In integrating a product of two factors by parts, we get in the first instance a *second integral* in which one of the original factors appears with a lower index and the other with a higher, the decrease and the increase of the indices however following a definite law. This *second integral* may be altered by breaking up the factor whose index has been increased; this breaking up will give the original integral and another in which the index of one factor is the same as in the original integral, while the index of the second factor is lower than at first. Lastly, if a form be desired in which one of the original indices is increased, the other index remaining unaltered, we first observe by how much it is possible to increase the index; we take this integral with increased index, break it up into two integrals, and then integrate by parts.

Question proposée au Concours Général pour la classe de Mathématiques Spéciales, Juin, 1886.

Solution analytique par M. PAUL AUBERT.

Étant donnés une surface du second ordre S et deux points A et B, on mène par le point B une sécante qui rencontre la surface aux points C, C′, et le plan polaire du point A au point D. Soient M et M′ les points où la droite AD rencontre les plans qui touchent la surface aux points C et C′. La sécante BD tournant autour du point B, on demande

1°. *Le lieu décrit par les points M et M′.*

2°. *Ce lieu se compose de deux surfaces du second ordre, dont l' une est indépendante de la position du point B, et l' autre Σ dépend de la position de ce point. Chercher ce que devient la surface Σ quand, dans la construction qui donne les points de cette surface, on fait jouer au point A le rôle du point B, et inversement.*

3°. *Le point A restant fixe, déterminer les positions occupées par le point B quand la surface Σ n' a pas un centre unique à distance finie.*

1°. Rapportons la surface à un tétraèdre de référence ayant pour arêtes opposées la droite AB et la droite polaire conjuguée A′B′.

Les équations de la droite AB sont $\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ plan polaire du point A

celles de la droite A'B' $\begin{cases} z=0 \\ t=0. \end{cases}$

La surface a une équation de la forme

$$l^2x^2+m^2y^2+n^2z^2-p^2t^2=0,$$

où l' un des coefficients l, m, n peut avoir la forme $\kappa\sqrt{-1}$.

Le point B est défini par trois plans $\begin{cases} z=0 \\ t=0 \\ ax+by=0, \end{cases}$

et la droite mobile BC a pour équations

$$(\mathrm{BC})\begin{cases} ax+by+\nu z=0 \\ \lambda z+\mu t=0, \end{cases}$$

λ, μ, et ν étant des paramètres variables.

Le point D est donc défini par le système

$$\begin{cases} x=0 \\ by+\nu z=0 \\ \lambda z+\mu t=0, \end{cases}$$

et par suite la droite AD a pour équations

$$(1)\quad \begin{cases} by+\nu z=0 \\ \lambda z+\mu t=0. \end{cases}$$

On sait qu' un point de la surface peut être déterminé par les quantités α, β, γ assujetties aux relations

$$lx=pt\cos\alpha,\ my=pt\cos\beta,\ nz=pt\cos\gamma$$

$$(2)\qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Le plan tangent à la surface en ce point a pour équation

$$(3)\qquad lx\cos\alpha+my\cos\beta+nz\cos\gamma-pt=0.$$

Exprimons que le point de contact est sur la droite BC, il vient

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{a}{l}\cos\alpha+\frac{b}{m}\cos\beta+\frac{\nu}{n}\cos\gamma=0 \\ \lambda p\cos\gamma+n\mu \qquad =0. \end{cases}$$

Nous aurons le lieu des points M et M' en éliminant λ, μ, ν, α, β, γ entre les équations (1), (2), (3), et (4).

L' élimination de λ, μ, ν, et γ entre les équations (1) et (4) est immédiate, et il reste à éliminer α et β entre les trois équations qui restent :

$$\begin{aligned} pltx\cos\alpha+pmty\cos\beta&=p^2t^2-n^2z^2 \\ apmtz\cos\alpha+bpltz\cos\beta&=blmyz \\ p^2t^2\cos^2\alpha+\ p^2t^2\cos^2\beta&=p^2t^2-n^2z^2. \end{aligned}$$

Cette opération conduit à l' équation

$$[bl(n^2z^2 - p^2t^2) + blm^2y^2]^2 + [am(p^2t^2 - n^2z^2) - bml^2xy]^2$$
$$= (p^2t^2 - n^2z^2)[am^2y - bl^2x]^2.$$

En développant cette équation, et faisant passer tous les termes au premier membre, on remarque après quelques réductions la présence du facteur $[m^2y^2 + n^2z^2 - p^2t^2]$ de sorte que le lieu se compose des deux surfaces

$$m^2y^2 + n^2z^2 - p^2t^2 = 0$$

et $$b^2l^2(l^2x^2 + m^2y^2) + (b^2l^2 + a^2m^2)(n^2z^2 - p^2t^2) = 0.$$

La première est le cône circonscrit à la surface ayant le point A pour sommet ; la seconde est une surface du second ordre qui admet le tétraèdre de référence comme tétraèdre conjugué.

En écrivant son équation sous la forme

$$b^2l^2(l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 - p^2t^2) + a^2m^2(n^2z^2 - p^2t^2) = 0$$

on voit qu' elle est bitangente à la surface proposée aux points d' intersection de la droite AB avec cette surface.

On pourrait achever complètement la question en revenant aux coordonnées cartésiennes par des transformations simples, mais il peut être intéressant de voir comment on aurait pu arriver au résultat que nous venons d' obtenir en partant des coordonnées cartésiennes. Rapportons donc la surface à un système de trois plans diamétraux conjugués ; elle a pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1 = 0.$$

Soient	$x_0\ y_0\ z_0$	les coordonnées du point	A,
	$x_1\ y_1\ z_1$	,, ,,	B,
	$x\ y\ z$	,, ,,	M,
	$x'\ y'\ z'$	,, ,,	C,

Un point quelconque de la droite AM a pour coordonnées

$$X = \frac{x + \lambda x_0}{1+\lambda} \quad Y = \frac{y + \lambda y_0}{1+\lambda} \quad Z = \frac{z + \lambda z_0}{1+\lambda}.$$

Nous aurons le point D en assujettissant ces coordonnées à vérifier l' équation du plan polaire du point A

$$AXx_0 + A'Yy_0 + A''Zz_0 - 1 = 0,$$

ce qui donne

$$Ax_0(x + \lambda x_0) + A'y_0(y + \lambda y_0) + A''z_0(z + \lambda z_0) - (1 + \lambda) = 0.$$

Posons $$Axx_0 + A'yy_0 + A''zz_0 - 1 = P_0$$
$$Ax_0 \ + A'y_0^2 \ + A''z_0^2 \ - 1 = E_0$$

On a $$\lambda = -\frac{P_0}{E_0}$$

et les coordonnées du point D sont

$$\frac{E_0x - P_0x_0}{E_0 - P_0}, \quad \frac{E_0y - P_0y_0}{E_0 - P_0}, \quad \frac{E_0z - P_0z_0}{E_0 - P_0}.$$

D' autre part, le point D étant sur la droite qui joint le point B au point C, on doit avoir

$$\frac{E_0x - P_0x_0}{E_0 - P_0} = \frac{x_1 + \mu x'}{1 + \mu}$$

et des relations pareilles pour les deux autres coordonnées. Il suffit maintenant d'exprimer que les valeurs de x', y', z' tirées de ces trois relations vérifient les équations

$$(1) \quad Axx' + A'yy' + A''zz' - 1 = 0$$

$$(2) \quad Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 - 1 = 0$$

et d' éliminer μ entre les relations ainsi obtenues pour avoir l' équation du lieu du point (xyz).

En effectuant ce calcul on trouve après l' élimination de μ

$$x' = \frac{[E_0x - P_0x_0]P_1 - [E_0E - P_0^2]x_1}{P_0^2 - E_0E + P_1[E_0 - P_0]}$$

où

$$P_1 = Axx_1 + A'yy_1 + A''zz_1 - 1$$

$$E = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 - 1.$$

y' et z' ont des valeurs de même forme.

Substituant ces expressions dans l' équation (2) en ayant soin de mettre en évidence les facteurs E_0, P_0, ...communs dans les valeurs des trois coordonnées, il vient après quelques réductions simples

$$[E_0^2E - P_0^2][E_1E_0E - P_0^2E_1 - P_1^2E_0 + 2P_1P_0P_0^1] = 0$$

où

$$P_0^1 = Ax_1x_0 + A'y_1y_0 + A''z_1z_0 - 1.$$

Le lieu se compose donc de deux surfaces

$$E_0^2E - P_0^2 = 0$$

qui est le cône circonscrit par le point A, et

$$(3) \qquad E_1E_0E - P_0^2E_1 - P_1^2E_0 + 2P_1P_0P_0^1 = 0$$

On reconnaît l' équation d' une surface du second ordre bitangente à la surface donnée $E = 0$, car les termes qui suivent le premier forment une expression du second degré homogène en P_1 et P_0, et qui est par conséquent de la forme $(\alpha P_1 + \beta P_0)(\alpha' P_1 + \beta' P_0)$. On voit en même temps que la droite des contacts passe par les points A et B.

2°. La réponse à la question 2° résulte immédiatement de la symétrie avec laquelle les indices 0 et 1 entrent dans l' équation (3), et de l'identité $P_0 = P_1^0$. Il suffit en effet pour obtenir ce que devient la surface quand le point B joue le rôle du point A, de permuter dans l' équation (3) les indices 0 et 1. On voit que cette permutation n' amène aucun changement.

3°. Pour résoudre la dernière partie du problème prenons pour axe oz le diamètre de la surface qui passe par le point A et pour plan xoy le plan diamétral conjugué, les axes ox et oy étant deux diamètres conjugués de la section. Nous allons chercher les positions occupées par le point B *dans le plan zox* quand la surface Σ n'a pas un centre unique à distance finie.

Dans ces hypothèses on a $x_0 = y_0 = 0$ et $y_1 = 0$.

Si on fait la transformation $Ax = \xi$, $Ay = \eta$, $Az = \zeta$,

l' équation de la surface Σ prend la forme

$$(\xi_1^2 + \zeta_1^2 - 1)(\zeta_0^2 - 1)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) - (\zeta\zeta_0 - 1)^2(\xi_1^2 + \zeta_1^2 - 1)$$
$$- (\zeta_0^2 - 1)(\xi\xi_1 + \zeta\zeta_1 - 1)^2 + 2(\xi\xi_1 + \zeta\zeta_1 - 1)(\zeta\zeta_0 - 1)(\zeta_1\zeta_0 - 1) = 0.$$

Il suffit de considérer, pour notre objet, les termes du second degré de cette équation ; en les ordonnant il vient

$$(\xi_1^2 + \zeta_1^2 - 1)(\zeta_0^2 - 1)\eta^2 + (\zeta_0^2 - 1)(\zeta_1^2 - 1)\xi^2$$
$$+ [(1 - \zeta_0\zeta_1)^2 - \xi_1^2]\zeta^2 + 2\xi_1(\zeta_0 - \zeta_1)\xi\zeta.$$

Cette forme quadratique peut se mettre sous la forme d' une somme algébrique de trois carrés ; pour que la surface Σ n' ait pas un centre unique à distance finie il faut et il suffit que le nombre de ces carrés se réduise à deux. Nous aurons donc le lieu des positions occupées par le point B en égalant successivement à zéro chacun des coefficients des carrés. On obtient ainsi immédiatement

$$(\xi_1^2 + \zeta_1^2 - 1)(\zeta_0^2 - 1) = 0, \text{ c'est à dire } \xi_1^2 + \zeta_1^2 - 1 = 0$$
$$(\zeta_0^2 - 1)(\zeta_1^2 - 1) = 0, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \qquad \zeta_1^2 - 1 = 0$$
$$\xi_1^2(\zeta_0 - \zeta_1)^2 - (\zeta_0^2 - 1)(\zeta_1^2 - 1)[(1 - \zeta_0\zeta_1)^2 - \xi_1^2] = 0.$$

Celle-ci se réduit à

$$(1 - \zeta_1\zeta_0)^2[\xi_1^2 - (\zeta_1^2 - 1)(\zeta_0^2 - 1)] \quad = 0.$$

Il suffit de remplacer dans ces équations ξ_1^2 par $\xi_1^2 + \eta_1^2$ et de revenir aux coordonnées x, y, z pour avoir les surfaces sur lesquelles doit se trouver le point B.

Soient b, b' (fig. 57) les points où oz rencontre la surface donnée ; on voit que ces surfaces se composent des plans tangents LM, L'M' aux points où l' axe oz rencontre la surface donnée, du plan polaire PQ du point A par rapport à cette surface, et d' une surface du second ordre bitangente à la surface proposée aux points b et b' : cette surface est un hyperboloïde H on un ellipsoïde E suivant que oA est supérieur ou inférieur à ob. Il est du reste très facile de

https://doi.org/10.1017/S0013091500029990 Published online by Cambridge University Press

reconnaître la nature de la surface Σ suivant la position du point B sur l' une ou l' autre de ces surfaces en considérant le signe des coefficients des carrés qui ne sont pas nuls et en formant la condition pour que la surface Σ soit du genre cylindre.