LIMITES PROJECTIVES DE CHAINES DE DEMI-GROUPES NILPOTENTS

F.P. Gagnon

Dans cette note nous étudions les demi-groupes avec zéro qui vérifient la condition T :

$$\text{(T)} \qquad \text{"Si } a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D^{n+1} \quad \text{alors } a = 0\text{"}$$

Le théorème 1 montre que ces demi-groupes sont isomorphes à la limite projective d'une chaîne de demi-groupes nilpotents. Le théorème 2 donne une façon de réaliser tout demi-groupe nilpotent.

DÉFINITION 1. Une chaîne de demi-groupes

$$\mathcal{C} = \left(\{D_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ji}\}_{\substack{i, j \in I \\ i > j}} \right)$$

est formée d'une famille de demi-groupes $\{D_i\}_{i \in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, d'une famille d'épimorphismes $\{\varphi_{ji}\}_{\substack{i, j \in I \\ i > j}}$, où $\varphi_{ji} : D_i \to D_j$, telle que si $i > j > k$ alors $\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki}$.

DÉFINITION 2. La limite projective d'une chaîne $\mathcal{C}$ de demi-groupes est $\varprojlim \mathcal{C}$, le demi-groupe des fonctions f de I dans $\bigcup_{i \in I} D_i$ telles que

(1) pour tout $i \in I$, $f(i) \in D_i$,

(2) si $i > j$, alors $f(j) = \varphi_{ji}(f(i))$.

Le produit de f, $f' \in \varprojlim \mathcal{C}$ est défini par $(f \circ f')(i) = f(i) \cdot f'(i) \in D_i$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-067-9 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 1. Un demi-groupe avec zéro vérifie la condition T si et seulement s'il est isomorphe à la limite projective d'une chaîne de demi-groupes nilpotents.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante.

Réciproquement soit B un demi-groupe qui vérifie la condition (T). Pour chaque entier positif n, soit $D_n = B / \theta n$. Nous écrivons $a \equiv b \ (\theta n)$ si $a = b$ où si $a, b \in B^{n+1}$. L'épimorphisme naturel de D_m sur D_n (où $m > n$) est désigné par φ_{nm} et celui de B sur D_n par η_n.

$$\mathcal{C} = (\{D_m\}_{n \in N}, \{\varphi\, mn\}^{n, m \in N}_{n > m})$$

est une chaîne de demi-groupes nilpotents, car $D_n^{n+1} = (0)$. De plus, l'application $a \to f_a$, où $f_a \in \varprojlim \mathcal{C}$ et où $f_a(n) = \eta_n(a)$, est un isomorphisme entre B et $\varprojlim \mathcal{C}$.

DÉFINITION 3. Soit $(E, <)$ est un ensemble ordonné avec élément minimum 0 une transformation f de E est diminutive si pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, $f(x) < x$ et si $f(0) = 0$.

THÉORÈME 2. Un demi-groupe D est nilpotent si et seulement si il est isomorphe à un demi-groupe de transformations diminutives d'un ensemble ordonné avec élément minimum où toutes les chaînes sont de longueur au plus égale à $n + 1$ (n est le plus petit entier tel que $D^n = 0$).

Démonstration. Il est clair que la condition est suffisante. Si réciproquement D est un demi-groupe nilpotent soit 1 un élément distinct de ceux de D.

L'ensemble $E = D \cup \{1\}$ est ordonné de la façon suivante:

(1) $x < 1$ pour tout $x \in D$

(2) $a < b$ si $a, b \in D$ et si $a \in Db$.

Pour chaque $a \in D$ la transformation f_a définie par $f_a(1) = a$ et $f_a(x) = ax$ où $x \in D$ est une transformation diminutive de E. De plus l'application $a \to f_a$ est un monomorphisme de D dans le demi-groupe des transformations diminutives de E. Enfin puisque $D^n = (0)$ il est clair que toute chaîne de E comporte au plus $n+1$ termes.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Birkhoff, Lattice theory. Colloquium Pub. No. XXV, Providence, (1948).

2. N. Bourbaki, Théorie des ensembles. Ch. IV, Act. Sci. et Ind. No. 1258, Paris, (1957).

3. A. H. Clifford et G. B. Preston, The Algebraic theory of Semi-groups. Vol. I, Math. Surveys, No. 7, Providence, (1961).

Université de Montréal.

https://doi.org/10.4153/CMB-1966-067-9 Published online by Cambridge University Press