \\ F(A) @>>> F(A \oplus M) \end{CD}$$

Alors F est affine.

Preuve du lemme. Tout d'abord, les conditions (2) et (4) impliquent que F possède une théorie de l'obstruction au sens de [TV08, § 1.4.2] (voir [TV08, Proposition 1.4.2.7]). On choisit A_0, une k-algèbre commutative et un isomorphisme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_0 \longrightarrow t_0(F)$. En composant avec l'inclusion naturelle $t_0(F) \longrightarrow F$ on trouve un morphisme

$$u_0 : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_0 \longrightarrow F.$$

Ce morphisme induisant un isomorphisme sur les tronqués, on voit facilement que son complexe cotangent $\mathbb{L}_{u_0} \in \mathrm{Ho}(sA_0 - \mathrm{Mod})$ est 1-connexe (i.e. $\pi_0(\mathbb{L}_{u_0}) = \pi_1(\mathbb{L}_{u_0}) = 0$). Nous allons construire par induction un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d] & F \\
\vdots \arrow[d] & \\
\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_k \arrow[d] \arrow[uur, "u_k"] & \\
\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_{k+1} \arrow[d] \arrow[uuur, "u_{k+1}"'] & \\
\vdots &
\end{tikzcd}$$

où A_k est k-tronquée, le morphisme $A_{k+1} \longrightarrow A_k$ induit un isomorphisme sur les π_i pour $i < k+1$, et de sorte à ce que $\mathbb{L}_{u_k}$ soit $(k+1)$-connexe. On dispose donc d'un morphisme naturel de troncation $\mathbb{L}_{u_k} \longrightarrow \pi_{k+2}(\mathbb{L}_{u_k})[k+2]$ (où $(-)[m]$ désigne le foncteur de suspension itéré m-fois). Supposons que l'on ait construit $A_k \in sk - C\mathrm{Alg}$, et un morphisme $u_k : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_k \longrightarrow F$ comme ci-dessus. On pose $M_{k+1} := \pi_{k+2}(\mathbb{L}_{u_k})$, qui est un $\pi_0(A_k)$-module. Le morphisme naturel $\mathbb{L}_{A_k} \longrightarrow \mathbb{L}_{u_k}$ induit donc un morphisme $\mathbb{L}_{A_k} \longrightarrow M_{k+1}[k+2]$, et donc une extension de carré nul $A_{k+1} \longrightarrow A_k$, extension de A_k par le A_k-module simplicial $\Omega_* M_k[k+2] \simeq M_k[k+1]$ (voir [TV08, § 1.2.1]). Par construction de A_{k+1}, l'obstruction à étendre le morphisme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_k \longrightarrow F$ le long de $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_k$ s'annule de manière naturelle et il existe donc une extension bien définie (voir [TV08, Proposition 1.4.2.5])

$$u_{k+1} : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A_{k+1} \longrightarrow F.$$

Cette extension est telle que $\mathbb{L}_{u_{k+1}}$ est de plus $(k+2)$-connexe. Ceci finit de montrer l'existence de la tour des morphismes u_k comme ci-dessus.

On pose alors $A := \mathrm{holim}_k A_k$. D'après la condition (3), le systèmes des u_k définit un morphisme $u : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \longrightarrow F$. Par construction ce morphisme induit un isomorphisme sur les tronqués $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, \pi_0(A) \simeq t_0(F)$, mais aussi un isomorphisme sur les complexes cotangents (i.e. $\mathbb{L}_u \simeq 0$). On déduit de cela et de (3)–(4), en utilisant les invariants de Postnikov (voir [TV08, § 2.2.1]) que le morphisme u induit, pour tout $B \in sk - C\mathrm{Alg}$, une équivalence

$$(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A)(B) = \mathrm{Map}(A, B) \longrightarrow F(B).$$

On a donc bien $F \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$. □

Nous allons maintenant appliquer le lemme 2.4 au cas où $F = \underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$. Soit A une k-algèbre commutative non simpliciale. On commence par remarquer que le foncteur π_0 induit un foncteur adjoint à gauche de la catégorie $sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$ vers le groupoïde des A-modules projectifs de type fini. De cela on déduit aisément que le champ tronqué $t_0(sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}})$ est le champ usuel des schéma plats, finis et de longueur m. On déduit de cela aussi que $t_0(\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}})$ n'est autre que le faisceaux des structures de k-algèbres commutatives sur le module k^m, dont l'ensemble des valeurs sur une k-algèbre non simpliciale A est l'ensemble des structures de A-algèbres commuatives sur le A-module A^m. Ce foncteur est clairement représentable par

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

un schéma affine. Pour pouvoir appliquer le lemme 2.4 il nous faut donc démontrer que les conditions (2), (3) et (4) sont satisfaites pour $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$. Comme $\underline{\mathrm{Fin}}_m^{\mathrm{str}}$ est la fibre homotopique du morphisme $\underline{\mathrm{Fin}}_m \longrightarrow \mathrm{Vect}_m$, et que le champ dérivé Vect_m vérifie ces conditions (car il est $(1, li)$-géométrique), il nous suffit de montrer que $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ vérifie les conditions (2), (3) et (4) du lemme 2.4.

(2) Montrer que le diagonale du et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est 0-représentable est équivalent au fait suivant : soient $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, et B, B' deux A-algèbres simpliciales, cofibrantes et libres de rang m comme A-modules. Alors le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Eq}}(B, B')$ sur $\mathbb{R}\mathrm{Spec}\, A$, qui envoie une A-algèbre commutative A' sur l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{Eq}}(B \otimes_A A', B' \otimes_A A')$, des équivalences de A'-algèbres commutatives, est affine. Pour cela on considère le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B')$, de tous les morphismes entre B et B', et on commence par remarquer qu'il est affine. En écrivant B comme une colimite homotopique de A-algèbres simpliciales libres on se ramène au cas où B est une A-algèbre commutative libre sur un ensemble I (car les schémas dérivés affines sont stables par limites homotopiques). Dans ce cas on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}(B, B') \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, \mathrm{Sym}_A\left(\bigoplus_I (B')^\vee\right),$$

où $(B')^\vee$ est le A-module simplicial dual de B. On remarque ensuite que $\underline{\mathrm{Eq}}(B, B')$ est un ouvert Zariski de $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B')$. De plus, cet ouvert entre dans un carré homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Eq}}(B, B') \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}(B, B') \arrow[d] \\
Gl_m \arrow[r] & M_m
\end{tikzcd}$$

où M_m est le schéma affine des matrices $m \times m$, et le morphisme $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B') \longrightarrow M_m$ est obtenu en choisissant des isomorphismes dans $\mathrm{Ho}(sA - \mathrm{Mod})$ de B et B' avec A^m. Ceci termine la preuve que la diagonale de F est 0-représentable.

(3) En utilisant le point (2), et le fait qu'un champ dérivé affine vérifie les conditions (3) et (4), on remarque que le morphisme naturel

$$F(A) \longrightarrow \mathrm{Holim}_k F(A_{\leqslant k})$$

est un monomorphisme (i.e. est injectif sur les π_0 et un isomorphisme sur tous les π_i pour $i > 0$). Il reste donc à voir que ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes. Il est facile de voir qu'il existe une bijection entre $\pi_0(\mathrm{Holim}_k F(A_{\leqslant k}))$, et l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans $\mathrm{Holim}_k \mathrm{Ho}(sA_{\leqslant k} - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}})$. Ainsi, un élément de $\pi_0(\mathrm{Holim}_k F(A_{\leqslant k}))$ se représente par un système d'objets $B_k \in sA_{\leqslant k} - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}$, et des équivalences $B_{k+1} \otimes_{A_{\leqslant k+1}} A_{\leqslant k} \longrightarrow B_k$, de $A_{\leqslant k}$-algèbres simpliciales commutatives. A un tel système on associe

$$B := \mathrm{Holim}_k B_k \in \mathrm{Ho}(sA - C\mathrm{Alg}).$$

Il n'est pas difficile de voir que B est fini de rang m comme B-module simplicial, et qu'un remplacement cofibrant de B fournit un antécédent, à homotopie près, du système $\{B_k\}$ par le morphisme $F(A) \longrightarrow \mathrm{Holim}_k F(A_{\leqslant k})$.

(4) Tout comme pour le point (3), le morphisme en question est un monomorphisme. Pour montrer qu'il est aussi surjectif sur les composantes connexes on utilise le lemme [Toe06, Lemma 4.2] (ou plus précisèment sa version pour des sous-catégories de modèles stables par

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

équivalence). Nous laissons le lecteur vérifier que le carré de foncteur de Quillen

$$\begin{tikzcd} s(A \oplus_d \Omega_* M) - C\mathrm{Alg} \arrow[r] \arrow[d] & sA - C\mathrm{Alg} \arrow[d, "(id{,}0)"] \\ sA - C\mathrm{Alg} \arrow[r, "d"'] & s(A \oplus M) - C\mathrm{Alg} \end{tikzcd}$$

induit un carré homotopiquement cartésien.

$$\begin{tikzcd} N(s(A \oplus_d \Omega_* M) - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}) \arrow[r] \arrow[d] & N(sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}) \arrow[d, "(id{,}0)"] \\ N(sA - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}) \arrow[r, "d"'] & N(s(A \oplus M) - C\mathrm{Alg}^{\mathrm{fin},m,\mathrm{cof}}) \end{tikzcd}$$

Ceci termine la vérification que le champ dérivé Fin^m vérifie les conditions du lemme 2.4, et donc la preuve de la proposition 2.3. □

Le complexe cotangent du champ $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ peut se décrire de la façon suivante. Il s'agit du fait, bien connu, que les déformations infinitésimales d'une A-algèbre commutative projective et de rang finie sont décrites par la cohomologie d'André–Quillen.

Proposition 2.5. *Soit $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, et $u : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}_m$ un morphisme de champs dérivés correspondant à une A-algèbre commutative B projective et de rang m comme A-module. Notons*

$$B^\vee := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{sA-\mathrm{Mod}}(B, A)$$

le A-module dual de B, muni de sa structure de B-module naturelle. Alors, il existe un isomorphisme naturel dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}(sA - \mathrm{Mod}))$

$$\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Fin}}_m, u} \simeq \mathbb{L}_{B/A}[-1] \otimes^{\mathbb{L}}_B B^\vee.$$

Preuve. Soit $\Omega_u \underline{\mathrm{Fin}}_m$, le champ dérivé des lacets de base u dans $\underline{\mathrm{Fin}}_m$. Comme nous l'avons déjà vu lors de la preuve de la proposition 1.2, le champ dérivé $\Omega_u \underline{\mathrm{Fin}}_m$ est un ouvert du champ $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B)$, des endomorphismes de B comme A-algèbre simpliciale. On a ainsi

$$\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Fin}}_m}[1] \simeq \mathbb{L}_{\Omega_u \underline{\mathrm{Fin}}_m, u} \simeq \mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Hom}}(B,B), id}.$$

Il est facile de voir, par définition du complexe cotangent et du champ dérivé $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B)$, qu'il existe des isomorphismes fonctoriel en $M \in \mathrm{Ho}(sA - \mathrm{Mod})$

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Hom}}(B,B),id}, M]_{\mathrm{Ho}(sA-\mathrm{Mod})} &\simeq [\mathbb{L}_{B/A}, M \otimes^{\mathbb{L}}_A B]_{\mathrm{Ho}(sB-\mathrm{Mod})} \\ &\simeq [\mathbb{L}_{B/A}, \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{sA-\mathrm{Mod}}(B^\vee, M)]_{\mathrm{Ho}(sB-\mathrm{Mod})} \\ &\simeq [\mathbb{L}_{B/A} \otimes^{\mathbb{L}}_B B^\vee, M]_{\mathrm{Ho}(sA-\mathrm{Mod})}, \end{aligned}$$

ce qui implique l'énoncé de la proposition. □

2.2 Restriction des scalaires le long d'un morphisme fini

Soit $p : G \longrightarrow H$ un morphisme de et-champs dérivés, et considérons les catégories de champs au-dessus de G et de H

$$d\mathrm{St}_{et}(k/G) := \mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}/G), \quad d\mathrm{St}_{et}(k/H) := \mathrm{Ho}(d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}/H).$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

Le changement de bases le long du morphisme p induit un foncteur

$$p^* : d\mathrm{St}_{et}(k/H) \longrightarrow d\mathrm{St}_{et}(k/G)$$

qui envoie un objet $(F \to H)$ sur $(F \times_H^h G \to G)$. Ce foncteur possède un adjoint à droite

$$p_* : d\mathrm{St}_{et}(k/G) \longrightarrow d\mathrm{St}_{et}(k/H),$$

qui à un objet $F \to G$ associe le et-champ dérivé des morphismes au-dessus de H

$$p_*(F) := \mathbf{Map}_{/H}(G, F),$$

où $\mathbf{Map}_{/H}$ désigne le Hom interne de la catégorie $d\mathrm{St}_{et}(k/H)$ (voir [TV05, § 3.6] pour l'existence des Hom internes). Le foncteur p_* s'appelle la *restriction des scalaires le long du morphisme* p.

L'adjonction (p^*, p_*) peut aussi se réaliser par une adjonction de Quillen de la façon suivante. On représente p, à équivalence près, par une fibration $p : G \longrightarrow H$ entre objets fibrants de $d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}$. On remarque alors que le foncteur de changement de base

$$- \times_H G : d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}/H \longrightarrow d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}/G$$

est de Quillen à gauche. L'adjonction induite sur les catégories homotopiques correspondantes est l'adjonction décrite ci-dessus (p^*, p_*).

L'énoncé suivant est un cas particulier d'un critère de représentabilité pour la restriction des scalaires le long de morphismes propres et plats (démontré par exemple dans [Lur]) (se restreindre aux morphismes finis simplifie sensiblement la preuve).

Proposition 2.6. *Soit $p : G \longrightarrow H$ un morphisme entre et-champs dérivés. On suppose que p est 0-géométrique, plat et fini : pour tout $X = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \longrightarrow H$, on a $G \times_H^h X \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B$ avec B une A-algèbre commutative projective et finie. Alors le foncteur*

$$p_* : d\mathrm{St}_{et}(k/G) \longrightarrow d\mathrm{St}_{et}(k/H)$$

présèrve les champs dérivés (n, li)-représentables, pour tout $n \geqslant 0$.

Preuve. Tout d'abord, [TV08, Proposition 1.3.3.4] implique que notre assertion est locale pour la topologie étale sur H et l'on peut donc supposer que G et H sont tous deux affines, et que le morphisme

$$p : G = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B \longrightarrow H = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$$

correspond à une A-algèbre commutative B, libre et de rang fini comme A-module. Les catégories $d\mathrm{St}_{et}(k/G)$ et $d\mathrm{St}_{et}(k/H)$ sont alors respectivement équivalentes à $d\mathrm{St}_{et}(B)$ et $d\mathrm{St}_{et}(A)$, des champs pour la topologie étales sur $d\mathrm{Aff}_B := (sB - C\mathrm{Alg})^{\mathrm{op}}$ et $d\mathrm{Aff}_A := (sA - C\mathrm{Alg})^{\mathrm{op}}$. Le foncteur p_* est alors donné par la formule

$$p_*(F)(A') := F(A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B) \quad \forall A' \in sA - C\mathrm{Alg}.$$

La preuve procède, comme il se doit, par induction sur n. Commençons par traiter le cas $n = 0$. Soit $F = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B'$, affine au-dessus de $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B$. On a

$$p_*(F)(A') := F(A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B) \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{sB-C\mathrm{Alg}}(B', A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B).$$

Pour montrer que $p_*(F)$ est affine, nous utiliserons le résultat de représentabilité des foncteurs définis sur des catégories de modèles combinatoires [TV09, Proposition 1.9]. Il nous suffit donc de montrer les deux assertions suivantes.

(1) Le foncteur $p_*(F)$ commute avec les limites homotopiques dans $sA - C\mathrm{Alg}$.

(2) Le foncteur $p_*(F)$ commute avec les colimites λ-filtrantes pour λ un cardinal suffisemment grand.

Le point (1) se déduit du fait que B est libre de rang fini comme A-module. En effet, il suffit de voir que $A' \mapsto A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B$ commute aux limites homotopiques. Comme le foncteur d'oubli $sB - C\mathrm{Alg} \longrightarrow sB - \mathrm{Mod}$ reflète les limites homotopiques il suffit de voir que le foncteur

$$- \otimes_A^{\mathbb{L}} B : \mathrm{Ho}(sA - \mathrm{Mod}) \longrightarrow \mathrm{Ho}(sB - \mathrm{Mod})$$

commute aux limites homotopiques. Mais, comme $B \simeq A^m$ comme A-module, ce dernier foncteur est isomorphe à $M \mapsto M^m$, et commute donc aux limites homotopiques.

Le point (2) se déduit du fait que la catégorie de modèles $sB - C\mathrm{Alg}$ est combinatoire. Dans une telle catégorie de modèles tout objet x est homotopiquement λ-petit pour un cardinal λ (i.e. $\mathrm{Map}(x, -)$ commute aux colimites homotopiques λ-filtrantes, voir [Dug01]).

Cela termine la preuve de la proposition 2.5 pour le cas $n = 0$. Supposons maintenant qu'elle soit démontrée pour n et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. Soit $F \in d\mathrm{St}_{et}(A)$ un *et*-champ dérivé $(n+1, li)$-géométrique. Soit $\{U_i\}$ des affines et

$$f : U := \coprod_i U_i \longrightarrow F$$

un $(n+1, li)$-atlas. Nous allons montrer, par récurrence sur n, que le morphisme induit

$$g : V := \coprod_i p_*(U_i) \longrightarrow p_*(F)$$

est un $(n+1, li)$-atlas. Nous supposerons donc que p_* préserve les (m, li)-atlas pour $m \geqslant n$.

Nous avons déjà vu que chacun des $p_*(U_i)$ était affine (cas $n = 0$). Commençons par voir que le morphisme g est un épimorphisme de champs dérivés pour la topologie étale, et plus généralement que le foncteur p_* préserve les épimorphismes pour la topologie étale. Pour voir cela, soit $G \longrightarrow G'$ un épimorphisme dans $d\mathrm{St}_{et}(B)$, et soit $x \in p_*(G')(A')$ pour $A' \in sA - C\mathrm{Alg}$. Comme $p_*(G')(A') \simeq G'(A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B)$, il existe un recouvrement étale $A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B \longrightarrow C$ tel que x se relève, à homotopie près, à $G(C)$. Or, comme B est finie et plat sur A, on sait qu'il existe un recouvrement étale $A' \longrightarrow C'$, et un diagramme commutatif dans $\mathrm{Ho}(sk - C\mathrm{Alg})$

$$\begin{tikzcd} A' \otimes_A^{\mathbb{L}} B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[dl] \\ C' \otimes_A^{\mathbb{L}} B & \end{tikzcd}$$

(pour démontrer l'existence d'un tel C' on utilise [TV08, Corollary 2.2.2.9] pour ramener l'énoncé au cas des k-algèbres commutatives non simpliciales, et on utilise qu'une algèbre finie sur un anneau local henselien strict et un produit d'anneaux locaux hénséliens stricts). Cela montre que x se relève, à homotopie près, à un élément dans $G(C' \otimes_A^{\mathbb{L}} B) \simeq p_*(G)(C')$, ce qu'il fallait montrer.

Comme le morphisme g est un épimorphisme, le champ dérivé $p_*(F)$ est équivalent au quotient homotopique du groupoide de Segal nerf de g

$$p_*(F) \simeq \mathrm{Hocolim}\left([n] \mapsto \underbrace{V \times^h_{p_*(F)} V \times_{p_*(F)} V \cdots \times^h_{p_*(F)} V}_{n\text{-fois}} \right)$$

(voir [TV08, § 1.3.4]). Ainsi, pour voir que $p_*(F)$ est $(n+1, li)$-géométrique il suffit de voir que ce nerf est un groupoide de Segal (n, li)-géométrique et lisse, c'est à dire la projection

$$V \times^h_{p_*(F)} V \longrightarrow V$$

est un morphisme (n, li)-représentable et lisse. Comme le morphisme p_* commute aux limites homotopiques (car c'est un foncteur dérivé à droite d'un foncteur de Quillen à droite) on a

$$V \times^h_{p_*(F)} V \simeq \coprod_{i,j} p_*(U_i \times^h_F U_j),$$

et par induction on voit que la projection $V \times^h_{p_*(F)} V \longrightarrow V$ est (n, li)-représentable. Pour terminer la preuve de la proposition il nous reste à montrer que cette projection est lisse, c'est à dire que pour tout i, j la projection

$$p_*(U_i \times^h_F U_j) \longrightarrow p_*(U_i)$$

est lisse. Pour cela nous utiliserons le critère infinitésimal de lissité [TV08, Proposition 2.2.5.1]. Tout d'abord, le fait que $p_*(U_i \times^h_F U_j) \longrightarrow p_*(U_i)$ soit localement de présentation finie se déduit par induction sur n et par le fait que p_* préserve les objets affines et de présentation finie.

Soit donc $A' \in sA - C\mathrm{Alg}$, M un A'-module connexe et $d : A' \longrightarrow A' \oplus M$ une A-dérivation. Notons, $B' := A' \otimes^{\mathbb{L}}_A B$, $M_B := M \otimes^{\mathbb{L}}_A B$, ainsi que

$$d_B : B' \longrightarrow B' \oplus M_B$$

la B-dérivation induite par changement de base le long de $A \to B$. Soit $A' \oplus_d \Omega_* M$ l'extension de carré nul associée à d, et considérons le morphisme

$$p_*(U_i \times^h_F U_j)(A' \oplus_d \Omega_* M) \longrightarrow p_*(U_i)(A' \oplus_d \Omega_* M) \times^h_{p_*(U_i)(A')} p_*(U_i \times^h_F U_j)(A').$$

Il s'agit de montrer que ce morphisme est surjectif à homotopie près. Tout d'abord, comme B est plat sur A on a

$$(A' \oplus_d \Omega_* M) \otimes^{\mathbb{L}}_A B \simeq B' \oplus_{d_B} \Omega_*(M_B).$$

Ainsi, par adjonction le morphisme ci-dessus s'écrit aussi

$$(U_i \times^h_F U_j)(B' \oplus_{d_B} \Omega_* M_B) \longrightarrow U_i(B' \oplus_{d_B} \Omega_* M_B) \times^h_{U_i(B')} (U_i \times^h_F U_j)(B').$$

Or ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes car $U_i \times^h_F U_j \longrightarrow U_i$ est un morphisme (n, li)-représentable et lisse (voir [TV08, Proposition 2.2.5.1]). Ceci termine la preuve de la proposition 2.5. □

2.3 Quasi-sections

Dans ce paragraphe nous introduisons le *et*-champ dérivé $\underline{\mathrm{QSect}_f}$, des *quasi-sections* d'un morphisme fixé $f : F' \longrightarrow F$ dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$. Les quasi-sections sont des sections à extension finie près : le champ $\underline{\mathrm{QSect}_f}$ classifie les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

avec $X' \longrightarrow X$ un morphisme 0-représentable, plat et fini. La définition précise du champ dérivé $\underline{\mathrm{QSect}_f}$ va occuper toute la première partie de ce paragraphe. Nous étudierons ensuite

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

la représentabilité de $\underline{\mathrm{QSect}_f}$ en fonction de celle de p, ce qui est une façon de combiner les résultats 2.3 et 2.5. Nous introduirons aussi un certain sous-champ ouvert des quasi-sections *quasi-lisses*.

Nous commencerons par le et-champ dérivé des carrés commutatifs, noté $\underline{\mathrm{Car}}$, et défini de la façon suivante. On note $\Box$ la catégorie classifiant les carrés commutatifs

$$\Box := \Delta^1 \times \Delta^1,$$

où Δ^1 est la catégorie avec deux objets 0 et 1, et un unique morphisme $0 \to 1$

$$\Delta^1 = (0 \to 1), \quad \Box = (0 \to 1) \times (0 \to 1).$$

Pour $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, on considère la catégorie de modèles $d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et}$, ainsi que la catégorie des diagrammes $(d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et})^{\Box}$. On définit $\underline{\mathrm{Car}}(A)$ comme étant le nerf de la catégorie des équivalences dans $(d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et})^{\Box}$

$$\underline{\mathrm{Car}}(A) := N(w(d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et})^{\Box}).$$

Lorsque $A \to B$ est un morphisme dans $sk - C\mathrm{Alg}$, on dispose d'un foncteur d'oubli $d\mathrm{Aff}_B \longrightarrow d\mathrm{Aff}_A$, qui induit un foncteur de restriction $(d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et})^{\Box} \longrightarrow (d\mathrm{Aff}_B^{\sim,et})^{\Box}$. Ce foncteur de restriction préserve les équivalences et induit donc un morphisme d'ensembles simpliciaux $\underline{\mathrm{Car}}(A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Car}}(B)$. L'association $A \mapsto \underline{\mathrm{Car}}(A)$ définit de cette façon un préfaisceau simplicial $\underline{\mathrm{Car}}$ sur $d\mathrm{Aff}_k$. On vérifie que $\underline{\mathrm{Car}}$ est un et-champ dérivé (en utilisant par exemple les techniques présentées à la fin du § 2.3 de [Toe09]).

De la même façon, on définit $\underline{\mathrm{Mor}}$, le et-champ dérivé des morphismes, qui envoie A sur le nerf des équivalences dans $(d\mathrm{Aff}_A^{\sim,et})^{\Delta^1}$.

Fixons maintenant $f : F' \longrightarrow F$ un morphisme dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$, que nous prenons soins de relever en un morphisme dans $d\mathrm{Aff}_k^{\sim,et}$ (quitte à prendre des remplacements fibrants et cofibrants). L'inclusion en l'objet 1

$$\{1\} \times id : \Delta^1 \hookrightarrow \Box = \Delta^1 \times \Delta^1$$

induit un morphisme de restriction

$$\underline{\mathrm{Car}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Mor}}.$$

Ce morphisme envoie un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ G \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

sur le morphisme $F' \to F$. Le morphisme f définit un point global $* \longrightarrow \underline{\mathrm{Mor}}$, et on pose

$$\underline{\mathrm{Car}}_{/f} := * \times^h_{\underline{\mathrm{Mor}}} \underline{\mathrm{Car}}.$$

Le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{Car}}$ est le champ des carrés commutatifs dont le morphisme but est fixé égal à f.

On considère un sous-champ $\underline{\mathrm{Car}}'_m \subset \underline{\mathrm{Car}}$: pour $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, $\underline{\mathrm{Car}}'_m(A)$ est la réunion des composantes connexes de $\underline{\mathrm{Car}}(A)$ formée des diagrammes commutatifs dans $d\mathrm{St}_{et}(A)$

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ G \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

avec $G \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$ et $G' \longrightarrow \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$ plat et fini de rang m (c'est un sous-champ car être affine est une condition locale, ainsi qu'être plat et fini). On considère alors le carré homotopiquement cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Car}}_{/f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\mathrm{Car}}'_m & \longrightarrow & \underline{\mathrm{Car}} \end{array}$$

Définition 2.7. Soit $f : F' \longrightarrow F$ comme ci-dessus. Le *et-champ dérivé des quasi-sections de f de rang m* est $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \in d\mathrm{St}_{et}(k)$ défini ci-dessus.

Notons qu'il existe une projection naturelle $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \longrightarrow F$, qui à un diagramme

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \longrightarrow & F \end{array}$$

avec $G \simeq \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$, associe le A-point x de F correspondant (nous laissons au lecteur le soin de définir cette projection de manière rigoureuse).

On combine maintenant les deux résultats de représentabilité des propositions 2.3 et 2.6 en l'énoncé suivant.

Proposition 2.8. *Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme (n, li)-représentable dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$, avec $n > 0$. Alors la projection $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li)-géométrique.*

Preuve. On dispose d'un morphisme $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}_m$, qui à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A & \longrightarrow & F \end{array}$$

associe le champ affine G', de la forme $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B$, pour B une A-algèbre plate et finie de rang m (nous laissons le soin au lecteur de revenir sur les définition de $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m}$ et $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ afin de définir proprement ce morphisme $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \to \underline{\mathrm{Fin}}_m$ dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$). Si l'on se fixe $A \to B$ plate et finie de rang m, on dispose d'un carré homotopiquement cartésien.

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Map}}_{/\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B, F' \times^{\mathbb{L}}_F \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A) & \longrightarrow & \underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A & \xrightarrow[B]{} & \underline{\mathrm{Fin}}_m \times^h F \end{array}$$

La proposition 2.6, et l'hypothèse de représentabilité sur f, implique que $\underline{\mathrm{Map}}_{/\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A}(\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B, F' \times^{\mathbb{L}}_F \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A)$ est (n, li)-représentable au-dessus de $\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A$. Ceci montre que le morphisme $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \to \underline{\mathrm{Fin}}_m \times^h F$ est (n, li)-géométrique. Comme $\underline{\mathrm{Fin}}_m$ est $(1, li)$-géométrique (proposition 2.3) il s'en suit que $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li)-représentable (on utilise ici $n > 0$). □

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

Nous aurons besoin d'un résultat un peu plus fin. Considérons le carré homotopiquement cartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \arrow[d] \\ \underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_{m} \arrow[r] & \underline{\mathrm{Fin}}_{m} \end{tikzcd}$$

Définition 2.9. Soit $f : F' \longrightarrow F$ comme ci-dessus. Le *et-champ dérivé des quasi-sections strictes de f de rang m* est $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \in d\mathrm{St}_{et}(k)$ défini ci-dessus.

Proposition 2.10. *Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme (n, li)-représentable dans $d\mathrm{St}_{et}(k)$. Alors la projection naturelle $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li)-géométrique.*

Preuve. Au cours de la preuve de la proposition 2.8 nous avons vu que le morphisme $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}_m \times^h F$ était (n, li)-représentable (ce point n'utilisait pas l'hypothèse $n > 0$). Il s'en suit par changement de bases que $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m \times^h F$ est (n, li)-représentable. Comme $\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m$ est affine, on trouve que $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \longrightarrow F$ est (n, li)-géométrique. □

Pour terminer nous allons considérer un certain sous-champ $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \subset \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m}$, formée des quasi-sections *quasi-lisses*. Nous continuons avec un morphisme $f : F' \longrightarrow F$ que nous supposons (n, li)-représentable. Soit $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, et soit $q : \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m}$ un morphisme correspondant à un carré commutatif.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B \arrow[r, "u"] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

Nous dirons que la quasi-section q est *quasi-lisse* (on pourrait aussi dire *l.c.i.*) si le complexe cotangent $\mathbb{L}_u$ du morphisme u est parfait et d'amplitude contenue dans $[-1, \infty[$ (on rappelle que $\mathbb{L}_u$ est la cofibre homotopique du morphisme $\mathbb{L}_{F,u} \to \mathbb{L}_B$). Nous noterons $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}$ le sous-préfaisceau simplicial de $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m}$ formé des quasi-sections qui sont quasi-lisses : pour $A \in sk - C\mathrm{Alg}$, l'ensemble simplicial $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}(A)$ est la réunion des composantes connexes de $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m}(A)$ qui consistent est des carrés comme ci-dessus avec u quasi-lisse.

Proposition 2.11. *Soit $f : F' \longrightarrow F$ un morphisme (n, li)-représentable plat et presque de présentation finie. Le morphisme d'inclusion*

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m}$$

est une immerison de Zariski ouverte.

Preuve. Un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $sk - C\mathrm{Alg}$ est dit *quasi-lisse* s'il est homotopiquement de présentation finie et si de plus son complexe cotangent $\mathbb{L}_{B/A}$ est homotopiquement de présentation finie dans $sB - \mathrm{Mod}$ (on dit aussi *parfait*, tout au moins lorsque l'on considère $\mathbb{L}_{B/A}$ comme un B-module *stable*, voir [TV08, § 1.2.11]), et d'amplitude contenue dans $[-1, 0]$. Reppelons que cette dernière condition signifie que pour tout B-module connexe et simplement connexe M on a $[\mathbb{L}_{B/A}, M] = 0$. En utilisant [TV08, Proposition 2.2.2.4] on voit qu'un tel morphisme est quasi-lisse si et seulement si $\pi_0(B)$ est une $\pi_0(A)$-algèbre de présentation finie et si de plus $\mathbb{L}_{B/A}$ est parfait et d'amplitude contenue dans $[-1,0]$. On remarque que la notion de quasi-lissité est locale pour la topologie étale sur $d\mathrm{Aff}_k$, et s'étend donc de manière usuelle en une notion de morphismes entre et-champs dérivés (n,li)-géométriques (voir par exemple [TV08, § 1.3.6]).

Pour démontrer la proposition on considère un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} Y=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,B \arrow[r, "u"] \arrow[d] & F' \arrow[d] \\ X=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A \arrow[r, "v"'] & F \end{tikzcd}$$

avec B une A-algèbre simpliciale plate et finie (de rang m). Il nous faut montrer que le lieu dans X au-dessus du quel le morphisme u est quasi-lisse est un ouvert $U\subset X$. Comme ceci est une assertion locale pour la topologie étale sur X, et que localement sur X_{et} le morphisme u se factorise par un (n,li)-atlas de $F'\times^h_F X$, on se ramène au cas où $F=X$ (et $v=id$) et $F'=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,C$ est affine. On dipose donc d'un diagramme commutatif d'affines

$$\begin{tikzcd} Y=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,B \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,C \arrow[dl] \\ X=\mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\,A & \end{tikzcd}$$

avec B plate et finie sur A et C une A-algèbre simpliciale plate et presque de présentation finie. On considère $U\subset X$ le sous-objet de X qui pour $A'\in sk-C\mathrm{Alg}$ consiste en tous les morphismes $A\longrightarrow A'$ tels que le morphisme induit

$$C\otimes^{\mathbb{L}}_A A'\longrightarrow B\otimes^{\mathbb{L}}_A A'$$

soit quasi-lisse. On doit montrer que U est un ouvert Zariski de X. Pour cela, on utilise le lemme suivant.

Lemme 2.12. *Soit* $A\in sk-C\mathrm{Alg}$ *et* $M\in\mathrm{Ho}(sA-\mathrm{Mod})$. *Alors* M *est parfait d'amplitude contenue dans* $[a,0]$ *si et seulement si* $M\otimes^{\mathbb{L}}_A\pi_0(A)$ *est parfait et d'amplitude contenue dans* $[a,0]$ *en tant que* $\pi_0(A)$*-module simplicial.*

Preuve. Le nécessité se déduit du fait qu'être parfait d'amplitude donnée est une propriété stable par changement de bases. Pour la suffisance on procède par récurence sur l'amplitude. Pour $a=0$ c'est l'énoncé [TV08, Lemma 2.2.2.2]. Dire que $M\otimes^{\mathbb{L}}_A\pi_0(A)$ est parfait d'amplitude contenue dans $[a,0]$ équivaut à dire qu'il existe un morphisme

$$p:\pi_0(A)^n\longrightarrow M\otimes^{\mathbb{L}}_A\pi_0(A)$$

dont la cofibre homotopique est parfaite et d'amplitude contenue dans $[a,-1]$. Le morphisme p se relève de façon unique en un morphisme

$$p':A^n\longrightarrow M$$

dont la cofibre est un A-module simplicial N tel que $N\otimes^{\mathbb{L}}_A\pi_0(A)$ est parfait et d'amplitude contenue dans $[a,-1]$. Par récurrence N est donc parfait et d'amplitude contenue dans $[a,-1]$. La suite exacte de cofibrations $A^n\longrightarrow M\longrightarrow N$ implique donc que M est parfait et d'amplitude contenue dans $[a,0]$. $\square$

Revenons à notre diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} Y = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Z = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, C \arrow[dl] \\ X = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, A & \end{tikzcd}$$

Le lemme précédent implique que u est quasi-lisse si et seulement si $\mathbb{L}_u \otimes^{\mathbb{L}}_B \pi_0(B)$ est parfait d'amplitude dans $[-1, 0]$. Comme B et C sont plates sur A on a

$$\pi_0(B) \simeq B \otimes^{\mathbb{L}}_A \pi_0 A, \quad \pi_0(C) \simeq C \otimes^{\mathbb{L}}_A \pi_0 A,$$

et donc

$$\mathbb{L}_u \otimes^{\mathbb{L}}_B \pi_0(B) \simeq \mathbb{L}_{\pi_0(u)},$$

où $\pi_0(u) : \pi_0(C) \longrightarrow \pi_0(B)$ est le morphisme induit. Comme les topologies de Zariski de A et de $\pi_0(A)$ coincident on voit qu'il suffit de montrer que le lieu dans le schéma Spec $\pi_0(A)$, au-dessus du quel $\pi_0(u)$ est quasi-lisse, est un ouvert Zariksi. En d'autres termes, nous avons ramené le problème au cas où A, B et C sont des k-algèbres commutatives non-simpliciales. En utilisant qu'un morphisme de présentation entre schémas affines est quasi-lisse si et seulement s'il est *l.c.i.*, on voit que l'énoncé devient alors le fait bien connu suivant, dans le cadre des schémas affines (non-dérivés).

Lemme 2.13. *Soit*

$$\begin{tikzcd} Y = \mathrm{Spec}\, B \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & Z = \mathrm{Spec}\, C \arrow[dl, "q"] \\ X = \mathrm{Spec}\, A & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de schémas affines, avec p plat et fini, et q plat et de présentation finie. Soit $x \in X$ un point tel que le morphisme induit sur les fibres $Y_x \longrightarrow Z_x$ soit de locale intersection complète. Alors, u est de locale intersection complète au-dessus d'un voisinage Zariski de $p(x) \in X$.

Preuve. Comme tout est de présentation finie au-dessus de A on se ramène, par un argument standard, au cas où tous anneaux en jeu sont noethériens (voir [Gro66, Corollaire 11.2.6.1]). Comme p est fini, et donc propre, il suffit de montrer que si $x \in X$ est tel que $u_x : Y_x \longrightarrow Z_x$ soit *l.c.i.*, il existe un voisinage ouvert V de Y_x dans Y tel que u soit *l.c.i.* sur V. Le morphisme u_x étant *l.c.i.*, on peut trouver, localement sur Y_x, une factorisation

$$u_x : \; Y_x \xrightarrow{j} Z_x \times \mathbb{A}^m \longrightarrow Z_x$$

avec j une immersion fermée régulière. L'immersion j se relève un morphisme $i : Y \longrightarrow Z \times \mathbb{A}^m$ qui factorise u. Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ des générateurs de l'idéal définissant Y dans $Z \times \mathbb{A}^m$, et formons la dg-algèbre de Koszul associée $K(f)$. On dipose d'une augmentation naturelle $K(f) \longrightarrow B$, que l'on considère comme un morphisme de complexes cohérents bornés sur $Z \times \mathbb{A}^m$. Par hypothèse ce morphisme de complexe est un quasi-isomorphisme de complexes lorsqu'il est restreint à Y_x, et reste donc un quasi-isomorphisme sur un voisinage ouvert de Y_x dans Y. Mais ceci implique que u est *l.c.i.* sur un voisinage ouvert de Y_x. $\square$

Cela termine la preuve de la proposition 2.10. $\square$

2.4 Preuve du théorème

Nous sommes maintenant en mesure de donner une preuve du théorème 2.1. Pour cela, nous supposons que ϕ_n est une équivalence de catégorie, pour un $n \geqslant 0$. Pour montrer que ϕ_{n+1} est aussi une équivalence il suffit, d'après 2.2, de montrer que ϕ_{n+1} est essentiellement surjectif.

Soit donc $F \in d\mathrm{St}^{n+1,pl}_{fppf}(k)$. On sait que le morphisme diagonal $F \longrightarrow F \times^h F$ est (n, pl)-représentable, et donc aussi (n, li)-représentable par récurrence. Soit $\{U_i\}$ une famille d'affines et

$$p = \coprod_i p_i : U := \coprod_i U_i \longrightarrow F$$

un $(n+1, pl)$-atlas. Pour tout i, et tout entier $m > 0$, on dispose du et-champ dérivé $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ des quasi-sections strictes de rang m du morphsme p_i. On note $V_{i,m} \subset \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ le sous-champ des quasi-sections quasi-lisses. D'après la proposition 1.2, le morphisme $V_{i,m} \longrightarrow F$ est $(n+1, li)$-représentable, car Zariski ouvert dans un et-champ dérivé (n, li)-représentable au-dessus de F (le seul cas où il est nécessaire de passer de n à $n+1$ est lorsque $n = 0$, l'ouvert $V_{i,m}$ n'étant pas forcément affine). On considère le morphisme de projection

$$V := \coprod_{i,m} : V_{i,m} \longrightarrow F.$$

Pour terminer la preuve du théorème 2.1 il nous suffit de montrer les trois assertions suivantes.

(1) Chaque et-champ $V_{i,m}$ est $(n+1, li)$-géométrique.

(2) Chaque morphisme $V_{i,m} \longrightarrow F$ est $(n+1, li)$-représentable et lisse.

(3) Pour tout corps algébriquement clos L, le morphisme induit

$$\coprod_{i,m} : V_{i,m}(L) \longrightarrow F(L)$$

est surjectif sur les composantes connexes.

Montrer les propriétés (1)–(3) ci-dessus impliquera que F est $(n+1, li)$-géométrique : un $(n+1, li)$-atlas pour V induisant un $(n+1, li)$-atlas pour F.

(1) Il suffit de montrer que les et-champs $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ sont $(n+1, li)$-géométriques, car les $V_{i,m}$ sont des ouverts des $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$. On sait, d'après la proposition 2.10 que la projection $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m} \longrightarrow F$ est (n, li)-géométrique. Par construction, il existe un diagramme commutatif de et-champs dérivés

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & U_i \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m} \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

où $\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ est un morphisme plat et fini (il s'agit de l'image réciproque de l'objet universel $\widetilde{\underline{\mathrm{Fin}}}^{\mathrm{str}}_m \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m$). Comme $\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ et U_i sont (n, li)-représentables au-dessus de F, il s'en suit que le morphisme u est aussi (n, li)-représentable. Ceci implique que $\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

est un et-champ dérivé (n, li)-géométrique. Soit Y_j des affines et

$$\coprod_j Y_j \longrightarrow \widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}}$$

un (n, li)-atlas, en supposant que $n > 0$. Le morphisme composé

$$\coprod_j Y_j \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$$

est alors un (n, pl)-atlas, ce qui par l'hypothèse de récurrence implique que $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ est (n, li)-géométrique si $n > 0$. Il faut ici prendre garde au cas $n = 0$, qui doit se traiter de manière indépendante. Dans ce cas on considère le diagramme homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}} \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m} \arrow[d] \\
\widetilde{\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m} \arrow[r, "f"'] & \underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m
\end{tikzcd}$$

où f est la famille universelle des morphismes plats finis de rang m. On a vu que $\widetilde{\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}}$ était affine, ainsi le et-champ dérivé $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ est localement, pour la topologie plate sur $\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m$, affine. On sait, d'après [TV08, Proposition 1.3.2.8] que cela implique que $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{p_i,m}$ est affine.

(2) Les morphismes $V_{i,m} \longrightarrow F$ sont $(n+1, li)$-représentables, d'après (1) et car la diagonale de F est (n, li)-représentable (et donc $(n+1, li)$-représentable). Par changement de bases sur F on se ramène à montrer le lemme suivant.

Lemme 2.14. *Soit $f : F \longrightarrow X$ un morphisme $(n+1, li)$-représentable plat et presque de présentation finie avec X affine. Le morphisme naturel*

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \longrightarrow X$$

est lisse.

Preuve du lemme. Nous utiliserons le critère [TV08, Corollary 2.2.5.3]. On considère la factorisation naturelle

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \xrightarrow{p} X \times^h \underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m \xrightarrow{q} X,$$

et les morphismes sur les tronqués associés

$$t_0(\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}) \xrightarrow{p} t_0(X) \times t_0(\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m) \xrightarrow{q} t_0(X).$$

Pour voir que $t_0(\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m})$ est localement de présentation finie sur $t_0(X)$, il suffit de voir que $t_0(\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m)$ est un schéma affine (non-dérivé) de présentation finie sur $\mathrm{Spec}\,\pi_0(k)$, et que p est localement de présentation finie. Le schéma $t_0(\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m)$ classifie les structures de $\pi_0(k)$-algèbres commutatives sur $\pi_0(k)^m$, et est donc de présentation finie. Il reste à voir que p est un morphisme localement de présentation finie de et-champs non-dérivés.

Pour cela, soit Y un schéma affine et $Y \longrightarrow t_0(X) \times t_0(\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m)$ un morphisme correspondant à un morphisme $Y \to t_0(X)$ et un morphisme $Y' \to Y$ libre de rang m. Le produit fibré homotopique

$$t_0(\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}) \times^h_{t_0(X) \times t_0(\underline{\mathrm{Fin}}^{\mathrm{str}}_m)} t_0(X)$$

est un ouvert du et-champ (non-dérivé) $\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y', F \times^h_{t_0(X)} Y)$, des Y-morphismes de Y' vers F (correspondant au sous-champ des morphismes quasi-lisses). Au cours de la preuve de la proposition 2.8 nous avons vu qu'un (n, li)-atlas de $\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y', F \times^h_{t_0(X)} Y)$ était donné par $\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y', t_0(U))$, où U est un (n, li)-atlas de F. Ainsi, la locale présentabilité du morphisme p ci-dessus se déduit du fait que pour tout schéma affine $U \to Y$, le schéma affine des morphismes $\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y', U)$ est localement de présentation finie sur Y.

Nous venons donc de voir que $t_0(\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}) \longrightarrow t_0(X)$ est localement de présentation finie. Il reste à montrer que les complexes cotangents du morphisme $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \longrightarrow X$ sont parfaits et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$. Notons $\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}$ le sous-champ dérivé ouvert de $\underline{\mathrm{QSect}}_{f,m}$ image de $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m}$ par la projection $\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str}}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}_{f,m}$. Comme la projection

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{\mathrm{str},ql}_{f,m} \longrightarrow \underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}$$

est un Gl_n-torseur il suffit de voir que les complexes cotangents du morphisme

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m} \longrightarrow X$$

sont parfaits et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$.

On utilise alors la factorisation

$$\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m} \xrightarrow{p} X \times^h \underline{\mathrm{Fin}}_m \xrightarrow{q} X.$$

Ainsi, pour tout $B \in sk - C\mathrm{Alg}$, $Y := \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B$, et tout morphisme $v : Y \to \underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}$, on dispose d'un triangle distingué de B-modules stables

$$\mathbb{L}_{X\times^h \underline{\mathrm{Fin}}_m/X,pv} \longrightarrow \mathbb{L}_{\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}/X,v} \longrightarrow \mathbb{L}_{\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}/X\times^h \underline{\mathrm{Fin}}_m,v}.$$

Supposons que le morphisme v corresponde à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

avec $Y' = \mathbb{R}\underline{\mathrm{Spec}}\, B'$ plat et fini sur Y, et u quasi-lisse.

Alors, on a

$$\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}/X\times^h \underline{\mathrm{Fin}}_m,v} \simeq \mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y',F\times^h_X Y),u}.$$

Tout comme pour la proposition 2.5 on voit qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Map}}_{/Y}(Y',F\times^h_X Y),u} \simeq \mathbb{L}_{F,u} \otimes^{\mathbb{L}}_B (B')^\vee \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}(sB - \mathrm{Mod})).$$

On a de même,

$$\mathbb{L}_{X\times^h \underline{\mathrm{Fin}}_m/X,pv} \simeq \mathbb{L}_{\underline{\mathrm{Fin}}_m,w} \in \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}(sB - \mathrm{Mod})),$$

où $w : Y \longrightarrow \underline{\mathrm{Fin}}_m$ est le morphisme induit, correspondant au morphisme fini et plat $Y' \to Y$. Ainsi, d'après la proposition 2.5 $\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}/X,v}$ est ainsi la fibre homotopique, dans $\mathrm{Ho}(\mathrm{Sp}(sB - \mathrm{Mod}))$, du morphisme naturel

$$\mathbb{L}_{F,u} \otimes^{\mathbb{L}}_{B'} (B')^\vee \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/B} \otimes^{\mathbb{L}}_{B'} (B')^\vee,$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

(induit par le morphisme $\mathbb{L}_{F,u} \longrightarrow \mathbb{L}_{B'/B}$ induit par u). Comme u est quasi-lisse cette fibre homotopique est parfaite et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$, en tant que B'-module. Mais comme B' est projective et de rang fini sur B le B-module $\mathbb{L}_{\underline{\mathrm{QSect}}^{ql}_{f,m}/X,v}$ est aussi parfait et d'amplitude contenue dans $[0, \infty[$. □

(3) Soit $x : \mathrm{Spec}\, L \longrightarrow F$ un point géométrique de F, et notons

$$\coprod_i q_i : \coprod_i G_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\, L$$

le changement de base du $(n+1, pl)$-atlas $\{U_i\}$ le long de x. Remarquons que chaque G_i est plat sur $\mathrm{Spec}\, L$, et donc est un *et*-champ non-dérivé (i.e. équivalent à son tronqué). Il nous suffit de montrer que $\underline{\mathrm{QSec}}^{\mathrm{str},ql}_{q_i,m}(L)$ est non-vide pour un i et un m. Pour cela, soit V_i un affine non-vide et $V_i \longrightarrow G_i$ un morphisme lisse (pour un i fixé quelconque). Comme V_i est plat sur $\mathrm{Spec}\, L$, il s'agit d'un schéma affine non-dérivé Soit alors $y \in V_i$ un point Cohen–MacCauley de V_i, et $(f_1, \ldots, f_r)$ une suite régulière maximale en y. La L-algèbre $R := \mathcal{O}_{V_i,y}/(f_1, \ldots, f_r)$ est finie sur L, de dimension un entier m, et part définition le morphisme naturel $\mathrm{Spec}\, R \longrightarrow V_i$ est *l.c.i.* Ces données fournissent une quasi-section quasi-lisse du morphisme $V_i \longrightarrow \mathrm{Spec}\, L$. Comme le morphisme $V_i \longrightarrow G_i$ est lisse, l'image de cette quasi-section dans G_i fournit un élément dans $\pi_0(\underline{\mathrm{QSec}}^{\mathrm{str},ql}_{q_i,m}(L))$, montrant ainsi que $\underline{\mathrm{QSec}}^{\mathrm{str},ql}_{q_i,m}(L)$ n'est pas vide.

Nous venons de voir que les assertions (1)–(3) étaient satisfaites, ce qui finit de démontrer le théorème 2.1.

3. Application à la comparaison entre cohomologies étales et plates

Pour un *fppf*-champ dérivé, nous savons maintenant qu'être (n, pl)-géométrique et (n, li)-géométrique sont deux conditions équivalentes. Nous dirons alors simplement *être n-géométrique.* Nous dirons aussi *être géométrique* pour signifier *être n-géométrique pour un entier n.*

Rappelons que pour une catégorie de modèles M (ou plus généralement pour une sous-catégorie pleine d'une catégorie de modèles, stable par équivalence) on dispose d'une notion d'objet en groupoïdes de Segal X_* dans M (voir [TV05, Definition 4.9.1]). Nous dirons qu'un objet en groupoïdes de Segal X_* est *un objet en groupes dans M* si l'objet $X_0 \in M$ est équivalent à l'objet final $*$. Nous appelerons alors *τ-champ dérivé en groupes* un objet en groupes X_* dans la catégorie de modèles $d\mathrm{Aff}_k^{\sim,\tau}$, tel que chaque X_n soit un τ-champ. Nous abuserons souvent du fait de désigner l'objet X_* par son objet sous-jacent $G := X_1 \in d\mathrm{Aff}_k^{\sim,\tau}$. Pour un τ-champ dérivé en groupes G on dispose de son τ-champ dérivé classifiant

$$K_\tau(G, 1) := \mathrm{Hocolim}_{[n] \in \Delta^{\mathrm{op}}} X_n \in d\mathrm{St}_\tau(k),$$

(voir [TV05, Definition 4.9.1]).

Par définition, un *τ-champ dérivé en m-groupes* est un objet en groupes dans la catégorie de (pseudo, voir [TV05, Definition 4.1.1]) modèles des τ-champs dérivés en $(m-1)$-groupes. Pour un tel objet G, son τ-champ dérivé classifiant $K_\tau(G, 1)$ possède une structure induite de τ-champ dérivé en $(m-1)$-groupes. Par itération on obtient ainsi un τ-champ classifiant $K_\tau(G, m)$.

Définition 3.1. Soit X un τ-champ dérivé et G un τ-champ dérivé en m-groupes. La cohomologie de X à coefficients dans G est définie par

$$H^{m-i}_\tau(X, G) := \pi_i(\mathrm{Map}(X, K_\tau(G, m))).$$

Tout d'abord, $K_\tau(G,m)$ ne possèdant aucune structure de groupe induite les $H^j_\tau(X,G)$ sont des groupes abéliens pour $j \leqslant m-2$, $H^{m-1}_\tau(X,G)$ est un groupe, et $H^m_\tau(X,G)$ est un ensemble pointé. On remarque que $H^j_\tau(X,G)$ n'est définie que pour $j \leqslant m$, mais peut être non-nul pour $j<0$ (mais ce qui n'arrive que lorsque X n'est pas un champ tronqué). Enfin, lorsque G est un k-schéma en groupes (respectivement en groupes abéliens) et X un k-schéma, les $H^j_\tau(X,G)$ coincident avec la cohomologie de X à coefficients dans G pour la topologie τ au sens usuel de la cohomologie des schémas.

Une conséquence du théorème 2.1 est le corollaire suivant. Il affirme en particulier que la cohomologie *fppf* et étale, à coefficients dans un schéma en groupes plats de présentation fini, ne diffèrent essentiellement qu'en degré 1.

Corollaire 3.2. *Soit G un fppf-champ dérivé en m-groupes.*

(1) *Si G est n-géométrique, plat et localement de présentation presque finie sur* $\operatorname{Spec} k$*, alors $K_{fppf}(G,m)$ est $(n+m)$-géométrique plat et de présentation preque finie sur* $\operatorname{Spec} k$*. Si $m>0$, alors $K_{fppf}(G,m)$ est lisse sur* $\operatorname{Spec} k$*.*

(2) *Si G est géométrique et plat de présentation presque finie sur* $\operatorname{Spec} k$*, alors le morphisme $G \longrightarrow \operatorname{Spec} k$ est quasi-lisse.*

(3) *Si G est géométrique et lisse sur* $\operatorname{Spec} k$*, alors pour tout k-schéma X, le morphisme naturel*

$$H^i_{et}(X,G) \longrightarrow H^i_{fppf}(X,G)$$

est bijectif pour tout $i \leqslant m$.

(4) *Supposons que G soit un k-schémas en groupes abéliens (ou plus généralement un k-espace algébrique en groupes abéliens), plat et localement de présentation sur* $\operatorname{Spec} k$*. Alors, pour tout k-schéma X il existe une suite exacte longue fonctorielle en X et en G*

$$H^{i-2}_{et}(X, \underline{H}^1_{fppf}(-,G)) \longrightarrow H^i_{et}(X,G) \longrightarrow H^i_{fppf}(X,G)$$
$$\longrightarrow H^{i-1}_{et}(X, \underline{H}^1_{fppf}(-,G)) \longrightarrow H^{i+1}_{et}(X,G),$$

où $\underline{H}^1_{fppf}(-,G)$ est le faisceau, pour la topologie étale, associé au préfaisceau $U \mapsto H^1_{fppf}(U,G)$.

(5) *Supposons que G soit un k-schémas en groupes abéliens (ou plus généralement un k-espace algébrique en groupes abéliens), plat et localement de présentation sur* $\operatorname{Spec} k$*. Alors, pour tout k-schéma X et toute classe $\alpha \in H^i_{fppf}(X,G)$, avec $i>1$, il existe un recouvrement étale $u: X' \to X$ tel que $u^*(\alpha)=0$. En particulier, si X est hensélien strict alors $H^i_{fppf}(X,G)=0$ pour tout $i>1$.*

Preuve. (1) Le *fppf*-champ dérivé $K_{fppf}(G,m)$ est, par des applications successives de [TV08, Proposition 1.3.4.2], $(m+n,pl)$-géométrique, et donc $(n+m)$-géometrique. Pour tout $m>0$ le point global naturel $\operatorname{Spec} k \longrightarrow K_{fppf}(G,m)$ est plat et localement de présentation presque finie. Ainsi, $K_{fppf}(G,m)$ est localement pour la topologie *fppf* lisse sur $\operatorname{Spec} k$, ce qui d'après la proposition 1.2 implique qu'il est lisse sur $\operatorname{Spec} k$.

(2) D'après le point précédent $K_{fppf}(G,1)$ est lisse. Le *et*-champ dérivé G, qui s'écrit aussi $* \times^h_{K_{fppf}(G,1)} *$, est donc un produit fibré de *et*-champs dérivés lisses. Il est donc quasi-lisse.

(3) Le *et*-champ dérivé $K_{et}(G,m)$ est, par une utilisation répétée de [TV08, Proposition 1.3.4.2], $(n+m,li)$-géométrique. Le lemme 2.2(1) implique que pour *et*-champ X (et donc,

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

en particulier, pour tout k-schéma X), le morphisme naturel

$$H^i_{et}(X,G) = [X, K_{et}(G,i)] \longrightarrow [X, K_{\mathit{fppf}}(G,i)] = H^i_{\mathit{fppf}}(X,G)$$

est bijectif, pour tout $i \leqslant m$.

(4) On considère $K_{\mathit{fppf}}(G,1)$. D'après le point (1) c'est un champ dérivé géométrique en m-groupes (pour tout m car G est abélien), lisse sur $\operatorname{Spec} k$. Soit m un entier assez grand. Le et-champ dérivé $K_{et}(K_{\mathit{fppf}}(G,1), m-1)$ est donc géométrique, et se trouve donc être un *fppf*-champ (voir le lemme 2.2). On a donc

$$K_{\mathit{fppf}}(G,m) \simeq K_{\mathit{fppf}}(K_{\mathit{fppf}}(G,1), m-1) \simeq K_{et}(K_{\mathit{fppf}}(G,1), m-1).$$

Ainsi, les faisceaux d'homotopie, pour la topologie étale, du et-champ tronqué $t_0(K_{\mathit{fppf}}(G,m))$ sont donnés par

$$\pi_m(t_0(K_{\mathit{fppf}}(G,m))) \simeq G, \quad \pi_{m-1}(t_0(K_{\mathit{fppf}}(G,m))) \simeq \underline{H}^1_{\mathit{fppf}}(-,G)$$
$$\pi_{m-1}(t_0(K_{\mathit{fppf}}(G,m))) = 0 \quad \text{pour } i < m-1.$$

Il existe donc une suite exacte de fibration de et-champs non-dérivés

$$t_0(K_{et}(G,m)) \longrightarrow t_0(K_{\mathit{fppf}}(G,m)) \longrightarrow t_0(K_{et}(\underline{H}^1_{\mathit{fppf}}(-,G), m-1)).$$

Pour tout k-schéma, cette suite excate de fibration induit une suite exacte de fibration d'ensembles simpliciaux

$$\operatorname{Map}(X, K_{et}(G,m)) \longrightarrow \operatorname{Map}(X, K_{\mathit{fppf}}(G,m)) \longrightarrow \operatorname{Map}(X, K_{et}(\underline{H}^1_{\mathit{fppf}}(-,G), m-1)),$$

obtenue en remarquant que comme X est tronqué, on a $\operatorname{Map}(X,F) \simeq \operatorname{Map}(X, t_0(F))$ pour tout et-champ dérivé F. La suite exacte longue en homotopie, associée à cette suite exacte de fibration, est la suite exacte cherchée.

(5) Se déduit, par exemple, du point (4) (ou encore de la dernière partie du point (1)). □

Remarque 3.3. (1) Comme nous l'avons vu au cours de la preuve, le point (3) du corollaire précédent est vrai pour tout et-champ dérivé X. Cela est également le cas du point (5). De même, le point (4) est vrai pour tout et-champ tronqué X.

(2) Le point (4) peut aussi s'exprimer sous la forme $\mathbb{R}^i f_*(G) = 0$, pour tout $i > 1$, et tout schéma en groupes abéliens plats localement de présentation finie G, et où $f : \mathrm{Aff}_k^{\sim,\mathit{fppf}} \longrightarrow \mathrm{Aff}_k^{\sim,et}$ est le morphisme géométrique de passage de la topologie *fppf* à la topologie étale.

Pour terminer, signalons aussi le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Soit A un anneau local hensélien de corps résiduel k. Supposons que A soit un anneau excellent. Soit G un espace algébrique en groupes abéliens, plat et localement de présentation finie sur* $\operatorname{Spec} A$, *de fibre spéciale $G_0 := G \otimes_A k$. Alors, le morphisme de restriction*

$$H^i_{\mathit{fppf}}(\operatorname{Spec} A, G) \longrightarrow H^i_{\mathit{fppf}}(\operatorname{Spec} k, G_0)$$

est surjectif pour $i = 1$, et un isomorphisme pour tout $i > 1$. Si le groupe G est de plus lisse sur $\operatorname{Spec} A$, *alors ce morphisme est aussi un isomorphisme pour $i = 1$ et surjectif pour $i = 0$.*

Preuve. On travaille dans $\mathrm{St}(A)$, la catégorie des champs (disons *fppf*) sur $\operatorname{Spec} A$. Commençons par montrer que les morphismes en question sont surjectifs. Pour cela, on considère le i-champ $K_{\mathit{fppf}}(G,i)$, pour un $i \geqslant 1$. On sait, d'après le corollaire précédent que c'est un champ géométrique

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press

et lisse sur Spec A. Ainsi, pour montrer que le morphisme induit

$$H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G) \simeq [\mathrm{Spec}\, A, K_{fppf}(G, i)] \longrightarrow [\mathrm{Spec}\, k, K_{fppf}(G, i)] \simeq H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, k, G)$$

est surjectif il suffit de montrer le lemme plus général suivant.

Lemme 3.5. *Soit F un (i-)champ géométrique et lisse sur* Spec A. *Alors le morphisme naturel*

$$F(A) \longrightarrow F(k)$$

induit une application surjective sur les ensembles de composantes connexes.

Preuve du lemme. Soit $\widehat{A}$ le complété de A le long de $A \to k$, et fixons $x \in F(k)$ un k-point. Comme le champ F est géométrique le morphisme naturel

$$F(\widehat{A}) \longrightarrow \mathrm{Holim}_k(F(A_k))$$

est une équivalence (on note $A_k = A/m^k$, où m est l'idéal maximal de A). On commence par remarquer, par récurrence sur k, que le morphisme

$$F(A_k) \longrightarrow F(A_{k-1})$$

est surjectif sur les composantes connexes. En effet, l'obstruction au fait que la fibre homotopique d'un élément $x \in F(A_{k-1})$ soit non-vide vit dans le groupe

$$\mathrm{Ext}^1_{A_{k-1}}(\mathbb{L}, m^{k-1}/m^k),$$

où $\mathbb{L}$ est le complexe cotangent du morphisme $F \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ pris au point $x : \mathrm{Spec}\, A_{k-1} \longrightarrow F$. Or, comme ce morphisme est lisse, $\mathbb{L}$ est d'amplitude positive, et donc $\mathrm{Ext}^1_{A_{k-1}}(\mathbb{L}, m^{k-1}/m^k) = 0$ (voir par exemple [TV08, 1.4.2, 2.2.5]). Ceci montre que toutes les fibres homotopiques de

$$F(A_k) \longrightarrow F(A_{k-1})$$

sont non vides, et donc que ce morphisme est surjectif sur les composantes connexes. En passant à la limite sur k, on trouve donc que

$$F(\widehat{A}) \longrightarrow F(k)$$

est aussi surjectif sur les composantes connexes.

Soit maintenant $x \in F(k)$, et choisissons $\widehat{x} \in F(\widehat{A})$ un relevé. Comme A est excellent, le morphisme $A \longrightarrow \widehat{A}$ est régulier, et il s'écrit donc comme une colimite filtrante de morphismes lisses $A \longrightarrow B_\alpha$. Comme A est hensélien, il existe, pour tout α, une rétraction $r_\alpha : B_\alpha \longrightarrow A$, au-dessus de k. De plus, comme F est localement de présentation finie sur Spec A, il existe un α assez grand tel que $\widehat{x}$ se factorise par un point $x_\alpha \in F(B_\alpha)$ au-dessus de x. En composant avec la rétraction r_α on trouve $x' \in F(A)$, qui est un relèvement de x. Ceci termine la preuve du lemme. □

Le lemme implique donc que

$$H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G) \longrightarrow H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, k, G_0)$$

est surjectif pour $i > 0$. Supposons maintenant que $i > 1$. Soit $x, y \in H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G)$ avec une même image dans $H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, k, G_0)$. On représente x et y par deux morphismes

$$x, y : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow K_{fppf}(G, i),$$

et on considère alors le champ sur Spec A des équivalences entre x et y

$$\mathrm{Eq}(x, y) := \mathrm{Spec}\, A \times^h_{K_{fppf}(G,i)} \mathrm{Spec}\, A.$$

Le champ $\mathrm{Eq}(x, y)$ est un champ géométrique sur $\mathrm{Spec}\, A$. Il est de plus localement équivalent, pour la topologie *fppf*, à $K_{fppf}(G, i-1)$. Comme $i > 1$, le champ $K_{fppf}(G, i-1)$ est lisse, ce qui montre que $\mathrm{Eq}(x, y)$ est un champ géométrique et lisse sur $\mathrm{Spec}\, A$. De plus, par hypothèse $\mathrm{Eq}(x, y)(k)$ est non vide, et le lemme 3.5 implique alors que $\mathrm{Eq}(x, y)(A)$ est aussi non vide. En d'autres termes les deux morphismes

$$x, y : \mathrm{Spec}\, A \longrightarrow K_{fppf}(G, i)$$

sont égaux dans la catégorie homotopique des champs, et donc $x = y$ dans $H^i_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G)$.

Pour terminer, le même argument que précédemment montre que $H^1_{fppf}(\mathrm{Spec}\, A, G) \longrightarrow H^1_{fppf}(\mathrm{Spec}\, k, G_0)$ est injectif lorsque G est lisse (car on peut l'appliquer au cas $i = 1$). $\square$

REMERCIEMENTS

Le résultat principal de ce travail avait été annoncé, avec quelques rudiments de preuve, dans [Toe09]. C'est la remarque, ravivée récemment par une correspondance avec Chetan Balwe, que les constructions et résultats de [Toe05] en dépendent qui m'a insité à en rédiger une preuve complète. Je remercie donc Chetan pour son message (et je ne peux qu'inviter le lecteur à lire sa thèse [Bal]). Par ailleurs, cet article a été rédigé à cheval entre Toulouse et Montpellier, en grande partie dans le fameux train CORAIL TEOZ de 17h45, et je souhaite remercier la SNCF pour avoir su garder des retards tout à fait raisonnables durant cette période. Ces va-et-viens font suite à mon changement d'affectation, de l'Institut de Mathématique de Toulouse vers l'Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier : je remercie le second pour un acceuil très chaleureux.

RÉFÉRENCES

Bal C. Balwe, *Motivic integration on Artin n-stacks*, Thesis, http://d-scholarship.pitt.edu/2408/.

Dug01 D. Dugger, *Combinatorial model categories have presentations*, Adv. Math. **164** (2001), 177–201.

Gro66 A. Grothendieck, *Elements de géométrie algébrique IV: Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Troisième partie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **28** (1966), 5–255.

Gro67 A. Grothendieck, *Elements de géométrie algébrique IV: Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **32** (1967), 5–361.

Gro68 A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer III*, in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968), 88–188.

LM-B00 G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algbriques*, in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 39 (Springer, Berlin, 2000).

Lur J. Lurie, *Derived algebraic geometry*, Thesis.

Sim96 C. Simpson, *Algebraic (geometric) n-stacks*, alg-geom/9609014.

Toe05 B. Toën, *Anneaux de Grothendieck des n-champs d'Artin*, math.AG/0509098.

Toe06 B. Toën, *Derived Hall algebras*, Duke Math. J. **135** (2006), 587–615.

Toe09 B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 80, Part 1 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2009), 435–487.

TV05 B. Toën and G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. Math. **193** (2005), 257–372.

TV08 B. Toën and G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: geometric stacks and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008).

TV09 B. Toën and G. Vezzosi, ∞-*Catégories monoïdales rigides, traces et caractère de Chern*, arXiv:0903.3292.

Bertrand Toën btoen@math.univ-montp2.fr
Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, UMR CNRS 5149,
Université de Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon,
34095 Montpellier Cedex, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X10005245 Published online by Cambridge University Press