BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 11G09
VOL. 50 (1994) [273–286]

MÉTHODES FONCTIONNELLES POUR LA TRANSCENDANCE EN CARACTÉRISTIQUE FINIE

LAURENT DENIS

There are essentially two ways to obtain transcendence results in finite characteristic. The first, historically, is to use Ore's lemma and to prove that a series whose coefficients satisfy well-behaved divisibility properties cannot be a zero of an additive polynomial. This method is of the same kind as the method of p-automata. The second one is to try to imitate the usual methods in characteristic zero and to do transcendence theory with t-modules analogously to what we can do with algebraic groups. We want to show here that transcendence results over $\mathbf{F}_q(T)$ can also be obtained with the help of the variable T. If $e_C(z)$ is the Carlitz exponential function and $e = e_C(1)$, we obtain, in particular, that $1, e, \ldots, e^{(p-2)}$ (the $p-2$ first derivative of e with respect to T) are linearly independent over the algebraic closure of $\mathbf{F}_q(T)$. A corollary is that for every non-zero element α in $\mathbf{F}_q((1/T))$, $\alpha^p e$ and $\alpha e_C\left(e^{1/p}\right)$ are transcendental over $\mathbf{F}_q(T)$. By changing the variable and using older results we also obtain the transcendence of $e_C(\omega)$ for all $\omega \in \mathbf{F}_q((1/T))$ such that $\omega(T)$ and $\omega\left(T^i\right)$ are not zero and linearly dependent over $\mathbf{F}_q\left(T^i\right)$ $(q > 2i+1)$. Such ω appear to be transcendental by the method of Mahler if i is not a power of p.

1. RÉSULTATS ET SITUATION

On désigne par $\mathbb{F}_q[T]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $p > 0$, par $k = \mathbb{F}_q(T)$ son corps des fractions, par $k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $(1/T)$-adique v, que l'on prolonge à une clôture algébrique $\overline{k}$ (respectively $\overline{k}_\infty$) de k (respectively k_∞). On notera $|\alpha| = q^{-v(\alpha)} = q^{\deg(\alpha)}$, la valeur absolue d'un élément de $\overline{k}_\infty$ avec la convention $|0| = 0$. On désigne encore par k^s, la clôture séparable de k et par k^s celle de k_∞ dans $\overline{k}_\infty$.

Dans toute la suite du texte l'expression nombre algébrique désigne un élément de $\overline{k}$.

DÉFINITION 1: Un module de Drinfeld D défini sur une extension K de k est la donnée du groupe additif $\mathbf{G}_a$ et d'un homomorphisme d'anneau $\Phi_D\colon \mathbb{F}_q[T] \hookrightarrow \operatorname{End}(\mathbf{G}_a)$, déterminé par la donnée de:

$$\Phi_D(T) = TF^0 + a_1F + \ldots + a_dF^d;$$

Received 13 December 1993

où les a_i sont dans K et $a_d \neq 0$.

On note dorénavant par $'$ la dérivation continue d/dT de k_∞ dont on choisit un prolongement à k_∞^s. A chaque module de Drinfeld Φ de rang d défini sur $\overline{k}_\infty$ est associé, une unique fonction exponentielle, caractérisée par:

(1) $d/dz(e(z)) = 1$;

(2) pour tout $z \in \overline{k}_\infty$: $e(Tz) = \Phi_D(T)(e(z))$.

Un cas particulier intéressant (en raison de ces très nombreuses analogies avec le groupe multiplicatif) est le module de Carlitz, dont on rappelle les propriétés.

DÉFINITION 2: Le module de Carlitz est un module de Drinfeld de rang 1 donné par: $\Phi(T) = TF^0 + F$.

DÉFINITION 3: Pour tout entier $i \geqslant 1$, on pose:

$[i] = T^{q^i} - T$ et par récurrence $D_0 = 1$, $D_h = [h](D_{h-1})^q$ et aussi $L_0 = 1$, $L_h = [h]L_{h-1}$.

On désigne par $e_C(z)$ l'exponentielle du module de Carlitz, les équations fonctionnelles précédentes conduisent à l'expression (voir [5]):

$$e_C(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^{q^h}}{D_h}.$$

Son noyau est un $\mathbb{F}_q[T]$-module de rang 1 engendré par $(T - T^q)^{1/(q-1)}\pi$ où π est l'analogue du nombre usuel dont Wade ([13]) a démontré la transcendance. Cette fonction possède un inverse, le logarithme de Carlitz, qui converge pour $d(z) < q/(q-1)$ et est défini par:

$$\operatorname{Log}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h z^{q^h}}{L_h}.$$

Au paragraphe 2, on utilisera la méthode de Wade pour obtenir la transcendance de combinaisons linéaires à coefficients algébriques de $e = e_C(1)$ et de ses dérivées par rapport à T (notons que la méthode de Wade ne donnait jusqu'à présent que des résultats d'indépendance linéaire sur k). On généralise ainsi un résultat de G. Damamme ([7]), que nous remercions ici pour nous avoir rapidement indiqué son résultat. Nous remercions également R. Müller pour nous avoir signalé une erreur dans une version antérieure de ce théorème. On obtient en même temps une mesure de transcendance pour ces nombres, le résultat qualitatif conduisant à de nouveaux résultats de transcendance. Dans la troisième partie, on montre qu'un changement de variable joint aux dérivations, conduit entre autre aux résultats suivants:

https://doi.org/10.1017/S0004972700013733 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4. *Soit Φ un module de Drinfeld défini sur $k_\infty^\bullet$ et $\alpha \in k_\infty^\bullet$ tel que α' soit transcendant sur k. Pour tout entier $r \geqslant 1$, une forme linéaire non identiquement nulle à coefficients dans $k^\bullet$ de $e(\alpha^{1/p}), \ldots, e\left(\alpha^{1/p^r}\right)$ est transcendante sur k.*

A la fin de ce même paragraphe, on utilise des changements de variables transcendants et algébriques pour montrer la transcendance de valeurs de l'exponentielle en des nombres ω dont la transcendance s'obtient par la méthode de Mahler.

2. DÉRIVÉES ET MÉTHODE DE WADE

Dans ce paragraphe, on se place sur le module de Carlitz. On peut également définir la dérivée n-ième de l'exponentielle par rapport à T: elle est obtenue en dérivant terme à terme les coefficients de la série entière $e(z)$ (voir [**9**]). Pour $1 \leqslant n \leqslant p-1$, on trouve la dérivée d'ordre n non nulle:

$$e^{(n)}(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(n!)z^{q^h}}{[h]^n D_h}.$$

On a vu dans [**9, 10**] qu'il est intéressant du point de vue de la transcendance d'avoir des énoncés d'indépendance linéaire sur un nombre et ses dérivées. On va commencer par utiliser la méthode de Wade pour obtenir la transcendance d'expressions liées aux valeurs des $e^{(n)}(z)$.

LEMME 1. *(a) Pour $h \geqslant 1$, $[h]$ divise $D_u \Leftrightarrow u \geqslant h$;*
(b) $\deg D_h = hq^h$.

On se propose ici de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $(a_h)_{h\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{F}_q[T]$ contenant une infinité de termes non divisible par $[h]$. Soit b entier $\geqslant 0$ et*

$$\alpha = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{[h]^b D_h}.$$

Dès que pour h assez grand, $\deg(a_h) \leqslant uhq^h$, où $u < 1-(b+1)/q$, alors α est transcendant.

PREUVE: Par le lemme de Ore, si α est algébrique il existe $A_0, \ldots, A_m \in \mathbb{F}_q[T]$,

https://doi.org/10.1017/S0004972700013733 Published online by Cambridge University Press

$A_0 \neq 0$, tel que:

$$\sum_{j=0}^{m}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h^{q^i} A_j}{([h]^b D_h)^{q^j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{D_k^{b+1}} = 0;$$

où
$$H_k = D_k^{b+1} \sum_{i+j=k} \frac{A_j a_i^{q^j}}{([i]^b D_i)^{q^j}}.$$

Posons
$$E = D_\beta^{b+1} \sum_{k=0}^{\beta} \frac{H_k}{D_k^{b+1}}.$$

Comme H_k est entier, E l'est également. On montre la congruence: $E \equiv h_\beta \pmod{[\beta]}$ et $H_\beta \equiv A_0 a_\beta D_{\beta-1}^{bq} \neq 0 \pmod{[\beta]}$, pourvu qu'on ai choisi β tel que $a_\beta \neq 0$. On va maintenant examiner le terme reste:

$$R = D_\beta^{b+1} \sum_{k=\beta+1}^{\infty} \frac{H_k}{D_k^{b+1}}.$$

Soit $k \geqslant \beta + 1$,

$$\deg H_k \leqslant \max_{i+j=k,\, 0\leqslant j \leqslant m} \left(\deg A_j + q^j \deg a_i + \deg\left(D_k^{b+1}\right) - [q^j(bq^i + iq^i)]\right).$$

En désignant par X un majorant de $\deg A_j$ on a pour un terme générique N_k de R:

$$\deg N_k \leqslant X + \max_{i+j=k} q^j \deg a_i - (b+i)q^k + (b+1)\beta q^\beta.$$

Si ce dernier nombre est négatif on a une contradiction avec l'égalité $E + R = 0$. En utilisant l'inégalité $i \geqslant k - m$, et comme $\deg(a_i) \leqslant u\, i\, q^i$, il suffit alors que pour tout $k \geqslant \beta + 1$:

$$0 < -X + (b + (1-u)(k-m))q^k - (b+1)\beta q^\beta. \tag{1}$$

Le terme de droite de cette inégalité est une fonction croissante de k, donc il suffit de prouver l'inégalité pour $k = \beta + 1$.

Pour β assez grand cette inégalité est vraie avec un choix de $u < 1 - (b+1)/q$. □

REMARQUE 1. Une hypothèse du type $\deg(a_h) \leqslant chq^h$ (où $c > 0$) est largement suffisante pour nos applications. Cependant, l'hypothèse implicite $b < q$ semble gênante quand $q = p$ (voir Théorème 2).

On utilisera le lemme:

Lemme 2. *Soient $c_1, \ldots, c_d$ des éléments de k tels que pour une infinité d'entiers $h \geqslant 0$ on ait:*

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant d} c_i [h]^i a_i^{q^h} = 0,$$

où $a_i \in \mathbb{F}_q[T]$ ne sont pas tous nuls, alors tous les c_i sont nuls.

Preuve: Si les c_i ne sont pas tous nuls, sans perte de généralité, on peut les supposer dans $\mathbb{F}_q[T]$ avec $c_0 \neq 0$. On s'aperçoit alors que $[h]$ doit diviser $c_0 a_0^{q^h}$ pour une infinité de valeurs de h. Comme $[h]$ est le produit des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_q[T]$ dont le degré divise h, a_0 devrait contenir une infinité de diviseurs irréductibles, d'où une contradiction. $\square$

En suivant une preuve similaire à celle du Théorème 1, on va démontrer:

Théorème 2. *Soient donnés $a_1, \ldots, a_{p-2}$ des éléments de $\mathbb{F}_q[T]$ non tous nuls, alors $1, e(a_1), \ldots, e^{(p-2)}(a_{p-2})$ sont linéairement indépendants sur $\overline{k}$.*

Preuve 1: $1, e(a_1), \ldots, e^{(p-2)}(a_{p-2})$ étant des éléments de k_∞, ils sont linéairement indépendants sur $\overline{k}$ si et seulement si ils le sont sur k^s (voir [**10**], on trouve facilement ce résultat en dérivant). Il suffit donc de montrer qu'une combinaison linéaire $\alpha_1 e(a_1) + \ldots + \alpha_t e^t(a_t)$ $(1 \leqslant t \leqslant p-2)$ où les α_i sont algébriques séparables et $\alpha_t \neq 0$ est transcendante. Sans perte de généralité, on peut clairement supposer que tous les α_i sont entiers sur $\mathbb{F}_q[T]$. Soit L une extension séparable, finie de k contenant tous les α_i, soit Tr l'application trace de L sur k. En regardant le polynôme minimal de α_t sur $\mathbb{F}_q[T]$, on s'aperçoit qu'il y a une puissance $(\alpha_t)^r$ $(r \geqslant 1)$ de α_t de trace non nulle. Quitte à multiplier la combinaison linéaire par $(\alpha_t)^{r-1}$ on est ainsi ramené au cas d'une combinaison linéaire $\beta_1 e(a_1) + \ldots + \beta_t e^{(t)}(a_t)$ où les β_i sont entiers algébriques séparables sur $\mathbb{F}_q[T]$ et $Tr(\beta_t) \neq 0$.

On développe alors cette combinaison linéaire grâce aux expressions des dérivées de $e(z)$ pour obtenir (quitte à changer β_i en $\beta_i i!$):

$$\beta_1 e(a_1) + \ldots + \beta_t e^{(t)}(a_t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\beta_1 a_1^{q^h} [h]^t + \ldots + \beta_t a_t^{q^h}}{[h]^t D_h}.$$

On reprend alors mot pour mot le début de la preuve du Théorème 1 avec $a_h = \beta_1 a_1^{q^h} [h]^t + \ldots + \beta_t a_t^{q^h}$. Les termes H_k et donc E sont encore entiers dans L. On a $Tr(H_k) \equiv Tr(E) \mod [\beta]$, et également $Tr(H_\beta) \equiv A_0 D_{\beta-1}^{bq} Tr(a_\beta) \mod [\beta]$. D'après le choix de β_t et le Lemme 2, il y a bien une infinité de β tels que $Tr(a_\beta) \not\equiv 0 \pmod{[\beta]}$. Donc E est non nul donc $|E| \geqslant 1$, comme au Théorème 1 on montre ensuite $|R| < 1$, (car $\deg([h]) = q^h$ et que $b \leqslant p-2 < q$) et on obtient bien une contradiction. $\square$

Corollaire 1. *Si $p > 2$, pour tout élément $\alpha \in k_\infty^s$, non nul, $\alpha^p e$ est transcendant.*

PREUVE: Sinon sa dérivée $\alpha^p e'$ est également algébrique tout comme leur quotient e/e'. $\square$

La méthode du Théorème 1 conduit aussi à des résultats effectifs.

DÉFINITION 4: Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_dX^d \in \mathbb{F}_q[T][X]$, on définit les hauteurs logarithmiques et exponentielles de P par:

$$h(P) = \max_{0 \leqslant i \leqslant d}[0, \deg(a_i)] \quad \text{et} \quad H(P) = q^{h(P)}.$$

La hauteur d'un élément de $\overline{k}$ sera celle de son polynôme minimal sur $\mathbb{F}_q[T]$.

On utilisera un énoncé de Ore effectif qu'on trouve dans [4]:

LEMME. [4] *Soit $P \in \mathbb{F}_q[T][X]$, avec $h(P) = a$ et dont le degré en X est d. Il existe deux polynômes Q, $R \in \mathbb{F}_q[T][X]$, de degré en X respectif $q^d - d$ et q^d, tels que:*

$$h(Q) \leqslant a\big(q^d - d\big), \quad h(R) \leqslant a\big(q^d - d + 1\big) \quad \textit{et} \quad PQ = R.$$

On peut alors énoncer:

THÉORÈME 3. *Il existe des réels, c_1, $c_2 > 0$ tels que si P désigne un polynôme non nul, de hauteur exponentielle H et de degré d. Pour toute combinaison linéaire non identiquement nulle α à coefficients dans $\mathbb{F}_q$ de e, e', ..., $e^{(p-2)}$ on a:*

$$|P(\alpha)| \geqslant \exp\big(-c_1[(1 + \operatorname{Log} H)q^{c_2 d}]\big).$$

PREUVE: On va d'abord établir une minoration de $|P(\alpha)|$ dans le cas où P est additif de premier coefficient non nul. Il suffit alors de suivre les étapes successives de la preuve du Théorème 1, avec $\deg a_h = bq^h$. En revenant à l'inégalité (1), il suffit d'avoir:

$$\frac{X}{q^{\beta+1}} + m < \beta(1 - (b+1)/q);$$

comme $b \leqslant p - 2$, il suffit d'avoir:

$$\frac{X}{q^{\beta+1}} + m < \beta/q.$$

L'inégalité précédente est satisfaite en prenant pour β le plus petit entier tel que:

$$\beta q^\beta > \max\big(2X, 2mqq^{2mq}\big).$$

Mais on a $\left|D_\beta^{b+1}P(\alpha)\right| \geqslant 1$ donc grâce au Lemme 1:

$$|P(\alpha)| \geqslant q^{-[2pX + q^{2m(q+2)}]}.$$

En notant H, la hauteur du polynôme et q^m son degré, cette estimation est de la forme:

$$|P(\alpha)| \geqslant \exp\left(-c_3[\operatorname{Log} H + c_2 q^{C_4 m}]\right);$$

c_1, c_2, c_3 étant des réels positifs ne dépendant que de q.

Si maintenant $P(X) = A_r X^{q^r} + \ldots + A_m X^{q^m}$ où $A_r \neq 0$, mais r n'est pas forcément nul. On peut écrire $P(\alpha) = Q\left(\alpha^{r^r}\right)$ où Q a même hauteur que P, est additif de premier coefficient non nul et est de degré q^{m-r}. On reprend la preuve précédente avec α remplacé par α^{q^r} et on arrive à $\left|\left(D_\beta^{b+1}\right)^{q^r} Q\left(\alpha^{q^r}\right)\right| \geqslant 1$. On arrive alors à:

$$|P(\alpha)| \geqslant \exp\left(-c_5 \operatorname{Log} H + q^r q^{C_6(m-r)}\right).$$

D'où l'estimation pour chaque polynôme additif. Comme tout polynôme divise un polynôme additif de degré et hauteur controlée (voir le lemme précédent le Théorème 3), on en déduit l'estimation annoncée. ▯

3. Changement de variables

Les changements de variables amènent aussi de nouveaux résultats quand on les combine aux résultats antérieurs. Dans cette partie, on considère le corps $\mathcal{P} = \bigcup_{e \geqslant 1} \overline{\mathbb{F}_q}\left((T^{-1/e})\right)$.

Définition 5: Désignons par Φ un module de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T]$, défini sur $\mathcal{P}$:

$$\Phi(T) = TF^0 + a_1 F + \ldots + a_d F^d; \text{ où les } a_j \text{ sont dans } \mathcal{P}.$$

On pose, pour chaque entier $i > 0$ et non puissance de p:

$$\Phi^{(i)}\left(T^{(i)}\right) = T^i F^0 + a_1^{(i)} F + \ldots + a_d^{(i)} F^d, \text{ où } a_j^{(i)}(T) = a_j\left(T^i\right);$$

si Φ est défini sur $\overline{k}_\infty$ et $i = p^b$, on pose:

$$\Phi^{(i)}\left(T^{(i)}\right) = T^i F^0 + a_1^i F + \ldots + a_d^i F^d.$$

Chaque homomorphisme $\Phi^{(i)}(T^i)$ définit un module de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T^i]$, défini sur $\mathcal{P}$ (remarquons que $\overline{\mathbb{F}_q((1/T))} = \overline{\mathbb{F}_q((1/T^i))}$).

On note $e_{(i)}(z)$ la fonction exponentielle associée. Ces fonctions sont algébriquement indépendantes:

Proposition 1. $\operatorname{degtr}_{k(z)}\left(e_{(1)}(z), \ldots, e_{(m)}(z)\right) = m$.

Preuve: Soit $a = ppcm(1, \ldots, m)$, comme $\Phi^{(i)}(T^i)$ défini un module de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T^i]$, $\Phi^{(i)}(T^a)$ défini un module de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T^a]$ dont on montre que le

https://doi.org/10.1017/S0004972700013733 Published online by Cambridge University Press

rang est ad/i. Mais on sait que des modules de Drinfeld de rang différents ne sont pas isogènes et ont donc leur exponentielle algébriquement indépendantes (voir [15]). ∎

On conjecture alors:

CONJECTURE 1. *Pour tout élément α non-nul appartenant à $\overline{k}$,*

$$\operatorname{degtr}_k\left(e_{(1)}(\alpha), \ldots, e_{(p-1)}(\alpha)\right) = p-1.$$

Le lemme suivant montre qu'on ne peut demander l'indépendance algébrique des p-premières valeurs $e_{(i)}(\alpha)$.

LEMME 3. *(a) Pour des entiers $i > j > 0$, et tout $\alpha \in \overline{k}_\infty$.*

$$\left[e_{(p^i)}\left(\alpha^{p^i}\right)\right] = \ldots = \left[e_{(p^{i-j})}\left(\alpha^{p^{i-j}}\right)\right]^{p^j} = \ldots = [e(\alpha)]^{p^i}.$$

(b) Pour le module de Carlitz, on a $e_{C(p^i)}(z) = \sum_{h=1}^{\infty}\left(z^{q^h}\right)/\left(D_h^{p^i}\right)$.

PREUVE: Comme pour passer de $\Phi(T)$ à $\Phi^{(p^i)}\left(T^{p^i}\right)$ les coefficients des modules de Drinfeld sont élevés à la puissance p^i, ceux des exponentielles également. ∎

On va en déduire le théorème 4.

PREUVE DU THÉORÈME 4: Supposons que $a_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i e\left(\alpha^{1/p^i}\right)$, $a_r \neq 0$, soit une combinaison algébrique, à coefficients dans k^s de 1 et des $e\left(\alpha^{1/p^i}\right)$. On élève cette relation à la puissance p^r pour obtenir grâce au Lemme 3 que, $a_0^{p^r} + \sum_{i=1}^{r} a_i^{p^r} e_{(p^r)}\left(\alpha^{p^{r-i}}\right)$ est algébrique. Le (a) du Lemme 3 montre que la dérivée de cette expression est $a_r^{p^r}\alpha'$, la dérivée d'un élément algébrique devant rester algébrique (voir par Exemple [9]), on obtient bien une contradiction. En utilisant la dérivation, on a également le résultat suivant: ∎

THÉORÈME 4'. *Soit Φ un module de Drinfeld défini sur k_∞^s et α, $\beta \in k_\infty^s$ tels que α' et α'' soient linéairement indépendants sur $\overline{k}$ et que β soit non nul, alors $\beta e\left(\alpha^{1/p}\right)$ est transcendant sur k.*

D'où l'on déduit sur le module de Carlitz:

COROLLAIRE 2. *Si $p \geqslant 3$, $\pi e_C\left(\pi^{1/p}\right)$, $e\, e_C\left(\pi^{1/p}\right)$ sont transcendants sur k, si $p \geqslant 5$, $\pi e_C\left(e^{1/p}\right)$, $e\, e_C\left(e^{1/p}\right)$ sont transcendants sur k.*

PREUVE: On a vu dans [10] que π' et π'' sont linéairement indépendants sur $\overline{k}$; et on vient de voir au paragraphe 2 que e' et e'' le sont aussi pour $p \geqslant 5$. ∎

https://doi.org/10.1017/S0004972700013733 Published online by Cambridge University Press

Preuve du Théorème 4': Sous les hypothèses du théorème, si $\beta\, e(\alpha^{1/p})$ est algébrique sa puissance p-ième aussi. Le Lemme 3 nous dit que cette puissance est égale à $\beta^p e_{(p)}(\alpha)$, dont la derivée est $\beta^p \alpha'$. Ce nombre étant algébrique sa dérivée $\beta^p \alpha''$ et leur quotient α'/α'' devrait l'être. □

Passons maintenant à un énoncé utilisant un changement de variable $T \to T^i$ où i n'est pas une puissance de p.

Définition 6: On pose $W_i := \{\alpha \in \mathcal{P} / \alpha^{(i)} := \alpha(T^i)$ et $\alpha(T)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{F}_q[T^i]\}$.

Remarque 2. La définition a aussi un sens si i est puissance de p mais les éléments de W_i sont alors tous algébriques, ce qui serait sans intéret pour ce qui suit.

Propriétés. (a) W_i est un groupe multiplicatif stable par multiplications par les éléments de $\mathbb{F}_q[T^i]$.

(b) $W_i \cap k_\infty$ contient une infinité d'éléments transcendants linéairement indépendants sur k.

Preuve: (a) Est clair.

(b) $\omega = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - 1/T^{i^n}\right)$, est clairement dans W_i donc toutes ces puissances le sont. Il est facile de voir en utilisant le critère automatique de [6] que ω est transcendant. (On pourrait aussi utiliser un analogue à la méthode de Mahler voir appendice.) □

On rappelle que $e_C(z)$ est l'exponentielle sur le module de Carlitz. Nous utiliserons les lemmes et définitions suivantes:

Lemme 4. (Lemme 2 de [11]). *Soit $\xi \in \mathbb{F}_q^*$ et soit μ une solution de l'équation $X^{q-1} = 1/\xi$. Posons pour tout $z \in \overline{k}_\infty$, $e_\xi(z) = e(\mu z)/\mu$, on a:*

(i) *Pour tout entier $h \geqslant 0$, $\mu^{q^h - 1} = \xi^{-h}$.*

(ii) *$e_\xi(z)$ est la fonction exponentielle du module de Drinfeld Φ_ξ de rang 1 défini par $\Phi_\xi(T) = TF + (\xi)^{-1} F$.*

(iii) *$\sigma_\xi(e(z)) = e_\xi(\sigma_\xi(z))$; où σ_ξ est l'automorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_q((1/T))\{\{z\}\}$ qui fixe z et envoi T sur ξT.*

Définition 7: Soit f une fonction entière sur $\overline{k}_\infty$. On dit que f est d'ordre $\rho \in \mathbb{R} \cup +\infty$ si ρ est la borne inférieure de l'ensemble des réels x tel qu'il existe $c > 0$ vérifiant pour tout $r > 0$,

$$\sup_{\deg(z) \leqslant r} \deg(f(z)) \leqslant c q^x .$$

Lemme 5. *Soit $e(z)$ l'exponentielle d'un module de Drinfeld de rang d. Alors pour tout entier naturel i, $e_{(i)}(z)$ est d'ordre d.*

PREUVE: Pour $i = 1$, c'est à dire pour $e(z)$ ce résultat classique est dans [**16**] et dans [**8**] avec la définition précédente de l'ordre. Comme on change simplement T en T^i les degrés des coefficients des fonctions exponentielles sont multipliés par i leur ordre est inchangé. □

On aura aussi besoin de l'analogue du théorème de Schneider démontré par Yu [**16**, Theorem 4.1], qu'on retranscrit ici avec nos notations:

THÉORÈME. (J. Yu) *Soit L une extension finie de k et $f_1, \ldots, f_s$ ($s \geqslant 2$) des fonctions entières algébriquement indépendantes sur $\overline{k}$ d'ordre respectifs $\rho_1, \ldots, \rho_s$. Soit un réel $t \geqslant 0$ et une famille de sous ensembles finis S_N de $\overline{k}_\infty$ tels que pour tout $u \in S_N$:*

(i) $f_j(u) \in L$;
(ii) $h(f_j(u)) \ll q^{\rho_j N}$;
(iii) $q^{tN} \ll \operatorname{card}(S_N)$;
(iv) $\deg(u) \ll N$;

alors dans ces conditions:

$$t \leqslant \frac{\rho_1 + \ldots + \rho_s}{s - 1}.$$

On peut alors démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Si $q > 2i + 1$, pour tout élément γ non nul de $k_\infty \cap W_i$, $e_C(\gamma)$ est transcendant.*

PREUVE: Remarquons tout d'abord que $k_\infty \cap W_i$ est clairement stable par σ_ξ. Le (iii) du Lemme 4, entraîne que si $e_C(\gamma)$ est algébrique alors $e_C(\mu\sigma_\xi(\gamma))$, et pour tout $j \geqslant 0$, $e_C(\mu^j\sigma_{\xi^j}(\gamma))$ le sont également. Il convient maintenant de choisir ξ et μ tels que $\gamma, \mu\sigma_\xi(\gamma), \ldots, \mu^j\sigma_{\xi^j}(\gamma)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_q[T]$. Comme $\sigma_\xi(\gamma)$ est dans k_∞, il suffit que μ ne soit pas dans une extension algébrique de degré j de $\mathbb{F}_q$. Ce dernier point est équivalent à $\mu^{q^j-1} = 1$. D'après le Lemme 5 (i) il suffit de choisir ξ tel que $\xi^j \neq 1$. Or on aura d'autant plus de nombres algébriques que j est grand, on prend donc $j = q - 2$, et ainsi un tel ξ existe pour $q \geqslant 4$.

La preuve du Théorème 5, se ramème donc à étudier le cas où l'on a $q-1$ éléments de W_i, linéairement indépendants et d'exponentielle algébrique.

Si un $\alpha \in W_i$ est tel que $e_C(\alpha)$ soit algébrique alors quand dans cette série, on remplace T par T^i on obtient encore un élément algébrique qui n'est autre que $e_{C^{(i)}}(\alpha(T^i))$. Par définition de W_i et à l'aide du fait que $\Phi^{(i)}(T^i)$ est un module de Drinfeld sur $\mathbb{F}_q[T^i]$, on apprend alors que $e_{C^{(i)}}(\alpha)$ est algébrique.

On va alors appliquer le critère de Schneider (le théorème de J. Yu ci-dessus) avec: $s = 2$, $f_1(z) = e(z)$, $f_2(z) = e_{(i)}(z)$, $S_N = \{a_0\gamma + \ldots + \mu^{q-2}\sigma_{\xi^{q-2}}(\gamma)$, où $a_\nu \in \mathbb{F}_q[T^i]$ et $\deg(a_\nu) \leqslant N\}$.

On a $\operatorname{card}(S_N) \gg q^{N(q-1)/i}$ et la condition sur la hauteur se vérifie car les modules de Drinfeld sont de rang 1. La conclusion obtenue est donc: $(q-1)/i \leqslant 2$, qui est contredite par notre hypothèse sur q. ∎

REMARQUE 3. Chaque coefficient de la fonction exponentielle de Carlitz étant invariant par la transformation $T \to T+1$, on en déduit que si $e_C(\alpha)$ est transcendant, $e_C(\alpha(T+1))$ l'est également. Comme W_i n'est pas stable par cette transformation, on en déduit des résultats non triviaux.

REMARQUE 4. Au vu des résultats précédents, il est alors naturel de conjecturer que dans le cas complexe, les nombres transcendants obtenus par la méthode de Mahler (voir [**2**]) ont également leur exponentielle transcendante.

Finalement, montrons que cette méthode permet d'étendre du cas rationnel au cas algébrique, les résultats de Berthé ([**3**]) sur le quotient de valeurs du logarithme de Carlitz par une puissance de π.

THÉORÈME 6. *Soit α un élément non nul de $k_\infty \cap \overline{k}$, tel que $d(\alpha) < q/(q-1)$, r un nombre rationnel. Alors si $q \neq 2$:*

$$\frac{\operatorname{Log}(\alpha)}{\pi^r}$$

est transcendant.

PREUVE: L'hypothèse $d(\alpha) < q/(q-1)$ assure que α est dans le disque de convergence du logarithme. Soit σ_ξ l'automorphisme du Lemme 4, de $\sigma_\xi(L_h) = \xi^h L_h$, on déduit que $\sigma_\xi(\operatorname{Log}(z)) = \operatorname{Log}(\mu z)/\mu$ où $\mu^{q-1} = \xi^{-1}$. Ecrivons $r = x/y$, x et y entier naturels $(y > 0)$, $\operatorname{Log}(\alpha)/\pi^r$ est algébrique, si et seulement si sa puissance y-ième l'est, d'où l'on tire que $\sigma_\xi(\operatorname{Log}(\alpha))/\sigma_\xi(\pi)^r$ est aussi algébrique. Comme π est invariant par cette transformation, on en déduit que $\operatorname{Log}(\mu\sigma_\xi(\alpha))/\pi^r$ est algébrique. D'où l'on tire l'algébricité de $\operatorname{Log}(\alpha)/\operatorname{Log}(\mu\sigma_\xi(\alpha))$. Cependant, α et $\mu\sigma_\xi(\alpha)$ sont linéairement indépendants sur k car α et $\sigma_\xi(\alpha)$ sont des éléments de k_∞, et μ ne l'est pas car $q \neq 2$. Le théorème de Wade ([**13**]) contredit alors l'algébricité de $\operatorname{Log}(\alpha)/\operatorname{Log}(\mu\sigma_\xi(\alpha))$. ∎

4. APPENDICE: LIENS AVEC LA MÉTHODE DE MAHLER

Notre propos n'est pas d'étudier systématiquement les analogues à la méthode de Mahler en caractéristique finie. Bien qu'il serait sans doute intéressant de voir jusqu'où s'étendent les résultats de [**2**] (il faut se méfier de l'action du Frobenius), nous nous bornerons ici à vérifier la transcendance des nombres apparaissant dans les ensembles W_i du paragraphe précédent (ce qui illustrera ainsi le fait que la méthode de Mahler s'étend aux corps de fonctions en caractéristique finie). Remercions ici, Becker de nous avoir signalé que nous retrouvons ici un résultat d'Allouche et différemment des cas particuliers des résultats de [1].

Considérons l'expression $\omega = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - 1/T^{i^n}\right)$ où i est un entier $\geqslant 2$. Si i est une puissance d'un nombre premier ℓ, alors ω définit dans $\mathbb{F}_\ell((1/T))$ un élément algébrique sur $\mathbb{F}_\ell(T)$ de degré $i-1$. Or un résultat de [6] entraîne qu'une série irrationnelle ne peut être algébrique sur $\mathbb{F}_\ell(T)$ et $\mathbb{F}_p(T)$ quand $\ell \neq p$. Par conséquent, si $i \neq 2$ est une puissance de $\ell \neq p$, le nombre défini par ω dans $\mathbb{F}_p((1/T))$ est transcendant.

Plus généralement, on note $\mathbf{C}$ le complété naturel de $\overline{k}_\infty$, $D(1)$ le disque non circonférencié dont un centre est 0 et de rayon 1. On se fixe un entier $i \geqslant 2$, qui n'est pas une puissance de p et on montre:

Théorème 7. *Soit la fonction $f : D(1) \to \mathbf{C}$; définie par:*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - z^{i^n}\right).$$

Si α algébrique est un élément non nul de $D(1)$ alors $f(\alpha)$ est transcendant.

Remarque 5. Bien que ce ne soit pas nécessaire à la preuve de ce théorème, notons que montrer la transcendance de $f(\alpha)$ sur $\mathbb{F}_p(T)$ est équivalent à montrer la transcendance de $f(\alpha)$ sur $\mathbb{F}_p(\alpha)$ et revient par conséquent à prouver que $f(T)$ est transcendant. Cette remarque montre que le théorème est déjá pouvé quant i est une puissance d'un nombre premier différent de p et de 2.

Preuve du Théorème 7: La condition i non puissance de p assure (et c'est nécessaire) que $f(z)$ n'est pas une fonction algébrique, sinon elle se prolongerait en un fonction ayant une infinité de zéros de module 1. On peut maintenant suivre la méthode exposée dans [12]. Dans ce qui suit c_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ désignent des réels positifs strictement.

Supposons donné α algébrique non nul tel que $f(\alpha)$ soit algébrique. Soit m un entier non nul, le lemme de Siegel (voir [4]) assure l'existence de $m+1$ polynômes $P_j \in \mathbb{F}_q[T][z]$, de degré en z au plus m et de hauteur nulle tels que la fonction:

$$A(z) = \sum_{j=0}^{m} P_j(z) f(z)^j$$

s'annule à l'ordre m^2 en 0. On dispose de l'équation fonctionnelle:

$$\left(1 - z^i\right) f\left(z^i\right) = f(z).$$

Cette formule permet d'exprimer par récurrence sur n, $f\left(\alpha^{i^n}\right)$ en fonction de $f(\alpha)$ et des $\alpha^{i^u} (0 \leqslant u \leqslant n)$. D'où l'on tire que $A\left(\alpha^{i^n}\right)$ est un polynôme de degré $\ll i^n M$

https://doi.org/10.1017/S0004972700013733 Published online by Cambridge University Press

en α et de degré $\leqslant M$ en $f(\alpha)$. Le nombre algébrique $A\left(\alpha^{i^n}\right)$ vérifie donc (voir [14, p.8]):

$$h\left(A\left(\alpha^{i^n}\right)\right) \leqslant c_1 i^n m; \tag{1}$$

(où la constante ne dépend pas de n ni de m).

Comme la série $A(z) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h z^h$ converge, son terme général tends vers zéro, d'où si b_h est non nul: $\operatorname{Log}\left|b_h \alpha^{i^n h}\right| \leqslant -c_2 i^n h$. Or par construction si $b_h \neq 0$, $h \geqslant m^2$, d'où par ultramétricité:

$$\operatorname{Log}\left|A\left(\alpha^{i^n}\right)\right| \leqslant -c_2 i^n m^2.$$

Mais comme $f(z)$ est transcendante, $A(z)$ est non nulle. Comme α est non nul, $A\left(\alpha^{i^n}\right)$ est équivalent au premier terme non nul du développement est donc aussi non nul pour n assez grand.

On peut donc appliquer l'inégalité de Liouville (par exemple Lemme 8 p. 214 de [8]) qui entraîne par (1) et (2):

$$i^n m^2 \leqslant c_3 i^n m;$$

on obtient alors une contradiction pour n assez grand. □

References

[1] P-G. Becker, 'Transcendence measures for the values of generalized Mahler functions in arbitrary characteristic', Chapter 2.6 of the Habilitationsschrift, à paraître aux publications de Debrecen.

[2] P.G. Becker, 'Transcendence of the values of functions satisfying generalized Mahler type functional equations', *J. Reine Angew. Math.* **440** (1993), 111–128.

[3] V. Berthe, 'Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz', à paraître dans Acta-Arithmetica, 1994.

[4] P. Bundschuh, 'Transzendenzmasse in Körpern formaler Laurentreihen', *J. Reine Angew. Math.* **299-300** (1978), 411–432.

[5] L. Carlitz, 'On certain functions connected with polynomials in a Galois field', *Duke Math. J.* **1** (1935), 137–168.

[6] G. Christol, T. Kamae, M. Mendes France et G. Rauzy, 'Suites algébriques, automates et substitutions', *Bull. Soc. Math. France* **108**, (1980), 401–420.

[7] G. Damamme, Lettre à l'auteur.

[8] L. Denis, 'Théorème de Baker et modules de Drinfeld', *J. Number Theory* **43** (1993), 203–215.

[9] L. Denis, 'Transcendance et dérivées de l'exponentielle de Carlitz', in *Séminaire de Théorie des Nombres de Paris* (Birkäuser, 1993), pp. 1–21.

[10] L. Denis, 'Dérivées d'un module de Drinfeld et transcendance', tapuscript.

[11] L. Denis, 'Indépendance algébrique sur le module de Carlitz', *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math* **317** (1993), 913–915.

[12] J.H. Loxton et A.J. Van der Poorten, 'Transcendence and algebraic independence by a method of Mahler', *dans Transcendence theory: Advances and Applications*, (A. Baker et D.W. Masser éditeurs), 1977, pp.211–226.

[13] L. Wade, 'Transcendence properties of the Carlitz Ψ function', *Duke Math. J.* **13** (1946), 79–85.

[14] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants*, Lecture Notes in Math **402** (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974).

[15] J. Yu, 'Transcendence and Drinfeld modules: Several variables', *Duke Math. J.* **58** (1989), 559–575.

[16] J. Yu, 'A six exponentials theorem in finite characteristic', *Math. Ann.* **272** (1985), 91–98.

Université Pierre et Marie Curie
U.F.R. 920 "Problèmes diophantiens"
4 Place Jussieu
Tour 45-46, 5-ième étage
75252 Paris
France