

In the book, the authors consider certain algebras \mathcal{A} of bounded measurable functions on a strictly localisable integration space (which includes sigma-finite measure spaces and Radon measures on locally compact spaces). A lifting on \mathcal{A} is defined to be a map $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ such that (1) $\rho(f) \equiv f$, (2) $f \equiv g$ implies $\rho(f) = \rho(g)$ (3) $\rho(1) = 1$, (4) $f \geq 0$ implies $\rho(f) \geq 0$, (5) $\rho(af + bg) = a\rho(f) + b\rho(g)$ and (6) $\rho(fg) = \rho(f)\rho(g)$. Here $f \equiv g$ means f and g are equal almost everywhere with respect to some measure under consideration. The existence of a lifting for all bounded measurable functions M^∞ (and other algebras also) is proved in Ch. IV using Martingale convergence theorem. The arguments are reminiscent of those of the proof of Hahn Banach extension theorem. Starting with the algebra of constant functions (almost everywhere) on which a lifting always exists, the authors used Zorn's lemma to find a maximal "extension" which gives a lifting on M^∞ .

In less than two hundred pages, the authors have presented in an extremely well-organised manner, a large amount of important results connected with the problem of lifting (mostly their own) which are not readily available. Basically this book consists of three major parts. Part One gives (mostly without proof) an excellent account of abstract integration theory (Ch. I) including vector valued functions (Ch. VI). In Part Two, the authors prove the existence of a lifting on M^∞ , including the existence of a strong lifting (one such that $\rho(f) = f$ for continuous f) for locally compact metrisable spaces and the nonexistence of a linear lifting (one without condition (6)) for \mathcal{L}^p -spaces for $1 \leq p < \infty$. (Ch. II, III, IV and VIII.) An alternative formulation of lifting in terms of measurable sets is also given (Ch. V). The last part deals with various applications to domination, integration and disintegration of measures, an isomorphism theorem for $L^\infty(Z, \mu)$ (with Z locally compact) as well as the equivalence of the Dunford-Pettis theorem (without any separability condition) and the existence of a lifting (Ch. VII, IX and X).

It is most appropriate to say that this book is mainly designed for the experts and yet it is also readable to any person with a strong background in the theory of measure and integration although some of the deeper results may be beyond his (including the reviewer's) appreciation.

JAMES C. S. WONG,
MCMMASTER UNIVERSITY

Theorie Axiomatique des Ensembles, par Jean-Louis Krivine. 120 pages. Collection SUP, section "Le mathématicien", Presses Univ. France, Paris, 1969. 10F.

Il n'existe pas d'ouvrages originaux en français qui traitent de la théorie axiomatique des ensembles (se l'on excepte le traité de Bourbaki). Dans le livre de J. L. Krivine, on trouvera un traitement à la fois succinct et complet de la théorie des ensembles dans sa forme axiomatique (par opposition à naïve).

Depuis les recherches sur les fondements axiomatiques de la théorie cantorrienne de Zermelo (1908), il y a eu une floraison d'axiomatisations de la théorie des ensembles: Russell (théorie des types dans les *Principia Mathematica*), Skolem, von Neumann, Bernays, Quine (et ses systèmes successifs), Morse et autres. Mais le système axiomatique fondamental reste celui de Zermelo (modifié par Fraenkel); celui de Bernays (modifié par Gödel dans *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1940) et plus récemment celui de Morse (modifié par Kelley, voir l'appendice à *General topology*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1955) contiennent des extensions importantes de Z-F (l'introduction de la notion de classe à côté de celle d'ensemble dans Bernays-Gödel et sa généralisation—schéma d'axiomes de classification—dans Morse-Kelley).

Le premier chapitre du livre de Krivine présente les axiomes de la théorie des ensembles de Z-F. Les connecteurs propositionnels et le quantificateur existentiel sont introduits par la médiation de la théorie des relations binaires (unaires pour la négation). Les schémas d'axiomes de substitution et de compréhension tiennent lieu (comme c'est l'usage) des axiomes du second ordre—les schémas signifient que les énoncés sont restreints aux variables qui satisfont une formule du langage de base: $A(x, x_1, \dots, x_k)$.

Le chapitre II contient un exposé du traitement classique de la théorie des ordinaux et de celle des cardinaux, avec l'axiome du choix et ses énoncés équivalents, dont le plus simple est: "Le produit d'une famille d'ensembles non-vides est non-vide" ou encore le théorème de Zermelo sur le bon ordre. On y trouve aussi le très utile lemme de Zorn. Finalement, la théorie des cardinaux transfinis et l'axiome de l'infini sont exposés brièvement.

Le chapitre III est consacré à l'important axiome de fondation; c'est ici que l'exposé de l'A. devient original. Les preuves de consistance (ou non-contradiction) relative pour les axiomes de fondation, de l'infini et d'accessibilité sont données avec un minimum de moyens.

Une autre innovation de l'ouvrage est le traitement de schéma de réflexion dans le chapitre IV. L'A. énonce de la façon suivante le schéma:

$$\forall \alpha (\exists \beta > \alpha) \forall x_1 \cdots \forall x_k [x_1 \in V_\beta \text{ et } \cdots \text{ et} \\ x_k \in V_\beta \rightarrow (E(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow E^{V_\beta}(x_1, \dots, x_k))]$$

où α et β sont des ordinaux et V la classe universelle; le schéma signifie que pour tous les x dans V^β , l'énoncé "réfléchit" la formule $E(x_1, \dots, x_k)$ (Krivine dit "convient à . . ."). Il est aisé de montrer avec l'aide de ce schéma que la théorie des ensembles de Zermelo, sans l'axiome de fondation, est essentiellement incomplète, i.e. n'est pas finiment axiomatisable. La comparaison des théories de Zermelo et de Zermelo-Fraenkel (pp. 68–71) est plus que douteuse (nous devons cette remarque au professeur Kreisel).

Le théorème de Löwenheim-Skolem est exposé dans le chapitre V sur l'ensemble des formules, c'est-à-dire les modèles de la théorie des ensembles; le théorème affirme que "toute théorie dénombrable ayant un modèle en a un dénombrable".

La consistance relative de l'axiome du choix est démontrée dans le chapitre VI à l'aide de l'axiome de fondation en utilisant la collection des ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux (satisfaisant "héréditairement" un énoncé $A(x, a_1, \dots, a_k)$ où x est la seule variable libre et a_1, \dots, a_k des ordinaux).

La consistance relative de la négation de l'axiome du choix est démontrée dans le chapitre VII sans l'axiome de fondation, puisque la démonstration repose sur l'introduction d'atomes (modèles de Fraenkel-Mostowski) définis par

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x = a)$$

En introduisant des permutations sur les éléments de X (ensemble d'atomes équipotent à ω), on peut montrer que l'ensemble des atomes ne peut être totalement ordonné, ce qui contredit l'axiome du choix.

L'ouvrage se termine sur la démonstration de la consistance de l'hypothèse généralisée du continu d'après Gödel (ensembles constructibles, voir l'ouvrage cité plus haut), avec des modifications dues à A. Lévy et C. Karp (formules restreintes, i.e. dont tous les quantificateurs sont restreints).

Dans son introduction, l'A. nous dit que son texte "constitue une introduction aux résultats de Cohen"; il faut entendre ici "introduction" au sens propre, puisque les résultats sur l'indépendance de l'hypothèse du continu ne sont pas présentés. Il n'y a pas non plus de traitement des axiomes "forts" de l'infini (pour ces compléments importants, voir J. R. Shoenfield *Mathematical logic*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1967, chap. 9).

L'ouvrage est complémentaire aux *Eléments de logique mathématique* (Dunod, Paris, 1967) de G. Kreisel et l'A., en particulier, à l'appendice II de Kreisel, auquel il faut renvoyer pour les questions "fondationnelles" de la théorie des ensembles.

Finalement, on aurait préféré un format plus grand pour un ouvrage de cette importance. Mais, dans cette petite collection, il aura sans doute la vaste diffusion qu'il mérite.

YVON GAUTHIER,
UNIVERSITÉ DE SUDBURY

Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, by S. Kobayashi. ix+148 pages. Marcel Dekker, N.Y., 1970. U.S. \$11.75.

The purpose of this book is to provide a coherent account of intrinsic pseudo-distance on complex manifolds and of their applications to holomorphic mappings. Ch. I presents the proof of Ahlfors' theorem on the holomorphic mappings of a