COMPOSITIO MATHEMATICA

Comptage des G-chtoucas : la partie elliptique

Ngo Dac Tuan

Compositio Math. **149** (2013), 2169–2183.

doi:10.1112/S0010437X13007100

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

Compositio Math. 149 (2013) 2169–2183
doi:10.1112/S0010437X13007100

Comptage des G-chtoucas : la partie elliptique

Ngo Dac Tuan

Abstract

We extend our previous work in collaboration with Ngô Bao Châu and give a fixed point formula for the elliptic part of moduli spaces of G-shtukas with arbitrary modifications. Our formula is similar to the fixed point formula of Kottwitz for certain Shimura varieties. Our method is inspired by that of Kottwitz and simpler than that of Lafforgue for the fixed point formula of the moduli space of Drinfeld $\mathrm{GL}(r)$-shtukas.

Résumé

Nous étendons un travail antérieur en collaboration avec Ngô Bao Châu et donnons une formule de comptage des G-chtoucas avec modifications arbitraires pour la partie elliptique. Elle est similaire à la formule de Kottwitz pour le comptage des points des variétés de Shimura. Notre méthode est insprirée de celle de Kottwitz et plus simple que celle de Lafforgue pour le comptage des $\mathrm{GL}(r)$-chtoucas de Drinfeld.

Introduction

Les espaces de modules de chtoucas ont été introduits par Drinfeld [Dri87] et ils sont associés aux groupes réductifs et à d'autres données (ou à d'autres modifications). Ils sont considérés comme une version analogue des variétés de Shimura qui jouent un rôle important dans le programme de Langlands sur les corps de nombres. On pourrait espérer que les espaces de modules de chtoucas jouent le même rôle dans le programme de Langlands sur les corps de fonctions.

Drinfeld a déjà établi la correspondance de Langlands pour $\mathrm{GL}(2)$ sur les corps de fonctions en étudiant l'espace de modules de chtoucas associé à $\mathrm{GL}(2)$ et à des données 'simples' [Dri87, Dri89]. Puis, suivant la stratégie de Drinfeld, Lafforgue a étudié l'espace de modules de chtoucas associé à $\mathrm{GL}(r)$ et à des données 'simples', et a montré la correspondance de Langlands en toute généralité pour $\mathrm{GL}(r)$ sur les corps de fonctions [Laf97, Laf98, Laf02]. Lorsque le groupe réductif en question est une forme intérieure de $\mathrm{GL}(r)$, les espaces de modules de chtoucas correspondants ou leurs variants ont été étudiés par Laumon [Lau96, Lau97], Laumon–Rapoport–Stuhler [LRS93], Lau [Lau04, Lau07] et Ngô [Ngô06a]. Pour un groupe réductif général, on dispose pour l'instant des travaux difficiles en préparation de Kazhdan et Varshavsky et de Vincent Lafforgue [Laf12].

Dans cet article, on étudie le comptage des points fixes des espaces de modules associés à un groupe réductif général G et à des modifications arbitraires. Il est en fait une des premières difficultés pour généraliser les travaux mentionnés précédemment. Pour certaines variétés de Shimura, Kottwitz a donné une formule de comptage en utilisant la théorie

Received 19 April 2012, accepted in final form 3 October 2012, published online 7 October 2013.
2010 Mathematics Subject Classification 22E55, 11G09, 14D20 (primary).
Keywords: Drinfeld shtukas, moduli space, trace formula.

de Honda–Tate [Kot90, Kot92]. Pour les espaces de modules de chtoucas associés à $\mathrm{GL}(r)$ [Dri87, Dri89, Laf97, Lau96] ou à une forme intérieure de $\mathrm{GL}(r)$ [Lau04, LRS93, Ngô06a], le comptage des points fixes a été fait en basant sur une version analogue de Honda–Tate pour les corps de fonctions due à Drinfeld. L'absence d'une généralisation de cette théorie pour d'autres groupes réductifs nous empêche de généraliser le comtage dans le cadre général. En collaboration avec Ngô Bao Châu [NN08], nous avons suggéré une façon pour contourner cet obstable en se restreignant à la partie régulière elliptique. Dans cet article, on étend ce résultat et donne une formule de comptage pour toute la partie elliptique. Notre formule est similaire à celle du comptage de Kottwitz des points fixes des variétés de Shimura [Kot92]. Elle s'écrit comme une somme indexées par des triplets de Kottwitz d'invariant global nul des produits des intégrales orbitales tordues et des intégrales orbitales ordinaires. Notre argument principal repose sur une observation très simple mais cruciale, qui consiste à remarquer que tous les invariants locaux intervenant dans des triplets de Kottwitz sont en fait basiques.

Dans un prochain travail en préparation, à l'aide du résultat principal de cet article, nous donnons la formule complète de comptage des points fixes des espaces de modules de G-chtoucas avec des données arbitraires. Elle fait intervenir les paramètres de troncatures de Harder–Narasimhan ou d'Arthur, et elle est très liée au côté géométrique de la formule de traces d'Arthur–Selberg.

L'article est organisé comme suit. Dans la première section, nous rappelons la définition du champs de G-chtoucas, la notion de structure de niveau et l'action de l'algèbre de Hecke par correspondance. La deuxième section introduit le problème de comptage qui nous intéresse. La troisième section rappelle les différents notions qui vont apparaître dans la formule finale. En particulier, elle introduit les triplets de Kottwitz et leurs invariants locaux et globaux associés. La quatriéme section démontre une proposition clé dit de passage global-local (la proposition 4.3). Elle répond à une question de Ngô Bao Châu, et nous permet de contourner l'absence d'une version analogue sur les corps des fonctions de la théorie de Honda–Tate pour le groupe réductif G. Nous donnons la formule finale de comptage (le théorème 5.1) dans la dernière section.

Notations

On fixe une fois pour toutes une courbe projective lisse géométriquement connexe X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de corps de fonctions F. Pour toute place x de F, on note F_x le complété x-adique de F, et $\mathcal{O}_x$ son anneau des entiers. Fixons aussi une clôture algébrique k de $\mathbb{F}_q$, et on notera $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k$.

Soit G un groupe réductif quasi-déployé connexe sur F dont le groupe dérivé G_{der} est simplement connexe, ce qui permet d'utiliser des résultats de Steinberg [Ste65] et de Kottwitz [Kot82]. Cette hypothèse n'est pas indispensable, nous la supposons pour simplifier l'exposition. Supposons que G peut s'étendre en un schéma en groupes que l'on note encore par G lisse sur X de fibres réductives.

Tous les schémas et tous les champs considérés seront définis sur $\mathbb{F}_q$. Soient Y et Z deux tels champs, le champ $Y \times Z$ désignera le produit fibré $Y \times_{\mathbb{F}_q} Z$.

1. Champ de G-chtoucas

1.1 On considère le champ Fib_G des G-torseurs sur la courbe X. Soit $\overline{T}$ un sous-schéma fini de $\overline{X}$, et soient $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ deux G-torseurs sur $\overline{X}$. *Une $\overline{T}$-modification de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$* est la donnée d'un isomorphisme entre deux torseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ en dehors de $\overline{T}$, c'est-à-dire

$$\phi : \mathcal{V}\big|_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'\big|_{\overline{X}-\overline{T}} .$$

Soit $\overline{x}$ un point géométrique dans $\overline{T}$. On note $\mathcal{O}_{\overline{x}}$ le complété de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ en $\overline{x}$, et $F_{\overline{x}}$ son corps des fractions. Étant donnée une $\overline{T}$-modification

$$\phi : \mathcal{V}|_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'|_{\overline{X}-\overline{T}}$$

entre deux G-torseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$, on a un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V'$ entre les fibres génériques de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{V}'$ qui à son tour induit un isomorphisme $V_{\overline{x}} \xrightarrow{\sim} V'_{\overline{x}}$ entre les complétés de V et V' en $\overline{x}$. Le complété de $\mathcal{V}$ en $\overline{x}$ définit un $G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$-réseau (c'est-à-dire un élément de $G(F_{\overline{x}})/G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$) dans $V_{\overline{x}}$, celui de $\mathcal{V}'$ en $\overline{x}$ définit un $G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$-réseau dans $V'_{\overline{x}}$. Si l'on identifie $V_{\overline{x}}$ avec $V'_{\overline{x}}$, la position relative de ces deux réseaux est donnée par une double classe dans $G(\mathcal{O}_{\overline{x}})\backslash G(F_{\overline{x}})/G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$.

Comme G a une fibre réductive en $\overline{x}$, on a la décomposition de Cartan :

$$G(F_{\overline{x}}) = \bigsqcup_{\lambda} G(\mathcal{O}_{\overline{x}})\varpi_{\overline{x}}^{\lambda} G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$$

où λ parcourt l'ensemble des cocaractères dominants de G, et $\varpi_{\overline{x}}$ est une uniformisante de X en $\overline{x}$. Chaque double-classe sous $G(\mathcal{O}_{\overline{x}})$ contient donc un unique représentant de la forme $\varpi_{\overline{x}}^{\lambda}$ où λ est un cocaractére dominant. On le note $\mathrm{inv}_{\overline{x}}(\phi)$ et l'appelle *invariant de ϕ en $\overline{x}$* ce cocaractére dominant.

1.2 Rappelons que l'ensemble des cocaractères dominants de G est muni d'une relation d'ordre. Soient λ et λ' deux cocaractères dominants de G. On dit que $\lambda \leqslant \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda$ est une combinaison linéaire de coefficients positifs entiers de coracines positives de G.

Pour chaque cocaractére dominant λ de G, on considère le champ Hecke_{λ} des modifications élémentaires bornées par λ comme suit. À chaque schéma S, on associe l'ensemble des données constituées de :

(i) deux G-torseurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ sur $X \times S$;

(ii) un morphisme $x : S \longrightarrow X$, et on note $\Gamma(x)$ le graphe de x ;

(iii) un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{V}|_{X\times S-\Gamma(x)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'|_{X\times S-\Gamma(x)}$$

tel que, pour chaque point géométrique $\overline{s}$ de S, la $\overline{s}$-modification $\phi_{\overline{s}}$ vérifie

$$\mathrm{inv}_{x(\overline{s})}(\phi_{\overline{s}}) \leqslant \lambda.$$

Soit $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ le sous-champ de Hecke_{λ} en remplaçant dans la dernière inégalité

$$\mathrm{inv}_{x(\overline{s})}(\phi_{\overline{s}}) \leqslant \lambda$$

par l'égalité

$$\mathrm{inv}_{x(\overline{s})}(\phi_{\overline{s}}) = \lambda.$$

On peut vérifier que $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ est un sous-champ ouvert de Hecke_{λ}. Il est bien connu (voir [BD] ou [Var04, Lemma 3.1]) que le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Hecke}_{\lambda} &\longrightarrow X \times \mathrm{Fib_G} \\ (\mathcal{V}, \mathcal{V}', x) &\mapsto (x, \mathcal{V}) \end{aligned}$$

est représentable et projectif. La restriction de ce morphisme à $\mathrm{Hecke}'_{\lambda}$ est lisse.

Puis à chaque collection des cocaractères dominants $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de G, on pourra considérer le champ $\mathrm{Hecke}_{\underline{\lambda}}$ des modifications élémentaires itérées, voir [Ngô06a, § 1.2] ou [Var04, § 2].

1.3 Rappelons maintenant la définition du champ des G-chtoucas $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}$ à modifications multiples $\underline{\lambda}$. À chaque schéma S, on associe l'ensemble des données constituées de :

(i) des G-torseurs $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ sur $X \times S$;

(ii) des morphismes $x_i : S \longrightarrow X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et on note $\Gamma(x_i)$ les graphes des x_i ;

(iii) des isomorphismes

$$\phi_i : \mathcal{V}_i\big|_{X \times S - \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i-1}\big|_{X \times S - \Gamma(x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

tel que, pour chaque point géométrique $\overline{s}$ de S, la $\overline{s}$-modification $\phi_{i,\overline{s}}$ vérifie

$$\mathrm{inv}_{x_i(\overline{s})}(\phi_{i,\overline{s}}) \leqslant \lambda_i;$$

(iv) un isomorphisme $\mathcal{V}_0^\sigma = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{V}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n$.

Par composition, on a un isomorphisme

$$t : \mathcal{V}_0^\sigma\big|_{X \times S - \bigcup_{i=1}^n \Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_0\big|_{X \times S - \bigcup_{i=1}^n \Gamma(x_i)}.$$

Si les graphes $\Gamma(x_i)$ sont disjoints, t détermine les ϕ_i de sorte qu'on a une description plus simple et plus symétrique du problème de module au-dessus de l'ouvert U complémentaire de la réunion des diagonales dans X^n.

Ce champ s'inscrit dans le produit cartésien.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fib}_G \arrow[d] \\ \mathrm{Hecke}_{\underline{\lambda}} \arrow[r] & \mathrm{Fib}_G \times \mathrm{Fib}_G \end{tikzcd}$$

On a aussi un ouvert $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}$ de $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}$ en remplaçant les inégalités $\mathrm{inv}_{x_i(\overline{s})}(\phi_{i,\overline{s}}) \leqslant \lambda_i$ par les égalités $\mathrm{inv}_{x_i(\overline{s})}(\phi_{i,\overline{s}}) = \lambda_i$.

1.4 On appellera niveau de X un sous-schéma fermé fini I de X. On fixera un niveau I de X pour la suite de l'article.

Définition 1.5. Étant donné un niveau I de X, une structure de niveau I sur un G-chtouca $\widetilde{\mathcal{V}} = \big(\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n; x_1, \ldots, x_n; \mathcal{V}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n\big)$ sur un schéma S dont les points associés $x_1, x_2, \ldots, x_n$ évitent I consiste en un isomorphisme

$$u : \mathcal{V}_0\big|_{I \times S} \xrightarrow{\sim} G(\mathcal{O}_I) \times S$$

qui fait commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_0\big|_{I \times S} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "u"'] & \cdots \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{V}_n\big|_{I \times S} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{V}_0^\sigma\big|_{I \times S} \arrow[d, "u^\sigma"'] \\ G(\mathcal{O}_I) \times S \arrow[rrr, equal] & & & G(\mathcal{O}_I) \times S \end{tikzcd}$$

On note $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}, I}$ le champ classifiant les G-chtoucas munis d'une structure de niveau I. On appelle *morphisme caractéristique* le morphisme évident

$$\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}, I} \longrightarrow (X - I)^n.$$

Il y a une autre formulation de la notion de structure de niveau, voir la de [NN08, § 2.4]. Considérons G comme le G-torseur trivial au-dessus de X avec l'action de G sur lui-même par translation à droite et G_I la restriction de G au sous-schéma fermé I de X. Considérons le

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press

foncteur $\mathcal{G}'^I$ qui associe à tout X-schéma S le sous-groupe des automorphismes de $\mathcal{G} \times_X S$ commutant à l'action de G sur lui-même par translation à droite, qui de plus induit sur $G_I \times_X S$ l'identité. Ce foncteur est représentable par un schéma en groupes $\mathcal{G}'^I$ sur X qui est muni d'un homomorphisme vers G lequel est un isomorphisme en dehors de I. S'il n'est pas plat en général, le processus de dilatation de Raynaud [BLR90, Théoréme 3, p. 61] permet de le lissifier. On obtient un X-schéma en groupes lisse $\mathcal{G}^I$ muni d'un homomorphisme $\mathcal{G}^I \to \mathcal{G}'^I$.

On montre [NN08, § 2.4] qu'un chtouca $\widetilde{\mathcal{V}}$ muni d'une structure de niveau I est équivalent à la donnée :

(i) des $\mathcal{G}^I$-torseurs $\mathcal{V}_0, \ldots, \mathcal{V}_n$ sur $X \times S$;

(ii) des morphismes $x_i : S \longrightarrow X$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ dont les graphes $\Gamma(x_i)$ sont disjoints de $S \times I$;

(iii) des isomorphismes

$$\phi_i : \mathcal{V}_i\big|_{X\times S-\Gamma(x_i)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_{i-1}\big|_{X\times S-\Gamma(x_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

tel que, pour chaque point géométrique $\overline{s}$ de S, la $\overline{s}$-modification $\phi_{i,\overline{s}}$ ait un invariant (en $x_i(\overline{s})) \leqslant \lambda_i$;

(iv) un isomorphisme $\mathcal{V}_0^\sigma = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{V}_0 \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_n$.

c'est-à-dire simplement un chtouca avec schéma en groupes structurel $\mathcal{G}^I$ à la place de G.

1.6 Opérateurs de Hecke

On notera $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, $\mathcal{O}_\mathbb{A} = \prod_{x\in|X|} \mathcal{O}_x$ le sous-anneau des entiers. Soit $K = \prod_{x\in|X|} K_x$ le sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ défini par $K_x = G(\mathcal{O}_x)$ pour toute place x de F. Pour tout sous-schéma fermé fini T de X, on note

$$\mathbb{A}_T = \prod_{x\in T} F_x, \quad \mathcal{O}_T = \prod_{x\in T} \mathcal{O}_x,$$
$$\mathbb{A}^T = \mathbb{A}/\mathbb{A}_T, \quad \mathcal{O}^T = \mathcal{O}_\mathbb{A}/\mathcal{O}_T,$$

et

$$K_T = \prod_{x\in T} K_x, \quad K^T = \prod_{x\notin T} K_x.$$

Pour le niveau I fixé de X qu'on supposera toujours étranger à T, on notera K_I (respectivement K_I^T) le noyau de l'homomorphisme surjectif $K \longrightarrow G(\mathcal{O}_I)$ (respectivement $K^T \longrightarrow G(\mathcal{O}_I)$). On a $K_I = \prod_{x\in|X|} K_{I,x}$ où $K_{I,x}$ est le sous-groupe compact ouvert de K_x défini comme le noyau de l'homomorphism $K_x \to G(\mathcal{O}_I)$.

On munit le groupe $G(\mathbb{A})$ (respectivement $G(\mathbb{A}^T)$) de la mesure de Haar dg (respectivement dg^T). On normalise cette mesure de sorte que $dg(K) = 1$ (respectivement $dg^T(K^T) = 1$). On notera aussi dg_x la mesure de Haar de $G(F_x)$ de sorte que $dg_x(K_x) = 1$. On obtient ainsi $dg = dg^T \times \prod_{x\in T} dg_x$.

Pour toute place x, on notera $\mathcal{H}_{I,x}$ l'espace vectoriel des fonctions à support compact dans $G(F_x)$, invariantes à gauche et à droite par le sous-groupe compact ouvert $K_{I,x}$. Les fonctions caractéristiques ϕ_{β_x} des double-classes $\beta_x \in K_{I,x}\backslash G(F_x)/K_{I,x}$ constituent une base de $\mathcal{H}_{I,x}$. Le produit de convolution par rapport à la mesure de Haar dg_x définit sur cet espace vectoriel une structure d'algèbre. Pour tout sous-schéma fermé fini T' de X, on note $\mathcal{H}_{I,T'} = \bigotimes_{x\in T'} \mathcal{H}_{I,x}$. On définit $\mathcal{H}_I$ (respectivement $\mathcal{H}_I^T$) comme la limite inductive des $\mathcal{H}_{I,T'}$ sur les sous-schéma fermés finis $T' \subset X$ (respectivement $T' \subset X - T$) : si $T' \subset T''$, on a une flèche injective

$$\bigotimes_{x\in T'} \mathcal{H}_{I,x} \to \bigotimes_{x\in T''} \mathcal{H}_{I,x}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press

définie par

$$\phi \mapsto \phi \otimes \bigotimes_{x \in T'' - T'} 1_{K_{I,x}}$$

où $1_{K_{I,x}}$ est la fonction caractéristique de $K_{I,x}$. L'algèbre $\mathcal{H}_I$ a une base $\bigotimes_{x \in T'} \phi_{\beta_x}$ indexée par l'ensemble des couples $(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ où T' est un sous-schéma fermé de X et où $\beta_x \in K_{I,x} \backslash G(F_x)/K_{I,x}$ est une double-classe, quotienté par la relation d'équivalence évidente.

Soit T' un sous-schéma fermé de X ayant éventuellement une intersection avec le niveau I. Pour chaque place $x \in T'$, on se donne une double classe $\beta_x \in K_{I,x} \backslash G(F_x)/K_{I,x}$. L'opérateur de Hecke $\bigotimes_{x \in T'} \beta_x$ agit sur $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \otimes_{(X-I)^n} (X - I - T')^n$ par correspondance qu'on va définir dans ce paragraphe.

Soit $x \in T'$ un point fermé. Soit Y un épaississement de x dans X. Un chtouca $\widetilde{\mathcal{V}} \in \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(S)$ induit par restriction à Y un $\mathcal{G}^I$-torseur $\mathcal{V}_Y$ au-dessus de $Y \times S$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{V}_Y^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}$. Puisque $\mathcal{G}^I$ a des fibres connexes, d'après [Laf97], ceci revient à se donner un S-point du classifiant du groupe fini $\mathcal{G}^I(\mathcal{O}_Y)$ autrement dit un $\mathcal{G}^I(\mathcal{O}_Y)$-torseur $\mathcal{V}_Y^\natural$ au-dessus de S. Quand Y parcourt l'ensemble de tous les épaississements de x dans X, on obtient un $K_{I,x}$-torseur $\mathcal{V}_x^\natural$ au-dessus de S où $K_{I,x} = \mathcal{G}^I(\mathcal{O}_x)$.

Une correspondance de type $(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ entre deux chtoucas $\widetilde{\mathcal{V}}, \widetilde{\mathcal{V}}' \in \mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(S)$ de même caractéristique $x_1, \ldots, x_n$ consiste en la donnée d'un isomorphisme

$$t' : \widetilde{\mathcal{V}}|_{(X-T') \times S} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{V}}'|_{(X-T') \times S}$$

entre les restrictions de $\widetilde{\mathcal{V}}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}'$ à l'ouvert complémentaire de T', vérifiant la propriété suivante. Pour tous $x \in T'$, soient $\mathcal{V}_x^\natural$ et $\mathcal{V}'^\natural_x$ les $K_{I,x}$-torseurs sur S associés aux chtoucas $\widetilde{\mathcal{V}}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}'$. La flèche t' induit un isomorphisme entre les $\mathcal{G}^I(F_x)$-torseurs induits par $\mathcal{V}_x^\natural$ et $\mathcal{V}'^\natural_x$. Cet isomorphisme induit donc une fonction localement constante de S dans l'ensemble des double-classes $K_{I,x} \backslash \mathcal{G}^I(F_x)/K_{I,x}$. On demande que cette fonction soit constante et de valeur β_x. L'énoncé suivant suit immédiatement.

Lemme 1.7. *Pour tout $(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ comme ci-dessus, considérons le foncteur $\Phi(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ au-dessus de*

$$\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \times_{(X-I)^n} (X - I - T')^n$$

qui associe à tout G-chtouca $\widetilde{\mathcal{V}}$ avec structure de niveau I et de caractéristique étrangère à T' la catégorie des couples constitués d'un G-chtouca $\widetilde{\mathcal{V}}'$ avec structure de niveau I, de même caractéristique que $\widetilde{\mathcal{V}}$ et d'une correspondance entre $\widetilde{\mathcal{V}}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}'$ de type $(T', (\beta_x)_{x \in T'})$. Le foncteur $\Phi(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ est représentable par un morphisme fini et étale sur $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I} \times_{(X-I)^n} (X - I - T')^n$.

2. Problème de comptage

2.1 Soit $s \geqslant 1$ un entier naturel, $x_1, \ldots, x_n \in X(\mathbb{F}_{q^s})$ distincts points de $X - I$ à valeurs dans $\mathbb{F}_{q^s}$. On fixe également un fermé fini T' disjoints de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour tout $x \in T'$, on fixe une double-classe $\beta_x \in K_{I,x} \backslash G(F_x)/K_{I,x}$. Soit $\Phi(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ la correspondance de Hecke associée. On cherche à exprimer le cardinal du groupoïde des points fixes $\sigma^s \circ \Phi(T', (\beta_x)_{x \in T'})$ dans $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda},I}(x_1, \ldots, x_n)$ par une formule succeptible d'être comparée avec le côté géométrique de la formule des traces d'Arthur–Selberg. Il suffit en fait de compter les points dans l'ouvert $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda},I}(x_1, \ldots, x_n)$ stable par l'endomorphisme de Frobenius et par l'opérateur de Hecke, voir [Lau04, Ngô06a] pour plus de détails.

Soit $\overline{T} = \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ où $\overline{x}_i$ est le point géométrique au-dessus de x_i. Soit T le plus petit fermé de X contenant les points géométriques $\overline{x}_i$. Soit $\mathcal{C}^I(T, T', s)$ la catégorie des triplets $(\mathcal{V}, t, t')$ constitués de composants suivants :

(i) $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{G}^I$-torseur sur la courbe $\overline{X}$;

(ii) une $\overline{T}$-modification $t : \mathcal{V}^\sigma|_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}|_{\overline{X}-\overline{T}}$;

(iii) une $\overline{T}'$-modification $t' : \mathcal{V}^{\sigma^s}|_{\overline{X}-\overline{T}'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}|_{\overline{X}-\overline{T}'}$

tels que t et t' commutent.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}^{\sigma^{s+1}}|_{\overline{X}-\overline{T}\cup\overline{T}'} \arrow[r, "\sigma^s(t)"] \arrow[d, "\sigma(t')"'] & \mathcal{V}^{\sigma^s}|_{\overline{X}-\overline{T}\cup\overline{T}'} \arrow[d, "t'"'] \\
\mathcal{V}^{\sigma}|_{\overline{X}-\overline{T}\cup\overline{T}'} \arrow[r, "t"] & \mathcal{V}|_{\overline{X}-\overline{T}\cup\overline{T}'}
\end{tikzcd}$$

La notion d'isomorphisme entre des tels objets est évidente.

On introduit aussi des sous-catégories $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$ dont les objets sont des triplets $(\mathcal{V}, t, t')$ qui vérifient en plus les conditions suivantes :

(iv) l'invariant $\mathrm{inv}_{\overline{x}_i}(t)$ vaut λ_i ;

(v) la correspondance t' entre le chtouca $(\mathcal{V}, t)$ et le chtouca $\sigma^s(\mathcal{V}, t)$ est de type β_x en tout point fermé $x \in T'$, voir la § 1.6.

Dans un triplet $(\mathcal{V}, t, t') \in \mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$, la paire $\widetilde{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}, t)$ définit un G-chtouca avec une structure de niveau I et t' définit une correspondance entre $\widetilde{\mathcal{V}}^{\sigma^s}$ et $\widetilde{\mathcal{V}}$ de type $(T', (\beta_x)_{x\in T'})$. Il est clair que la catégorie des points fixes de $\sigma^s \circ \Phi(T', (\beta_x)_{x\in T'})$ dans $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda},I}(x_1, \ldots, x_n)$ est la catégorie $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$.

En absence de structure de niveaux, on notera

$$\mathcal{C}(T, T', s) \text{ et } \mathcal{C}_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$$

les catégories obtenues. Il y a les foncteurs d'oubli de structures de niveaux $\mathcal{C}^I(T, T', s) \to \mathcal{C}(T, T', s)$ et $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s) \to \mathcal{C}_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$.

2.2 Le nombre

$$\#\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s) = dg(K_I^T) \cdot \sum \frac{1}{\#\,\mathrm{Isom}(\mathcal{V}, t, t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V}, t, t')$ de $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)$ est en général infini car le champ des chtoucas n'est pas de type fini.

On va modifier le problème de comptage comme suit. Notons Z le centre de G. On fixe un sous-groupe discret $J \subset Z(\mathbb{A}^{T\cup I}) \subset Z(\mathbb{A})$ qui est cocompact dans $Z(\mathbb{A})/Z(F)$. Le groupe J agit sur $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}(x_1, \ldots, x_n)$ par correspondance de Hecke. On va considèrer le quotient du champ $\mathrm{Cht}'_{\underline{\lambda}}(x_1, \ldots, x_n)$ par l'action de J. Ceci revient à ajouter formellement un isomorphisme entre un objet $\widetilde{\mathcal{V}}$ et son transformé par un élément $j \in J$. En appliquant le même procédé aux catégories $\mathcal{C}^I(T, T', s)$ et $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta'_T}(T, T', s)$ on obtient les catégories $\mathcal{C}^I(T, T', s)_J$ et $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta'_T}(T, T', s)_J$.

On définit le nombre

$$\#\mathcal{C}^{I,\mathrm{ell}}_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)_J = dg(K_I^T) \cdot \sum \frac{1}{\#\,\mathrm{Isom}(\mathcal{V}, t, t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V}, t, t')$ dits *elliptiques* de $\mathcal{C}^I_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)_J$, voir la définition 3.3.

Si l'on se restreint à la partie régulière elliptique, le résultat principal de [NN08] (le théorème 12.1 du *loc. cit.*) donne une fomule qui s'écrit comme une somme indexées par certains triplets de Kottwitz des produits des intégrales orbitales tordues et des intégrales orbitales ordinaires. Dans cet article, on va étendre cette formule pour toute la partie elliptique. Elle est similaire à celle de Kottwitz pour le comptage des points des variétés de Shimura [Kot90, Kot92]. Rappelons que la difficulté principale dans [NN08] consiste à construire un objet global à partir des invariants locaux des triplets de Kottwitz. Si l'on se restreint à la partie régulière elliptique, on travaille toujours avec les tores et la question est plus simple à traiter. Par contre, sur la partie elliptique, on doit travailler avec des groupes réductifs en général et tout ce travail est basé sur une observation très simple mais primordiale, qui consiste à remarquer que tous les invariants locaux sont en fait des éléments basiques au sens de Kottwitz.

3. Comptage des chtoucas

3.1 Foncteur de fibre générique

On considère la catégorie $C(T, T', s)$ des triplets (V, τ, τ') dont :

(i) V est un G-torseur sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} k$;

(ii) $\tau : V^{\sigma} \longrightarrow V$ est une application σ-linéaire ;

(iii) $\tau' : V^{\sigma^s} \longrightarrow V$ est une application σ^s-linéaire ;
qui vérifient les propriétés suivantes :

- (a) τ et τ' commutent ;
- (b) pour toute place $x \notin T$, (V_x, τ_x) est isomorphe à
$$(G(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k), \mathrm{id}\, \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \sigma) \ ;$$
- (c) pour toute place $x \in T$, (V_x, τ'_x) est isomorphe à
$$(G(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}} k), \mathrm{id}\, \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_{q^s}} \sigma^s).$$

On va définir un foncteur dit de fibre générique de $\mathcal{C}(T, T', s)$ dans $C(T, T', s)$. On associe ainsi à un triplet $(\mathcal{V}, t, t')$ de $\mathcal{C}(T, T', s)$ un objet (V, τ, τ') dans $C(T, T', s)$ qu'on appellera sa fibre générique. La construction s'étend sans difficulté aux triplets $(\mathcal{V}, t, t')$ de $\mathcal{C}^I(T, T', s)$ à l'aide du foncteur d'oubli de structure de niveau.

On note V la fibre générique de $\mathcal{V}$ qui est alors un G-torseur sur $F \otimes_{\mathbb{F}_q} k$. Les modifications t et t' induisent les isomorphismes $\tau : V^{\sigma} \longrightarrow V$, et $\tau' : V^{\sigma^s} \longrightarrow V$. On montre [NN08, § 5.2] que ce triplet (V, τ, τ') est bien un objet dans $C(T, T', s)$. L'action de J par opérateurs de Hecke ne change pas la fibre générique. On obtient du même coup les foncteurs $\mathcal{C}(T, T', s)_J \to C(T, T', s)$.

3.2 Triplet de Kottwitz

D'après [NN08, § 6.1], étant donné $(V, \tau, \tau') \in C(T, T', s)$, on lui associe un triplet de Kottwitz $(\gamma_0; (\gamma_x)_{x \notin T}, (\delta_x)_{x \in T})$ où :

(a) γ_0 est une classe de conjugaison stable de $G(F)$;

(b) pour toute place $x \notin T$, γ_x est une classe de conjugaison de $G(F_x)$ dont la classe stable est celle de γ_0 ; de plus, pour presque toute place $x \notin T$, γ_x est conjuguée à γ_0 ;

(c) pour toute place $x \in T$, δ_x est une classe de σ-conjugaison de $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s})$ dont la norme est stablement conjuguée à γ_0.

Il s'agit des même triplets que ceux de Kottwitz dans le comptage des points de certaines variétés de Shimura [Kot90, Kot92].

DÉFINITION 3.3. Soient $(\mathcal{V}, t, t')$ un triplet dans $\mathcal{C}(T, T', s)$ (respectivement (V, τ, τ') un triplet dans $C(T, T', s)$) et $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ le triplet de Kottwitz associé.

On dit que :

(a) $(\mathcal{V}, t, t')$ (respectivement (V, τ, τ')) est *semi-simple* si l'élément γ_0 de $G(F)$ est semi-simple ;

(b) $(\mathcal{V}, t, t')$ (respectivement (V, τ, τ')) est *elliptique* si γ_0 est elliptique.

3.4 Ensemble des éléments basiques d'après Kottwitz

On va rappeler quelques résultats de Kottwitz sur l'ensemble BH des classes de σ-conjugaison associés à un groupe réductif H sur un corps local non-archimédien. On renvoie le lecteur aux excellents articles [Kot85, §§ 4–5], [RR96, § 1] pour plus de détails.

Soient x une place de F et H un groupe réductif connexe sur F_x. Rappelons que Γ_x est le groupe de Galois de F_x. On considère l'ensemble $H(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$ muni d'une action de Frobenius σ qui agit trivialement sur F_x et agit par l'action de Frobenius sur k. On définit $BH(F_x)$ comme l'ensemble des classes de σ-conjugaison de $H(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$.

Soit T un tore maximal de H défini sur F_x, on notera W le groupe de Weyl correspondant. Kottwitz définit une application de Newton :

$$\nu : BH(F_x) \longrightarrow (X_* T/W)^{\Gamma_x}.$$

Puis, Kottwitz a introduit l'ensemble $BH_{\mathrm{basic}}(F_x)$ des éléments basiques caractérisés par la propriété que $b \in BH(F_x)$ est basique si et seulement si $\nu(b)$ se factorise à travers le centre $Z(H)$ de H. Kottwitz a montré, voir par exemple [Kot90, § 6] ou [RR96, Theorem 1.15].

THÉORÈME 3.5 (Kottwitz). (i) *Un élément $b \in BH(F_x)$ est basique si et seulement si le groupe des centralisateurs tordus*

$$J_b(F) = \{g \in H(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k) : g^{-1} b \sigma(g) = b\}$$

est le groupe des F_x-points d'une forme intérieure de H.

(ii) *Il existe un isomorphisme de foncteurs de la catégorie des groupes réductifs connexes sur F_x dans la catégorie des ensembles pointés*

$$BH_{\mathrm{basic}}(F_x) \longrightarrow (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^* \tag{3.5.1}$$

de l'ensemble $BH_{\mathrm{basic}}(F_x)$ vers le groupe des caractères algébriques de $Z(\widehat{H})^{\Gamma_x}$. Cet isomorphisme de foncteurs étend l'isomorphisme du sous-groupe $H^1(F_x, H)$ vers le sous-groupe des caractères de $Z(\widehat{H})^{\Gamma_x}$ triviaux sur la composante neutre.

En particulier, $BH_{\mathrm{basic}}(F_x)$ est un groupe abélien.

(iii) *L'isomorphisme de foncteurs $BH_{\mathrm{basic}}(F_x) \longrightarrow (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^*$ se prolonge en un morphisme de fonteurs*

$$BH(F_x) \longrightarrow (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^*.$$

3.6 Désormais, on suppose que γ_0 est semi-simple. Comme le groupe dérivé de G est supposé simplement connexe, le centralisateur G_{γ_0} est un groupe réductif connexe. À partir d'un triplet de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$, on va rappeler comment définir des invariants locaux $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) \in (Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x})^*$ et un invariant global $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) \in (Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma})^*$.

En chaque place $x \notin T$, comme γ_x est stablement conjugué à γ_0, il existe un élément $g \in G(\overline{F}_x)$ tel que $\gamma_x = g\gamma_0 g^{-1}$. En vertu du théorème de Steinberg qui affirme $\mathrm{H}^1(\overline{F}_x/F_x^{\mathrm{un}}, G_{\gamma_0}(\overline{F}_x)) = 1$,

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press

cf. [Ste65] ou [Ser94, § 2.3], g peut être choisi de telle sorte que $g \in G(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$. Donc

$$g\gamma_0 g^{-1} = \gamma_x = \sigma(\gamma_x) = \sigma(g)\gamma_0\sigma(g)^{-1}.$$

D'où $b_x := g^{-1}\sigma(g)$ est un centralisateur de γ_0 dans $G(\overline{F}_x)$ et définit un élément dans $\mathrm{H}^1(F_x, G_{\gamma_0})$, en particulier il est basique dans $BG_{\gamma_0}(F_x)$. D'après le théorème 3.5, $g^{-1}\sigma(g)$ définit un caractère $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ de $Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x}$. On note encore $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ sa restriction à $Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma}$. D'après [Kot86, Proposition 7.1], pour presque toute place $x \notin T$, γ_x et γ_0 sont conjugués de sorte que l'invariant $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ s'annule.

En chaque place $x \in T$, comme la classe de σ-conjugaison δ_x dans $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s})$ a pour norme la classe stable γ_0, il existe un élément $g \in G(\overline{F}_x)$ tel que $N\delta_x = g\gamma_0 g^{-1}$. Grâce au théorème de Steinberg [Ser94, § 2.3], g peut être choisi dans $G(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$. Donc $b_x := g^{-1}\delta_x\sigma(g)$ appartient à $G_{\gamma_0}(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$, et définit un élément de $BG_{\gamma_0}(F_x)$.

Lemme 3.7. *L'invariant local b_x est un élément basique dans $BG_{\gamma_0}(F_x)$.*

Démonstration. On utilise les notations ci-dessus. Comme g est un élément de $G(F_x \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k)$, il existe un entier positif m tel que g appartienne à $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^{ms}})$. Cela entraîne que $(b_x\sigma)^{ms} = \gamma_0^m \sigma^{ms}$. Puisque γ_0 est central dans G_{γ_0}, cela implique que b_x est un élément basique dans $BG_{\gamma_0}(F_x)$, voir [Kot85, §§ 4–5]. La preuve est terminée. □

D'après le théorème 3.5, $g^{-1}\delta_x\sigma(g)$ définit un caractère $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ de $Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma_x}$. On notera encore $\mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ sa restriction à $Z(\widehat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma}$.

L'invariant global $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ est défini comme la somme de tous les invariants locaux :

$$\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) := \sum_{x \in X} \mathrm{inv}_x(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x).$$

Dans cette somme, les termes sont presque tous nuls. C'est un élément de $(Z(\hat{G}_{\gamma_0})^{\Gamma})^*$. On montre [NN08].

Proposition 3.8. *Soient (V, τ, τ') un objet de $C(T, T', s)$ et $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ le triplet de Kottwitz associé. Supposons que γ_0 est semi-simple. Alors, on a :*

$$\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x) = 0.$$

3.9 Le groupe des automorphismes de (V, τ, τ')

Soit (V, τ, τ') un élément de $C(T, T', s)$ et soit $(\gamma_0, \gamma_x, \delta_x)$ le triplet de Kottwitz associé. On va démontrer que le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau')$ de (V, τ, τ') est bien une forme intérieure J_{γ_0} de G_{γ_0} défini sur F.

On choisit un représentant noté encore par γ_0 de la classe de conjugaison γ_0 dans $G(F)$ et on suppose que $\gamma_0 = \tau^s\tau'^{-1}$. Puisque γ_0 et τ se commutent, τ agit sur le centralisateur $G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k)$. D'une part, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(V, \tau, \tau')$ est le sous-groupe des points fixes par τ du produit semi-direct $G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle\tau\rangle$. D'autre part, G_{γ_0} est bien le sous-groupe des points fixes par σ du produit semi-direct $G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle\sigma\rangle$. Il suffit de vérifier que pour un certain entier n, on a un isomorphisme de produits semi-directs :

$$G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle\tau^n\rangle \longrightarrow G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle\sigma^n\rangle.$$

En effet, on considère deux éléments γ_0^s et τ^s de $G(F)$. Comme (V, τ, τ') appartient à $C(T, T', s)$, pour toute place x, γ_0^s et τ^s sont stablement conjugués dans $G(F_x)$. Donc, γ_0^s et τ^s sont stablement conjugués dans $G(F)$. Donc pour un certaine entier m, γ_0^{ms} et τ^{ms} sont

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press

conjugués dans $G(F)$. On pose $n = ms$ et on obtient l'isomorphisme voulu

$$G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle \tau^n \rangle \longrightarrow G_{\gamma_0}(F \otimes_{\mathbb{F}_q} k) \rtimes \langle \sigma^n \rangle.$$

Par principe de Hasse pour les groupes adjoints, le groupe des automorphismes $J_{\gamma_0} = \mathrm{Aut}(V, \tau, \tau')$ qui est une forme intérieure de G_{γ_0} est complètement déterminé par ses composantes locaux $J_{\gamma_0,x}$. Il est facile de voir que.

- Pour $x \notin T$, le composante local $J_{\gamma_0,x}$ est le centralisateur de γ_x dans $G(F_x)$.
- Pour $x \in T$, le composante local $J_{\gamma_0,x}$ est le centralisateur tordu de δ_x dans $G(F_x \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_q^s)$.

4. Passage local-global

Dans cette section, on notera H le centralisateur G_{γ_0} de γ_0 dans G ; c'est un groupe réductif connexe sur F. On a une application locale-globale

$$BH(F) \longrightarrow \prod_x BH(F_x)$$

qui envoie une classe de σ-conjugaison globale $b \in BH(F)$ vers ses composantes locales $b_x \in BH(F_x)$. D'après [NN08, § 6.2], pour tout x, la composante locale b_x définit un élément $\mathrm{inv}(b_x)$ dans $(Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^*$, autrement dit un caractère de $Z(\widehat{H})^{\Gamma_x}$. On notera aussi $\mathrm{inv}(b_x)$ l'élément induit dans $(Z(\widehat{H})^{\Gamma})^*$ et on définira l'invariant global $\mathrm{inv}(b)$ comme somme des invariants locaux

$$\mathrm{inv}(b) := \sum_x \mathrm{inv}(b_x).$$

C'est un élément dans $(Z(\widehat{H})^{\Gamma})^*$ et on prouve que $\mathrm{inv}(b) = 0$.

On pourrait poser la question suivante qui a été suggérée par Ngô Bao Châu (communication privée) : étant donnés des invariants locaux $b_x \in BH(F_x)$ qui sont triviaux pour presque tout x et qui vérifie la condition $\sum_x \mathrm{inv}(b_x) = 0$, sous quelles conditions de $b_x \in BH(F_x)$ existe-t-il un élément $b \in BH(F)$ tel que $b = b_x$ dans $BH(F_x)$?

Si H est un tore défini sur F, la réponse est affirmative, voir [NN08, § 10] et elle est aussi connue par Varshavsky (communication privée).

Proposition 4.1. *Soit T est un tore défini sur F. On pose*

$$\ker^1(F, T) = \ker(H^1(F, T) \longrightarrow \prod_x H^1(F_x, T)).$$

Alors, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker^1(F, T) \longrightarrow BT(F) \longrightarrow \prod_x BT(F_x) \longrightarrow (X_*T)_\Gamma \longrightarrow 0.$$

Si H est un groupe réductif connexe sur F, Kottwitz a déjà démontré le théorème suivant [Kot86, Theorem 6.6].

Théorème 4.2 (Kottwitz). *Soit H un groupe réductif connexe sur F. Etant donnés des invariants locaux $b_x \in H^1(F_x, H)$ qui sont triviaux pour presque tout x et qui vérifient la condition $\sum_x \mathrm{inv}(b_x) = 0$, alors il existe un élément $b \in H^1(F, H)$ tel que $b = b_x$ dans $H^1(F_x, H)$.*

De plus, le nombre de tels éléments vaut

$$\ker^1(F, H) = \ker(H^1(F, H) \longrightarrow \prod_x H^1(F_x, H)).$$

Dans cette section, nous donnons une réponse partielle qui généralise les deux résultats ci-dessus et qui est suffisante pour notre application au problème de comptage.

Proposition 4.3. *Soit H un groupe réductif connexe sur F. Etant donnés des invariants locaux $b_x \in BH(F_x)$ qui sont toutes basiques et triviaux pour presque tout x et qui vérifient la condition $\sum_x \mathrm{inv}(b_x) = 0$, alors il existe un élément $b \in BH(F)$ tel que $b = b_x$ dans $BH(F_x)$.*

De plus, le nombre de tels éléments vaut

$$\ker^1(F, H) = \ker(H^1(F, H) \longrightarrow \prod_x H^1(F_x, H)).$$

Démonstration. Pour la première partie, on utilisera l'isomorphisme (3.5.1) qui permet identifer les ensembles des éléments basiques avec les groupes des caractères correspondants.

La démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape, on suppose que le groupe dérivé H_{der} de H est simplement connexe sur F. On notera D le groupe quotient H/H_{der} ; alors,

$$Z(\widehat{H})^{\Gamma} \xrightarrow{\sim} \widehat{D}^{\Gamma}.$$

On considère le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \prod_x BH_{\mathrm{basic}}(F_x) = \prod_x (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^* & \longrightarrow & (Z(\widehat{H})^{\Gamma})^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_x BD(F_x) = \prod_x (\widehat{D}^{\Gamma_x})^* & \longrightarrow & (\widehat{D}^{\Gamma})^* \end{array}$$

On note d_x l'image de b_x dans $(\widehat{D}^{\Gamma_x})^*$. Comme les éléments b_x sont triviaux presque partout et vérifient la condition $\sum_x \mathrm{inv}(b_x) = 0$, les éléments d_x sont aussi triviaux presque partout et vérifient également

$$\sum_x \mathrm{inv}(d_x) = 0.$$

Puisque D est un tore, d'après la proposition 4.1, il existe un élément $d \in D(\bar{F})$ tel que, pour tout x, $d = d_x$ dans $BD(F_x)$. Puisque $Z(H)(\bar{F}) \longrightarrow D(\bar{F})$ est surjectif, on peut choisir un relévement $z \in Z(H)(\bar{F})$ de d. Comme z est un élément central de $H(\bar{F})$, pour tout x, l'image z_x de z dans $BH(F_x)$ est basique. Pour tout x, les deux éléments basiques b_x et z_x ont la même image d_x dans $BD(F_x)$. Cela entraîne qu'ils ont la même image par l'application de Newton, c'est-à-dire

$$\nu(b_x) = \nu(z_x)$$

car on a un diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} BH_{\mathrm{basic}}(F_x) = (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^* & \xrightarrow{\nu} & \pi_1(H)^{\Gamma_x} \otimes \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ BD(F_x) = (\widehat{D}^{\Gamma_x})^* & \xrightarrow{\nu} & \pi_1(D)^{\Gamma_x} \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

dont la flèche verticale à droite est un isomorphisme, voir [RR96, Theorem 1.15]. Par conséquent, on peut écrire $b_x = h_x z_x$ avec $h_x \in H^1(F_x, H)$. De plus, les éléments h_x vérifient

$$\sum_x \mathrm{inv}(h_x) = 0.$$

D'après le théorème 4.2 dû à Kottwitz, il existe un élément $h \in H^1(F, H)$ tel que, pour tout x, $h = h_x$. Pour conclure, il suffit de prendre $b = hz$.

La deuxième étape consiste à considèrer le cas général. On choisit une extension centrale G de H

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

où C est un tore sur F et que le groupe dérivé G_{der} est simplement connexe sur F. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\prod_x BC(F_x) = \prod_x (\widehat{C}^{\Gamma_x})^* \arrow[r] \arrow[d] & (\widehat{C}^{\Gamma})^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
\prod_x BG_{\mathrm{basic}}(F_x) = \prod_x (Z(\widehat{G})^{\Gamma_x})^* \arrow[r] \arrow[d] & (Z(\widehat{G})^{\Gamma})^* \arrow[d] & \\
\prod_x BH_{\mathrm{basic}}(F_x) = \prod_x (Z(\widehat{H})^{\Gamma_x})^* \arrow[r] \arrow[d] & (Z(\widehat{H})^{\Gamma})^* \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & 1 &
\end{tikzcd}$$

dont la première ligne et les colonnes sont exacts. Par conséquent, on pourra relever $\{h_x \in BH_{\mathrm{basic}}(F_x)\}_x$ en $\{g_x \in BG_{\mathrm{basic}}(F_x)\}_x$ qui vérifient encore la relation

$$\sum_x \mathrm{inv}(g_x) = 0.$$

La première étape implique qu'il existe un élément $g \in G(\bar{F})$ tel que, pour tout x, $g = g_x$. On en déduit que l'image $h \in H(\bar{F})$ de g vérifie que, pour tout x, $h = h_x$. La preuve de la première partie est terminée.

Passons à la preuve de la deuxième partie. D'après la première partie, il existe un élément de la forme hz avec $h \in H^1(F, H)$ et $z \in Z(H)(\bar{F})$ tel que la classe de hz dans $BH(F_x)$ soit bien b_x. Soit $b \in BH(F)$ un élément vérifiant la même propriété que la classe de b dans $BH(F_x)$ soit bien b_x. On pose $h' = bz^{-1}$. C'est un élément de $BH(F)$ dont pour tout x, l'image de h' dans $BH(F_x)$ est dans $H^1(F_x, H)$. Ainsi, h' est bien dans $H^1(F, H)$. Cela implique la deuxième assertion de la proposition. $\square$

5. Expression du comptage des chtoucas

On va donner une expression du comptage des chtoucas $\#\mathcal{C}^{I,\mathrm{ell}}_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)_J$. Soit (V, τ, τ') un objet de $C(T, T', s)$ dont le triplet de Kottwitz associé est noté $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$. Supposons que γ_0 est elliptique. Alors, par le même argument que celui de la proposition 9.1 de [NN08], on prouve que le nombre des classes d'isomorphismes

$$dg(K_I^T) \cdot \sum_{(\mathcal{V},t,t')} \frac{1}{\# \operatorname{Isom}(\mathcal{V}, t, t')}$$

où la somme parcourt un ensemble de représentants de classes d'isomorphismes d'objets $(\mathcal{V}, t, t')$ de $\mathcal{C}^{I}_{\lambda_{\overline{T}},\beta_{T'}}(T, T', s)_J$ dont la fibre générique est isomorphe à (V, τ, τ') est fini et égale à

$$\mathrm{vol}(JG_{\gamma_0}(F)\backslash G_{\gamma_0}(\mathbb{A})) \prod_{x \notin T} \mathbf{O}_{\gamma_x}(\phi_{\beta_x}) \prod_{x \in T} \mathbf{TO}_{\delta_x}(\phi_{\lambda_x})$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press

où :

– pour chaque place $x \in T$, ϕ_{λ_x} est la fonction sphérique

$$\phi_{\lambda_x} = \bigotimes_{\substack{y \in T \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s} \\ y \mid x}} \phi_{\lambda_y} \in \bigotimes_{\substack{y \in T \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^s} \\ y \mid x}} \mathcal{H}_y;$$

– pour chaque place $x \in T'$, ϕ_{β_x} est la fonction caractéristique de la double classe β_x ;

– pour chaque place $x \notin T \cup T'$, ϕ_{β_x} est la fonction caractéristique de la double classe triviale de $G(\mathcal{O}_x)\backslash G(F_x)/G(\mathcal{O}_x)$.

Soit $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ un triplet de Kottwitz. Supposons que γ_0 est elliptique et qu'il existe un objet (V, τ, τ') de $C(T, T', s)$ dont le triplet associé est $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$. On a montré que le nombre de tels objets est le cardinal de l'ensemble fini

$$\ker^1(F, G_{\gamma_0}) = \ker\left[H^1(F, G_{\gamma_0}) \longrightarrow \prod_x H^1(F_x, G_{\gamma_0})\right].$$

On obtient ainsi la formule finale de comptage des chtoucas pour la partie elliptique.

Théorème 5.1. *Avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\#\mathcal{C}^{I,\mathrm{ell}}_{\lambda_{\overline{T}}, \beta_{T'}}(T, T', s)_J = \sum_{(\gamma_0;\gamma_x,\delta_x)} \ker^1(F, G_{\gamma_0}) \cdot \mathrm{vol}(JG_{\gamma_0}(F)\backslash G_{\gamma_0}(\mathbb{A})) \prod_{x \notin T} \boldsymbol{O}_{\gamma_x}(\phi_{\beta_x}) \prod_{x \in T} \boldsymbol{TO}_{\delta_x}(\phi_{\lambda_x})$$

où la somme parcourt tous les triplets de Kottwitz $(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ tels que γ_0 soit elliptique et que l'invariant $\mathrm{inv}(\gamma_0; \gamma_x, \delta_x)$ *s'annule.*

Remerciements

Je remercie Laurent Lafforgue, Ngô Bao Châu et Yakov Varshavsky pour leurs soutiens et leurs explications. Ce projet a été réalisé avec l'aide du LIA Formath Vietnam et de l'ANR-10-BLAN 0114 Arithmétique des Variétés de Shimura et des formes automorphes et Applications dont je fais partie.

References

BD A. Beilinson and V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves*, Preprint, available at http://math.uchicago.edu/~mitya/langlands.html.

BLR90 S. Bosch, W. Lutkebohmert and M. Raynaud, *Neron models*, Ergebnisse der Mathematik, vol. 21 (Springer, Berlin, 1990).

Dri87 V. Drinfeld, *Varieties of modules of F-sheaves*, Funct. Anal. Appl. **21** (1987), 107–122.

Dri89 V. Drinfeld, *Cohomology of compactified moduli varieties of F-sheaves of rank* 2, J. Soviet Math. **46** (1989), 1789–1821.

Kot82 R. Kottwitz, *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. J. **49** (1982), 785–806.

Kot85 R. Kottwitz, *Isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **56** (1985), 201–220.

Kot86 R. Kottwitz, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.

Kot90 R. Kottwitz, *Shimura varieties and λ-adic representations*, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I*, Ann Arbor, MI, 1988, Perspectives in Mathematics, vol. 10 (Academic Press, Boston, MA, 1990), 161–209.

Kot92 R. Kottwitz, *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 373–444.

Laf97 L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan–Petersson*, Astérisque **243** (1997).

Laf98 L. Lafforgue, *Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 1001–1036.

Laf02 L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147** (2002), 1–241.

Laf12 V. Lafforgue, *Paramètres de Langlands et cohomologie des espaces de modules de G-chtoucas*, Preprint (2012), math.AG/1209.5352v1.

Lau96 G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I. Geometry, counting of points and local harmonic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 41 (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

Lau97 G. Laumon, *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II. Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence*, with an appendix by Jean-Loup Waldspurger, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 56 (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

Lau04 E. Lau, *On generalised $\mathcal{D}$-shtukas*, Dissertation, Bonner Mathematische Schriften [Bonn Mathematical Publications], Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, **369** (2004).

Lau07 E. Lau, *On degenerations of $\mathcal{D}$-shtukas*, Duke Math. J. **140** (2007), 351–389.

LRS93 G. Laumon, M. Rapoport and U. Stuhler, *$\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence*, Invent. Math. **113** (1993), 217–338.

Ngô06a B.-C. Ngô, *$\mathcal{D}$-chtoucas de Drinfeld à modifications symétriques et identité de changement de base*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **39** (2006), 197–243.

Ngô06b B.-C. Ngô, *Fibration de Hitchin et endoscopie*, Invent. Math. **164** (2006), 399–453.

Ngô07 T. Ngô Dac, *Compactification des champs de chtoucas et théorie géométrique des invariants*, Astérisque **313** (2007).

NN08 B.-C. Ngô and T. Ngô Dac, *Comptage de G-chtoucas : la partie régulière ellitique*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), 181–203.

Rap05 M. Rapoport, *A guide to the reduction of Shimura varieties*, Astérisque **298** (2005), 271–318.

RR96 M. Rapoport and M. Richartz, *On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure*, Compositio Math. **103** (1996), 153–181.

Ser94 J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, fifth edition (Springer, Berlin, 1994).

Ste65 R. Steinberg, *Regular elements of semisimple algebraic groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **25** (1965), 49–80.

Var04 Y. Varshavsky, *Moduli spaces of principal F-bundles*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), 131–166.

Ngo Dac Tuan ngodac@math.univ-paris13.fr
Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430,
Villetaneuse, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007100 Published online by Cambridge University Press