Compositio Mathematica **110:** 277–290, 1998.

Décroissance rapide de la distribution f^{λ}

D. BARLET[1] and H.-M. MAIRE[2]
[1]*Université H. Poincaré /CNRS /INRIA, Institut E. Cartan URM 9973, Boîte postale 239, F-54506 Vandoeuvre-les-Nancy, France; e-mail: barlet@iecn.u-nancy.fr*
[2]*Section de Mathématiques, Université de Genève, Case postale 240, CH-1211 Genève 24, France; e-mail: maire@ibm.unige.ch*

Received 3 July 1996; accepted in final form 31 October 1996

Abstract. Let X be an open subset of $\mathbb{C}^n$ and $(f_1, \ldots, f_p): X \to \mathbb{C}^p$ be a holomorphic mapping. We prove that if $(x^0, 0, \lambda^0) \in T^* \times \mathbb{C}^p$ does not belong to the characteristic variety of the $\mathcal{D}_X[\lambda]$-module $\mathcal{D}_X[\lambda]f^{\lambda}$, then there exists a conic neighborhood $V \times \Gamma$ of (x^0, λ^0) such the function $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto \int |f_1|^{\lambda_1} \ldots |f_p|^{\lambda_p}\omega$ is rapidly decreasing in $|\mathrm{Im}\,\lambda|$ for $\lambda \in \Gamma$ with $\mathrm{Re}\,\lambda$ bounded, for any (n, n)-form ω of class C^∞ with compact support in V.

The following partial converse of this result is also established: if $s \mapsto \int_{f=s} \varphi$ is of class C^∞ in $\mathbb{C}^p$ for all (n, n)-forms φ of class C^∞ with compact support in X, then $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_p(x) \neq 0, \forall x \in X$.

Mathematics Subject Classifications (1991): 32C30, 32S.

Key words: singularités, intégrales-fibres.

0. Introduction

Dans notre article précédent [B-M 93], nous avons étudié l'asymptotique des intégrales-fibres pour une application $(f, g): \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2$. En fait, comme nous l'expliquions dans l'introduction, les analogues complexes des résultats obtenus ne posent que des problèmes d'écriture. Nous avons montré que, sous l'hypothèse $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = 0 \Rightarrow fg = 0$ dans $\mathbb{C}^{n+2}$, les intégrales-fibres

$$\int_{f=s,\, g=t} \varphi \quad \text{pour} \quad \varphi \in \bigwedge\nolimits^{n,n} C_c^\infty(\mathbb{C}^{n+2}),$$

ont des transformées de Mellin

$$\mathrm{I}_\varphi(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{C}^{n+2}} |f|^{2\lambda}|g|^{2\mu}\varphi \wedge \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\bar{f}} \wedge \frac{\mathrm{d}g}{g} \wedge \frac{\mathrm{d}g}{\bar{g}},$$

appartenant à une classe précise de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^2$. L'hypothèse $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = 0 \Rightarrow fg = 0$ peut être remplacée par $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g \not\equiv 0$ quitte à faire des éclatements dans la base du morphisme.

Le phénomène nouveau par rapport au cas d'une fonction $f: \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ est le fait qu'il peut exister un ensemble fini de directions rationnelles, c'est-à-dire

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

$a\lambda + b\mu = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{0\}$, telles que l'on n'ait pas décroissance rapide dans l'imaginaire autour de ces directions. De façon précise, quand $(\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu)$ reste dans un compact, on n'a pas décroissance rapide de I_φ en $(\operatorname{Im}\lambda, \operatorname{Im}\mu)$.

Le but du présent article est d'explorer ce phénomène dans la situation générale d'une application $(f_1, \ldots, f_p)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ holomorphe sous la seule condition $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_p \not\equiv 0$. Notre résultat principal est le Théorème 2.4 qui assure, sous une hypothèse géométrique (en fait microlocale), qu'au voisinage d'un point $x^0 \in \mathbb{C}^n$ et d'une direction $\lambda^0 \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$, on a effectivement décroissance rapide de

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \omega \quad \text{pour} \quad \omega \in \bigwedge^{n,n} C_c^\infty(\mathbb{C}^n),$$

uniformément dans un voisinage conique de λ^0.

Nous montrons aussi que l'ensemble des mauvaises directions en ce sens est fini sur chaque ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$, pour $(f_1, \ldots, f_p)$ donnée. Nous prouvons des réciproques – sous certaines hypothèses – de nos critères de décroissance rapide et terminons par l'application de ces résultats au cas d'une fonction méromorphe.

1. Notations et exemples

Pour un ouvert X de $\mathbb{C}^n$ et une application holomorphe non constante

$$f = (f_1, \ldots, f_p)\colon X \to \mathbb{C}^p$$

on pose

$$F := f_1 \ldots f_p; \qquad F_j := F/f_j, \quad j = 1, \ldots, p.$$

On désigne par

$$\begin{aligned} W^\#(f) &= W^\# \\ &:= \operatorname{adh}\left\{ (x, \xi, \lambda) \in T^*X \times \mathbb{C}^p \mid F(x) \neq 0, \quad \xi = \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) \right\} \end{aligned}$$

la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[\lambda]$-module $\mathcal{D}_X[\lambda] f^\lambda$ et par

$$\begin{aligned} W(f) &= W \\ &:= \operatorname{adh}\left\{ (x, \xi) \in T^*X \mid F(x) \neq 0, \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}^p \text{ tel que } \xi = \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) \right\} \\ &= \operatorname{adh} \pi_1(W^\#), \quad \text{où} \quad \pi_1\colon T^*X \times \mathbb{C}^p \to T^*X, \end{aligned}$$

la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{D}_X f^\lambda$, cf. [B-B-M-M].

REMARQUE 1.1. D'après le lemme des petits chemins, (x^0, ξ^0, λ^0) appartient à $W^{\#}$ si, et seulement si, il existe une courbe holomorphe (γ, λ) dans $X \times \mathbb{C}^p$ définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, telle que $\gamma(0) = x^0$, $\lambda(0) = \lambda^0$, $F \circ \gamma(t) \neq 0$ pour $0 \neq t$ petit et $\Sigma_1^p \lambda_j(t)(\mathrm{d}f_j/f_j)(\gamma(t)) \to \xi^0$ quand $t \to 0$.

Nous introduisons aussi le revêtement universel $\tilde{X}$ de $X\backslash\{F = 0\}$ et, pour $\lambda \in \mathbb{C}^p$, les sous-ensembles

$$\tilde{G}^{\lambda} := \{(s, \tilde{x}) \in \mathbb{C}^{\times} \times \tilde{X} \mid f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}(\tilde{x}) = s\},$$

$$G^{\lambda} := \text{adh}\{(s, x) \in \mathbb{C}^{\times} \times X \mid \exists \tilde{x} \text{ tel que } (s, \tilde{x}) \in \tilde{G}^{\lambda}\}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{Q}^p$, G^{λ} est un ensemble analytique.

Le conormal de G^{λ} sera désigné par

$$\begin{aligned} &T^*_{G^{\lambda}}(\mathbb{C} \times X) \\ &\quad = \text{adh}\left\{(s, x; \sigma, \xi) \in T^*(\mathbb{C} \times X) \mid F(x) \neq 0, \quad f_1^{\lambda_1} \ldots f_p^{\lambda_p}(\tilde{x}) = s, \right. \\ &\qquad\qquad \left. \exists \rho \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sigma = \Leftrightarrow \rho \frac{\mathrm{d}s}{s} \quad \text{et} \quad \xi = \rho \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) \right\}. \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda \in \mathbb{C}^p$ est distinct de 0, nous considérons encore

$$W^{\lambda} := \{(x, \xi) \in T^*X \mid (x, \xi, \lambda) \in W^{\#}\},$$

$$W_0^{\lambda} := \{(x, \xi) \in W^{\lambda} \mid F(x) = 0\},$$

$$\dot{W}^{\lambda} := \text{adh}\left\{(x, \xi) \in T^*X \mid F(x) \neq 0, \quad \xi = \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}f}{f_j}(x)\right\},$$

$$Z^{\lambda} := \{x \in X \mid (x, 0) \in W^{\lambda}\},$$

$$\dot{Z}^{\lambda} := \{x \in X \mid (x, 0) \in \dot{W}^{\lambda}\}.$$

REMARQUE 1.2. De ces définitions, il découle directement que si $x^0 \notin Z^{\lambda^0}$ alors il existe un voisinage V de x^0 et un voisinage Λ de λ^0 tel que $x \notin Z^{\lambda}$, $\forall x \in V$ et $\forall \lambda \in \Lambda$.

EXEMPLE 1.3. Quand $p = 1$, on a

$$x^0 \in Z^{\lambda} \Leftrightarrow f(x^0) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f(x^0) = 0.$$

En effet, si $(x^0, 0, \lambda)$ appartient à $W^\#$, alors soit $f(x^0) \neq 0$ et, par suite $\mathrm{d}f(x^0) = 0$, soit $f(x^0) = 0$ et $\mathrm{d}f(x^0) = 0$; dans ce cas, la Remarque 1.1 donne $\gamma: \mathbb{C} \to X$ avec $(\mathrm{d}(f \circ \gamma)/f \circ \gamma)(t) \to 0$ et $f \circ \gamma(t) \to 0$ quand $t \to 0$. En écrivant $f \circ \gamma(t) = ct^p + O(t^{p+1})$, où c et p sont distincts de 0, on voit que $p(\mathrm{d}t/t) \to 0$. Ainsi le cas $f(x^0) = 0$ ne se présente pas. La réciproque est évidente.

EXEMPLE 1.4. Soit $X = \mathbb{C}^2$ et f donnée par $f_1(x) = x_1^3 + x_2^2$, $f_2(x) = x_1^2 + x_2^2$. Alors

$$Z^\lambda \neq \emptyset \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad \text{ou} \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

REMARQUE 1.5. Pour λ donné non nul, les inclusions suivantes découlent immédiatement des définitions

$$\dot{W}^\lambda \subseteq W^\lambda \quad \text{et} \quad \dot{Z}^\lambda \subseteq Z^\lambda.$$

L'égalité n'a pas lieu en général, comme le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.6. Soit X la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et f donnée par $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = 1 + x_1x_2$. Alors

$$\dot{W}^{(0,1)} = \left\{(x, \xi) \mid \xi_1 = \frac{x_2}{1 + x_1x_2}, \quad \xi_2 = \frac{x_1}{1 + x_1x_2}\right\},$$

$$W^{(0,1)} = \{(0, x_2; \xi_1, 0)\},$$

$$\dot{Z}^{(0,1)} = \{(0,0)\}, \quad Z^{(0,1)} = \{(0, x_2)\}.$$

LEMME 1.7. *Pour $x^0 \in X$ tel que $F(x^0) \neq 0$, on a*

$$x^0 \in \dot{Z}^{\lambda^0} \Leftrightarrow x^0 \in Z^{\lambda^0}.$$

Preuve. Si x^0 appartient à Z^{λ^0}, on peut utiliser la Remarque 1.1. Comme $(\mathrm{d}f_j/f_j) \circ \gamma$ est borné $\forall j$ car $F(x^0) \neq 0$, on a

$$\sum \lambda_j^0 \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} \circ \gamma(t) = \sum (\lambda_j^0 \Leftrightarrow \lambda_j(t)) \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} \circ \gamma(t) + \sum \lambda_j(t) \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} \circ \gamma(t) \to 0.$$

Donc x^0 appartient à $\dot{Z}^{\lambda^0}$.

La réciproque provient de la Remarque 1.5. □

PROPOSITION 1.8. *Soient $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}^p \backslash \{0\}$ tels que $T_x^* X \cap W^\lambda \neq \emptyset$. Si $f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$ et $f_{k+1}(x) \ldots f_p(x) \neq 0$, alors*

$$\exists a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^* \textit{ tels que } \sum_1^p a_j \lambda_j = 0.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

Preuve. D'après la Remarque 1.1, si (x, ξ) appartient à W^{λ}, il existe une courbe holomorphe $t \to (\gamma(t), \lambda(t))$ telle que

$$\lambda(t) \to \lambda \quad \text{et} \quad \sum \lambda_j(t) \frac{\mathrm{d}(f_j \circ \gamma)}{f_j \circ \gamma}(t) \to \langle \xi, \gamma'(0) \rangle, \quad t \to 0.$$

On peut écrire

$$f_j \circ \gamma(t) = c_j t^{a_j} + O(t^{a_j+1}), \quad t \to 0,$$

avec $c_1 \ldots c_p \neq 0$, $a_1 \ldots a_k \neq 0$ et $a_{k+1} = \cdots = a_p = 0$. D'où

$$\sum_1^k \lambda_j(t) a_j \frac{\mathrm{d}t}{t} + O(1) \to \langle \xi, \gamma'(0) \rangle, \quad t \to 0.$$

Donc $(1/t)\Sigma_1^k \lambda_j(t) a_j$ est borné, i.e., $\Sigma_1^k \lambda_j a_j = 0$. □

REMARQUE 1.9. Sous les mêmes hypothèses quand $p = 2$ et $k = 1$, on a

$$x \in Z^{\lambda} \Rightarrow \lambda_1 = 0.$$

Etant donné V ouvert $\subseteq X$, la projection

$$\pi_2 \colon V \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \backslash \{(0,0)\}) \to V \times (\mathbb{C}^n \backslash \{0\})$$

ne passe pas aux quotients par l'action de $\mathbb{C}^{\times}$, mais sa restriction à $V \times (\mathbb{C}^n \backslash \{0\}) \times \mathbb{C}^p$ y passe. Nous noterons

$$[\pi_2] \colon V \times \mathbb{P}((\mathbb{C}^n \backslash \{0\}) \times \mathbb{C}^p) \to V \times \mathbb{P}^{n-1},$$

$$(x, [\xi \colon \lambda]) \mapsto (x, [\xi]),$$

l'application ainsi obtenue.

Cette construction se généralise à

$$[\pi_2^{\Gamma}] \colon V \times \mathbb{P}((\mathbb{C}^n \backslash \{0\}) \times \Gamma) \to V \times \mathbb{P}^{n-1},$$

où Γ est un cône de $\mathbb{C}^p$.

2. Opérateur de Kashiwara microlocal

PROPOSITION 2.1. *Les conditions suivantes pour $x^0 \in X$ et $\lambda^0 \in \mathbb{C}^p \backslash \{0\}$ sont équivalentes*

(i) $x^0 \notin Z^{\lambda^0}$;

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

(ii) $\xi \in \mathbb{C}^n$ et $(x^0, \xi, \lambda^0) \in W^\# \Rightarrow \xi \neq 0$;

(iii) *pour* $i = 1, \ldots, p$, *le germe en* (x^0, λ^0) *de* $\lambda_i F$ *est entier sur l'idéal engendré par* $\Sigma_{j=1}^p \lambda_j F_j \partial_k f_j$, $k = 1, \ldots, n$;

(iv) *il existe un voisinage* V *de* x^0, *un voisinage conique* Γ *de* λ_0 *et* $C > 0$ *tels que* $|\lambda_i F(x)| \leqslant C || \Sigma_{j=1}^p \lambda_j F_j(x)\, \mathrm{d} f_j(x)||$, $i = 1, \ldots, p$, $x \in V, \lambda \in \Gamma$.

REMARQUE 2.2. La condition (iii) s'explicite comme suit: il existe un voisinage V de x^0, un voisinage conique Γ de λ, des entiers $m_i > 0$ et $a_{k,i} \in \mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^n)$, pour $i = 1, \ldots, p$, homogènes de degré k en la deuxième variable tels que

$$(\lambda_i F(x))^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_{k,i}\left(x, \sum \lambda_j F_j(x)\, \mathrm{d} f_j(x)\right)(\lambda_i F(x))^{m_i - k} = 0,$$
$$\forall x \in V,\ \forall \lambda \in \Gamma.$$

Preuve de la Proposition (2.1).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Elle provient de $x^0 \notin Z^{\lambda^0} \Leftrightarrow (x^0, 0, \lambda^0) \notin W^\#$.

(i) $\Rightarrow$ (iii): D'après la Remarque 1.2, si $x^0 \notin Z^{\lambda^0}$, il existe un voisinage V de x^0 et un voisinage conique Γ de λ^0 tels que $x \notin Z^\lambda$, $\forall x \in V \times \Gamma$, donc

$$(x, \xi, \lambda) \in W^\#, \quad (x, \lambda) \in V \times \Gamma \Rightarrow \xi \neq 0.$$

Par suite, la projection π_2^Γ passe aux quotients

$$[\pi_2^\Gamma] \colon \mathbb{P}(W^\# \cap V \times \mathbb{C}^n \times \Gamma) \to \mathbb{P}(V \times \mathbb{C}^n).$$

Comme $[\pi_2^\Gamma]$ est propre et finie, les fonctions $\lambda_1 F, \ldots, \lambda_p F$ sur $W^\# \cap V \times \mathbb{C}^n \times \Gamma$ satisfont une relation de dépendance intégrale sur $\mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^n)$. La condition (iii) en découle.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): D'après (iii) explicité dans la Remarque 2.2 la fonction $\lambda_i F$ est bornée par

$$\text{const} \sup_{x \in V} \left| a_{k,i}\left(x, \sum \lambda_j F_j(x)\, \mathrm{d} f_j(x)\right)\right|^{1/k}.$$

Ceci donne (iv), d'après l'homogénéité des $a_{k,i}$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Si x n'annule pas F, alors (iv) entraîne

$$|\lambda_i| \leqslant C \left\| \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\mathrm{d} f_j}{f_j}(x) \right\|, \quad i = 1, \ldots, p, \quad x \in V, \lambda \in \Gamma.$$

Par densité de $\{F(x) \neq 0\}$ dans X, on en déduit

$$|\lambda_i| \leqslant C ||\xi||, \quad \text{si} \quad (x, \xi, \lambda) \in W^\#, \quad x \in V,\ \lambda \in \Gamma,$$

et donc $\xi \neq 0$ si $(x^0, \xi, \lambda^0) \in W^{\#}$ car $\lambda^0 \neq 0$. □

COROLLAIRE 2.3. $Z^{\lambda} = \emptyset, \forall\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \pi_1 \colon W^{\#} \to W$ *propre*.

Preuve. Prenons un compact $K \times \Xi$ de W. Puisque Z^{λ} est vide quel que soit λ, on peut recouvrir $K \times \mathbb{C}^p$ par un nombre fini de $V \times \Gamma$ satisfaisant la majoration (iv). Donc

$$|\lambda_i| \leqslant C \left| \sum \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} \right|, \quad \forall x \in K \backslash \{F = 0\},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}^p.$$

Pour $(x, \xi) \in (K\backslash\{F = 0\}) \times \Xi$ et $(x, \xi, \lambda) \in W^{\#}$, on a $\Sigma\lambda_j(\mathrm{d}f_j/f_j)(x) \in \Xi$ et donc $||\lambda||$ est borné; par densité, ceci est encore vrai pour $x \in K$. La réciproque découle de l'implication: $x \in Z^{\lambda} \Rightarrow (x, 0, t\lambda) \in W^{\#}, \forall t \in \mathbb{C}$. □

THÉORÈME 2.4. *Si* $x^0 \notin Z^{\lambda^0}$, *il existe un voisinage conique* $V \times \Gamma$ *de* (x^0, λ^0) *tel que, pour toute* (n, n)*-forme* φ *de classe* C^{∞} *à support compact dans* V,

$$\lambda \mapsto \int |f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \varphi$$

est à décroissance rapide en $|\mathrm{Im}\,\lambda|$, *pour* $\lambda \in \Gamma$ *avec* $\mathrm{Re}\,\lambda$ *borné* [1]. *Par suite, les transformées de Mellin complexes des intégrales-fibres sont à décroissance rapide dans ce domaine.*

Preuve. Nous généralisons la construction de M. Kashiwara [K] d'un bon opérateur annulant f^{λ}. Si (iii) de la Proposition 2.1 est satisfaite, on en déduit les relations de dépendance intégrale de la Remarque 2.2. La fonction σ_i

$$(x, \xi, \lambda_i) \mapsto \lambda_i^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_{k,i}(x, \xi) \lambda_i^{m_i - k},$$

s'annule sur la variété caractéristique $W^{\#}$ du $\mathcal{D}_X[\lambda]$-module $\mathcal{D}_X[\lambda] f^{\lambda}$, puisque, quand

$$\xi = \sum \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) = \sum \lambda_j \frac{F_j}{F}\, \mathrm{d}f_j(x),$$

on a

$$\begin{aligned} &\sigma_i(x, \xi, \lambda_i) \\ &\quad = \lambda_i^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_{k,i}\left(x, \sum \lambda_j F_j(x)\, \mathrm{d}f_j(x)\right) \lambda_i^{m_i - k} F(x)^{-k} \end{aligned}$$

[1] Idem avec $f^{\lambda + l} \bar{f}^{\lambda - l}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

$$= F(x)^{-m_i} \left((\lambda_i F(x))^{m_i} + \sum_{k=1}^{m_i} a_{k,i} \left(x, \sum \lambda_j F_j(x)\, \mathrm{d}f_j(x) \right) \right.$$
$$\left. \times (\lambda_i F(x))^{m_i - k} \right).$$

D'après le théorème des zéros, il existe un opérateur différentiel $P_i(x, \partial_x, \lambda_i)$ dont le symbole principal est une puissance de σ_i tel que $P_i(x, \partial_x, \lambda_i) f^\lambda = 0$. Cet opérateur se décompose de la façon suivante

$$P_i(x, \partial_x, \lambda_i) = \lambda_i^{M_i} + \sum_{k=1}^{M_i} b_{k,i}(x, \partial_x) \lambda_i^{M_i - k} =: \lambda_i^{M_i} \Leftrightarrow Q_i(x, \partial_x, \lambda_i).$$

Nous avons donc construit des opérateurs différentiels Q_i à coefficients holomorphes de degré $< M_i$ en λ tels que

$$Q_i(x, \partial_x, \lambda_i) f^\lambda = \lambda_i^{M_i} f^\lambda.$$

Puisque

$$\int |f_1|^{2\lambda_1} \ldots |f_p|^{2\lambda_p} \varphi$$

est borné quand Re λ est borné, une classique intégration par parties montre comme dans [B-M 87, Prop. 10] la décroissance rapide de l'intégrale en Im λ, pour autant que λ reste dans le cône Γ. □

PROPOSITION 2.5. *Les conditions suivantes pour $x^0 \in X$ et $\lambda^0 \in \mathbb{C}^p \backslash \{0\}$ sont équivalentes*

(i) $x^0 \notin \dot{Z}^{\lambda^0}$;
(ii) $\forall s^0 \neq 0,\ (s^0, x^0; \mathrm{d}s, 0) \notin T^*_{G^{\lambda^0}}(\mathbb{C} \times X)$;
(iii) *le germe en x^0 de F est entier sur l'idéal engendré par $\Sigma_{j=1}^p \lambda_j^0 F_j \partial_k f_j$, $k = 1, \ldots, n$;*
(iv) *il existe un voisinage V de x^0 et $C > 0$ tels que*

$$|F(x)| \leqslant C \left\| \sum_{j=1}^p \lambda_j^0 F_j(x)\, \mathrm{d}f_j(x) \right\|, \quad x \in V.$$

Preuve. Elle est identique à celle de la Proposition 2.1, sauf pour (i) ⇔ (ii).

(i) ⇒ (ii): Supposons que $s^0 \neq 0$ est tel que $(s^0, x^0; \mathrm{d}s, 0) \in T^*_{G^\lambda}(\mathbb{C} \times X)$. On a donc des suites $s^\nu \to s^0$ et $x^\nu \to x^0$ telles que $F(x^\nu) \neq 0$, $f^{\lambda^0}(x^\nu) = s^\nu$, $\rho^\nu / s^\nu \to$ ⇔1 et $\rho^\nu \Sigma_j \lambda_j^0 (\mathrm{d}f_j / f_j)(x^\nu) \to 0$. Il s'ensuit que $s^\nu \Sigma_j \lambda_j^0 (\mathrm{d}f_j / f_j)(x^\nu) \to 0$ et donc $\Sigma_j \lambda_j^0 (\mathrm{d}f_j / f_j)(x^\nu) \to 0$ puisque $s^0 \neq 0$. Ainsi $x^0 \in \dot{Z}^{\lambda^0}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

(ii) $\Rightarrow$ (i): Soit $x_0 \in \dot{Z}^{\lambda^0}$; d'après le lemme des petits chemins, il existe une courbe holomorphe γ dans X définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ telle que

$$\gamma(0) = x^0, \quad f^{\lambda^0}(\gamma(t)) \neq 0 \quad \text{si} \quad t \neq 0, \quad \text{et} \quad \sum_j \lambda_j^0 \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(\gamma(t)) \to 0.$$

Posons $\varphi_j = f_j \circ \gamma$; l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\left| \sum_j \lambda_j^0 \frac{\varphi_j'}{\varphi_j}(t) \right| \leqslant \left\| \sum_j \lambda_j^0 \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j} \gamma(t) \right\| ||\gamma'(t)||,$$

entraîne

$$\sum_j \lambda_j^0 \frac{\varphi_j'}{\varphi_j}(t) \to 0.$$

Pour t voisin de 0, on a $\varphi_j(t) \sim c_j t^{a_j}$ avec $c_j \neq 0$ et $a_j \in \mathbb{N}$. La relation précédente donne

$$\frac{1}{t} \sum_j \lambda_j^0 a_j \to 0 \quad \text{et donc} \quad \sum_j \lambda_j^0 a_j = 0.$$

En prenant $s^0 = f^{\lambda^0}(\gamma(0)) = c_1 \dots c_p \neq 0$, on obtient $(s^0, x^0; \mathrm{d}s, 0) \in T^*_{G^{\lambda^0}}(\mathbb{C} \times X)$ en choisissant $\rho = \Leftrightarrow 1/s^0$ dans la définition. □

COROLLAIRE 2.6. *Si $x^0 \notin \dot{Z}^{\lambda^0}$, il existe un voisinage V de x^0 tel que, pour toute (n, n)-forme φ de classe C^∞ à support compact dans V,*

$$\lambda \mapsto \int |f_1|^{2\lambda_1} \dots |f_p|^{2\lambda_p} \varphi$$

est à décroissance rapide en $|\mathrm{Im}\, \lambda|$ *quand* $\lambda \in \mathbb{C}\lambda^0$ *et* $\mathrm{Re}\, \lambda$ *est borné.*

Preuve. Elle est identique à celle du Théorème 2.4 avec $\lambda = \lambda^0$. □

3. Les mauvaises directions

THÉORÈME 3.1. *Soit U un ouvert relativement compact de X. Alors il existe un ensemble fini $A \subset \mathbb{N}^p$ tel que, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^p \setminus \{0\}$,*

$$W_0^\lambda \cap T^*U \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{a \in A} (a_1\lambda_1 + \dots + a_p\lambda_p) = 0.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soit $\pi\colon \tilde{X} \to X$ une désingularisation de $\{F = 0\}$ et $\tilde{F} = F \circ \pi$. Comme π est un isomorphisme en dehors de $\{\tilde{F} = 0\}$, on a, pour $\lambda \neq 0$

$$T^*\pi \left\{ (x,\xi) \mid F(x) \neq 0, \quad \xi = \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) \right\}$$

$$= \left\{ (\tilde{x},\tilde{\xi}) \mid \tilde{F}(\tilde{x}) \neq 0, \quad \tilde{\xi} = \sum_1^p \lambda_j \frac{\mathrm{d}\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j}(\tilde{x}) \right\}.$$

En prenant l'adhérence, on obtient $T^*\pi \times 1_{\mathbb{C}^p}\,(W^\#) \subseteq \tilde{W}^\#$ et donc $T^*\pi(W_0^\lambda) \subseteq \tilde{W}_0^\lambda$. En conséquence, il suffit de démontrer le résultat localement dans $\tilde{X}$.

Dans ce cas (après suppression des tildes), on sait que f a localement l'expression suivante

$$\begin{matrix} f_1(x) = x^{a^1} h_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) = x^{a^p} h_p(x) \end{matrix} \qquad \text{avec } a^1,\dots,a^p \in \mathbb{N}^n \text{ et } h_1,\dots,h_p \text{ inversibles.}$$

Par suite

$$\sum_j \lambda_j \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x) = \sum_j \lambda_j \left(\sum_i \frac{a_i^j}{x_i}\,\mathrm{d}x_i + \frac{\mathrm{d}h_j}{h_j}(x) \right)$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_i^j \lambda_j \right) \frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\mathrm{d}h_j}{h_j}(x).$$

Soit $(x^0,\xi^0) \in W_0^\lambda \cap T^*U$. Le lemme des petits chemins fournit une courbe holomorphe $t \mapsto (x(t),\lambda(t))$ dans $X \times \mathbb{C}^p$ telle que

$$(x(t)), \sum \lambda_j(t) \frac{\mathrm{d}f_j}{f_j}(x(t)) \to (x^0,\xi^0) \quad \text{et} \quad \lambda(t) \to \lambda \neq 0 \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Pour au moins un $k \in [1,n]$, on aura $||\mathrm{d}x_k/x_k(t)|| \to \infty$; puisque $\Sigma\lambda_j(t)(\mathrm{d}h_j/h_j)(x(t))$ tend vers $\Sigma\lambda_j(\mathrm{d}h_j/h_j)(x^0)$, ceci implique $\Sigma_{j=1}^p a_k^j \lambda_j = 0$ car les covecteurs $\mathrm{d}x_1/x_1,\dots,\mathrm{d}x_n/x_n$ sont indépendants. Dans notre cas, l'ensemble $A = \{(a_k^1,\dots,a_k^p) \mid k \in [1,n]\}$ convient. □

COROLLAIRE 3.2. *Faisons en plus l'hypothèse suivante*

$$\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_p = 0 \Rightarrow f_1 \cdots f_p = 0. \tag{H}$$

Alors, $\forall\lambda \in \mathbb{C}^p \backslash \{0\}$,

$$Z^\lambda \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{a \in A} (a_1\lambda_1 + \cdots + a_p\lambda_p) = 0.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Vérifions que (H) entraîne l'inclusion suivante

$$Z^\lambda \subseteq \{F = 0\}.$$

Soit $x^0 \in X$ tel que $F(x^0) \neq 0$. D'après (H), les différentielles $(\mathrm{d}f_1/f_1), \dots, (\mathrm{d}f_p/f_p)$ sont indépendantes en x^0, et donc $\Sigma\lambda_j(\mathrm{d}f_j/f_j)(x^0) \neq 0$. Par suite $x^0 \notin Z^\lambda$.

Le Théorème 3.1 s'applique. □

4. Réciproque partielle du Théorème 2.4

THEOREME 4.1. *Soient X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $f\colon X \to \mathbb{C}^p$ une application holomorphe telle que $\forall \varphi \in \bigwedge^{n-p,n-p} C_c^\infty(X)$, $s \mapsto \int_{f=s} \varphi$ est de classe C^∞. Alors* $\mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_p(x) \neq 0$, $\forall x \in X$.

Preuve. (1) Cas $p = 1$. Quand f n'a que des singularités isolées, le résultat est démontré dans [B 84, Cor. 1] et [B 86, Thm. 3].

En général, on commence par stratifier le lieu singulier de f. Soit x^0 un point d'une strate de dimension maximale k de cet ensemble. On a $0 < k < n$. En x^0, il existe un covecteur ξ^0 non caractéristique, i.e., $(x^0, \xi^0) \notin W$, puisque la variété caractéristique du $\mathcal{D}_X[\lambda]$-module $\mathcal{D}_X[\lambda]f^\lambda$ ne contient toute la fibre de l'espace cotangent qu'en les points des strates de dimension 0 du lieu singulier. Le théorème de restriction non caractéristique de [B-M 89] s'applique: si H désigne l'hyperplan d'équation $\langle \xi^0, x \Leftrightarrow x^0\rangle = 0$, la transformée de Mellin de

$$\int_{f|_H=s} \varphi|_H$$

n'a, comme $\mathcal{M}(\int_{f=s}\varphi)$, que des pôles simples aux entiers négatifs. Ce procédé de section non caractéristique peut être itéré $n \Leftrightarrow k$ fois et on obtient un sous-espace vectoriel H_k de dimension $n \Leftrightarrow k$ tel que

$$\mathcal{M}\left(\int_{f|_{H_k}=s} \varphi|_{H_k}\right)$$

n'a que des pôles simples aux entiers négatifs. Comme x^0 est une singularité isolée de $f|_{H_k}$, le corollaire cité plus haut donne $\mathrm{d}(f|_{H_k})(x^0) \neq 0$ et donc $\mathrm{d}f(x^0) \neq 0$.

(2) Cas $p = 2$ et $\mathrm{d}f_1(x^0) \neq 0$. Posons $Y = \{f_1(x) = f_1(x^0)\}$; par hypothèse, Y est lisse près de x^0. Puisque, $s \mapsto \int_{f=s}\varphi|_Y$ est C^∞ pour $\varphi \in \bigwedge^{n-p,n-p} C_c^\infty(X)$, on a, par restriction à Y, que $s_2 \mapsto \int_{Y\cap\{f_2=s_2\}} \varphi|_Y$ est C^∞. Comme $\varphi|_Y$ parcourt l'ensemble des formes de type $(n \Leftrightarrow 2, n \Leftrightarrow 2)$ sur Y, on peut appliquer le cas (1). On en déduit $\mathrm{d}f_2|_Y(x^0) \neq 0$, c'est-à-dire $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2(x^0) \neq 0$.

(3) Cas $p = 2$. Soit $x_0 \in X$; sans restreindre la généralité, on peut supposer que dans un voisinage U de x^0, on a: $\mathrm{d}f_1(x) = 0 \Rightarrow f_1(x) = 0$.

Si $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2(x) = 0$, le point (2) exclut $\mathrm{d}f_1(x) \neq 0$. Donc $\mathrm{d}f_1(x) = 0$ et, par suite, $f_1(x) = 0$. D'où l'implication $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2(x) = 0 \Rightarrow f_1(x) = 0$. Le Nullstellensatz donne un entier N tel que

$$|f_1|^{2N} \textstyle\bigwedge^{n,n} C_c^\infty(U) = \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}\bar{f}_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}\bar{f}_2 \wedge \bigwedge^{n-2,n-2} C_c^\infty(U).$$

Prenons $\omega \in \bigwedge^{n,n} C_c^\infty(U)$ et écrivons

$$\begin{aligned} F_\omega(\lambda_1) &:= \int |f_1|^{2\lambda_1}\omega = \int |f_1|^{2\lambda_1 - 2N}|f_1|^{2N}\omega \\ &= \int |f_1|^{2\lambda_1 - 2N}\,\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}\bar{f}_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}\bar{f}_2 \wedge \varphi =: G_\varphi(\lambda_1 \Leftrightarrow N). \end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction G_φ n'a que des pôles simples aux entiers négatifs; donc F_ω n'a que des pôles simples aux entiers $< N$. Puisqu'elle ne saurait avoir de pôles aux entiers $\geqslant 0$, on peut appliquer le cas (1). Il s'ensuit que $\mathrm{d}f_1(x^0) \neq 0$. Grâce à (2), on en déduit $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2(x^0) \neq 0$.

(4) Le cas p quelconque se démontre de la même manière par récurrence sur p. □

COROLLAIRE 4.2. *Soit $x^0 \in X$ tel que $F(x^0) \neq 0$. S'il existe un voisinage V de x^0 tel que, pour toute $\varphi \in \bigwedge^{n-p,n-p} C_c^\infty(V)$:*

$$\int f^{\lambda+l}\bar{f}^{\lambda-l}\varphi \wedge \frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}_1}{\bar{f}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}f_p}{f_p} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}_p}{\bar{f}_p}$$

est à décroissance rapide en Im λ *et $l \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^p$, pour* Re λ *borné, alors x^0 n'appartient à aucun des Z^λ correspondants.*

Preuve. Il suffit de se rappeler que, pour une distribution T à suport compact dans $(\mathbb{C}\backslash\{0\})^p$, on a

$T \in C^\infty \Leftrightarrow \mathcal{M}(T)$ à décroissance rapide dans l'imaginaire. □

Toujours sous l'hypothèse $F(x^0) \neq 0$, nous avons une version microlocale du Corollaire 4.2 qui n'est autre que la réciproque du Théorème 2.4.

THEOREME 4.3. *Soient $x^0 \in X$ tel que $F(x^0) \neq 0$ et $\lambda^0 \in \mathbb{C}^p\backslash\{0\}$. S'il existe un voisinage V de x^0 et un voisinage conique Γ de λ^0 tels que, pour toute $\omega \in \bigwedge^{n,n} C_c^\infty(V)$:*

$$\int f^{\lambda+l}\bar{f}^{\lambda-l}\omega$$

est à décroissance rapide en Im λ, *pour $\lambda \in \Gamma$ et $l \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^p$, alors $x^0 \notin Z^{\lambda^0}$.*

Preuve. Au voisinage de x^0, on peut considérer la fonction holomorphe

$$g = f_1^{\lambda_1^0} \ldots f_p^{\lambda_p^0}.$$

La décroissance rapide de $\int g^{\tau+m}\bar{g}^{\tau-m}$, pour $\tau \in \mathbb{C}$ et $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, est équivalente à la régularité C^{∞} des intégrales-fibres de g et donc $\mathrm{d}g(x^0) \neq 0$. Or

$$\frac{\mathrm{d}g}{g} = \lambda_1^0 \frac{\mathrm{d}f_1}{1} + \cdots + \lambda_p^0 \frac{\mathrm{d}f_p}{f_p}. \qquad \square$$

QUESTION 4.4. Le résultat précédent est-il encore vrai sous l'hypothèse de décroissance rapide pour les formes du type

$$\varphi \wedge \frac{\mathrm{d}f_1}{f_1} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}_1}{\bar{f}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\mathrm{d}f_p}{f_p} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{f}_p}{\bar{f}_p}$$

seulement.

EXEMPLE 4.5. Quand $p = 2$, $f_1(x^0) = 0$ et $f_2(x^0) \neq 0$, la Remarque 1.9 donne l'implication: $x^0 \in Z^{\lambda} \Rightarrow \lambda = (0, \lambda_2)$. De plus

$$x^0 \in \dot{Z}^{(0,1)} \Rightarrow \mathrm{d}f_2(x^0) = 0 \Rightarrow \int |f_2|^{2\lambda_2}\psi$$

pas à décroissance rapide. Ceci conforte une réciproque du Corollaire 2.6.

5. Cas d'une fonction méromorphe

Dans ce paragraphe, on utilise les notations suivantes

$$f_1 = f, \qquad f_2 = g, \qquad \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \Leftrightarrow 1,$$

$$G = G^{(1,-1)} = \{(s,x) \in \mathbb{C} \times X \mid f(x) \Leftrightarrow s g(x) = 0\},$$

$$\begin{aligned} &T^*_G(\mathbb{C} \times X) \\ &\quad = \mathrm{adh}\{(s,x;\sigma,\xi) \in T^*(\mathbb{C} \times X) \mid f(x) \Leftrightarrow s g(x) = 0 \quad \text{et} \\ &\qquad\qquad \sigma = \Leftrightarrow \tau g(x)\,\mathrm{d}s, \quad \xi = \tau(\mathrm{d}f(x) \Leftrightarrow s\,\mathrm{d}g(x))\}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}\colon \mathbb{C} \times X \to \mathbb{C}, \quad (s,x) \mapsto s,$$

$$W(\mathbf{p}) = \{(s,x;\sigma,\xi) \in T^*(\mathbb{C} \times X) \mid \xi = 0\},$$

$$W_0(\mathbf{p}) = \{(s,x;\sigma,\xi) \in W(\mathbf{p}) \mid s = 0\},$$

$WF([G])$ = front d'onde du courant d'intégration sur G (sans la section nulle).

https://doi.org/10.1023/A:1000220908077 Published online by Cambridge University Press

THEOREME 5.1. *Les implications suivantes*

$$\begin{array}{c} \qquad b_2 \\ \qquad \Downarrow \\ a \Leftrightarrow b_1 \Rightarrow d \Rightarrow c \end{array}$$

ont lieu entre les propriétés ci-dessous

(a) $\dot{Z}^{(1,-1)} = \emptyset$;

(b$_1$) $T^*_G(\mathbb{C} \times X) \cap W(\mathbf{p}) \subseteq W_0(\mathbf{p}) \cup T^*_{\mathbb{C}\times X}(\mathbb{C} \times X)$;

(b$_2$) $WF([G]) \cap W(\mathbf{p}) \subseteq W_0(\mathbf{p})$;

(c) $\forall \varphi \in \bigwedge^{n-1,n-1} C^\infty_c(\mathbb{C}^\times \times X)$, *la fonction* $s \mapsto \int_{G\cap \mathbf{p}^{-1}(s)} \varphi$ *est de classe* C^∞;

(d) $\forall \omega \in \bigwedge^{n,n} C^\infty_c(X)$, *la fonction* $\lambda \mapsto \int_X |f/g|^{2\lambda}\omega$ *est à décroissance rapide en* $\operatorname{Im}\lambda$.

Preuve.

$a \Leftrightarrow b_1$: Découle de (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de la Proposition 2.5.
$b_2 \Rightarrow b_1$: Provient de l'inclusion $T^*_G(\mathbb{C} \times X) \subseteq WF([G]) \cup T^*_{\mathbb{C}\times X}(\mathbb{C} \times X)$.
$b_1 \Rightarrow d$: C'est le Corollaire 2.6.
$d \Rightarrow c$: Immédiat par transformation de Mellin.

REMARQUE 5.2. L'implication $b_2 \Rightarrow c$ est un cas particulier de

$$WF([Y]) \cap W(\mathbf{p}) = \emptyset \Rightarrow s \mapsto \int_{Y\cap \mathbf{p}^{-1}(s)} \varphi \quad \text{est} \quad C^\infty,$$

pour toute $\varphi \in \bigwedge^{n-1,n-1} C^\infty_c(\mathbb{C} \times X)$ et Y ensemble analytique $\subseteq \mathbb{C} \times X$. Une réciproque, pour Y à singularité isolée, de ce résultat donnerait l'équivalence des 5 propriétés du Théorème 5.1, dans ce cas.

Bibliographie

[B84] Barlet, D.: Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$, *Annales Inst. Fourier (Grenoble)* 34 (1984) 75–107.

[B86] Barlet, D.: Monodromy and poles of $\int_X |f|^{2\lambda}\square$, *Springer Lecture Notes* 1194 (1986) 1–7.

[B-M 87] Barlet, D. et Maire, H.-M.: Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres, *Springer Lecture Notes* 1295 (1987) 11–23.

[B-M 89] Barlet, D. et Maire, H.-M.: Asymptotic expansion of complex integrals via Mellin transform, *J. Funct. Analysis* 83 (1989) 233–257.

[B-M 93] Barlet, D. et Maire, H.-M.: Asymptotique des intégrales-fibres, *Annales Inst. Fourier (Grenoble)* 43 (1993) 1267–1299.

[B-B-M-M] Biosca, H., Briançon, J., Maisonobe, P. et Maynadier, H.: *Modules différentiels et espaces conormaux associés à un morphisme*, Prépublication Université de Nice No 451 (1996).

[K] Kashiwara, M.: B-functions and holonomic systems, *Invent. Math.* 38 (1976) 33–53.