UNE GENERALISATION DES LIGNES DE GREEN

LINDA LUMER-NAIM*)

I. Préliminaires

1. L'objet du présent travail est d'étudier, dans un espace de Green Ω, une généralisation des lignes de Green, à savoir les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau de $\frac{G}{h}$, où G désigne la fonction de Green de pôle fixé $y_0 \in \Omega$, et h une fonction harmonique >0 fixée dans Ω. Le cas $h=1$, qui est celui des lignes de Green ordinaires, a été étudié en détail par M. Brelot et G. Choquet dans [4]. On montrera ici, moyennant l'introduction de notions convenablement appropriées, que les propriétés de ce cas initial s'étendent.

Ainsi, au voisinage du pôle y_0, (supposé non à l'infini par exemple), ces "*h-lignes*" sont toutes issues de y_0 et y admettent une demi-tangente en correspondance biunivoque avec la ligne ; d'où, sur l'ensemble $\mathscr{L}_h$ des lignes issues de y_0, une topologie d'espace compact homéomorphe à la sphère unité, puis une mesure $g_h \geq 0$—*la h-mesure de Green*—de total $h(y_0)$, qui pour un faisceau de lignes issues de y_0, est proportionnelle à l'angle solide du faisceau des demi-tangentes correspondantes, et aussi à la h-mesure harmonique en y_0, relative au domaine $\left\{\frac{G}{h} > \lambda\right\}$, $\lambda > 0$ assez grand, de la trace du faisceau sur la surface $\left\{\frac{G}{h} = \lambda\right\}$. Au sens de cette mesure g_h, presque toute ligne de $\mathscr{L}_h$ est *h-régulière*, c'est-à-dire que la borne inférieure de $\frac{G}{h}$ y est nulle, et les lignes h-régulières établissent entre les surfaces $\left\{\frac{G}{h} = \lambda\right\}$ un homéomorphisme conservant la h-mesure harmonique en y_0, relative aux domaines $\left\{\frac{G}{h} > \lambda\right\}$.

Ces lignes permettent diverses applications aux fonctions surharmoniques et au principe du maximum, que l'on donnera pour terminer, et que l'on utilisera surtout pour une extension du principe de Dirichlet, dans un travail à paraitre prochainement et résumé dans la Note [6].

2. Nous renvoyons essentiellement à [4] pour les définitions et propriétés

Received March 1, 1965.
*) Ce travail a été rédigé avec l'appui de National Science Foundation, grant G-24502.

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

des espaces de Green. Rappelons seulement ici qu'une surface (ou courbe) y est dite *régulière* si elle est définie par l'une des coordonnées en fonction deux fois continûment différentiable des autres coordonnées, et qu'un ouvert ω, relativement compact et sans point à l'infini sur sa frontière, est dit *régulier* si $\omega = \overset{\circ}{\bar{\omega}}$, et si au voisinage de tout point-frontière x_0 il existe un homéomorphisme continûment différentiable transformant localement ω en cône polyédral de sommet x_0; l'ouvert est *très régulier* si de plus sa frontière est une surface localement régulière.

Finalement, la formule classique de Green

$$\int_{\omega} f \Delta g \, d\omega + \int_{\overset{*}{\omega}_{\rm int}} f \frac{dg}{dn} d\sigma + \int_{\omega} (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g) \, d\omega = 0$$

est valable pour f et g pourvues de dérivées secondes continues dans un ouvert contenant l'adhérence de ω régulier et sans points à l'infini, et s'étend, si ω contient des points à l'infini, à f et g harmoniques, ou même seulement f bornée et de grad^2 sommable hors des points à l'infini.

Rappelons aussi [3] qu'étant donné un espace de Green Ω compactifié selon $\hat{\Omega}$ métrisable où Ω est partout dense, donc de frontière $\Gamma = \hat{\Omega} - \Omega$, on peut, moyennant un certain axiome $\mathscr{A}_h$, developper pour Ω et la frontière Γ un problème de Dirichlet "relatif", dans lequel les conditions-frontière portent sur les *quotients* des fonctions sous ou surharmoniques par une fonction h harmonique >0 fixée dans Ω. Pour chaque $x \in \Omega$, la h-mesure harmonique μ_h^x s'introduit comme dans le cas classique, et la solution-dont l'existence équivaut à la sommabilité-$d\mu_h^x$ de la donnée f, pour un ou tout x-s'écrit : $\mathscr{D}_{f,h}(x) = \int f \, d\mu_h^x$. Un ensemble-frontière de h-mesure harmonique nulle est dit *h-négligeable.*

Si l'axiome $\mathscr{A}_h$ est vrai pour $\hat{\Omega}$, il l'est pour tout ouvert partiel avec sa frontière dans $\hat{\Omega}$, et l'on sait aussi que pour la compactification de Martin, $\mathscr{A}_h$ est vérifié quel que soit h.

3. Terminons ces préliminaires par quelques notations et propriétés. Dans toute la suite, Ω sera un espace de Green à $\tau \geq 2$ dimensions, Δ sa frontière de Martin, qui le compactifie selon $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta$, $\check{\Omega}$ l'espace Ω diminué de ses points à l'infini, s'il en existe, enfin $G = G(x, y_0)$ la fonction de Green de Ω de pôle fixé y_0, et h une fonction harmonique >0 fixée dans Ω.

On notera $D^{\lambda, h}$ l'ensemble $\left\{ \frac{G}{h} > \lambda \right\}$, avec $0 < \lambda < G(y_0, y_0)/h(y_0)$ fini ou

$+\infty$ selon que y_0 est point à l'infini ou non, et $\Sigma^{\lambda,h}$ sa frontière dans Ω, ensemble $\left\{\frac{G}{h}=\lambda\right\}$. *$D^{\lambda,h}$ est un domaine* (ouvert connexe) *dont $G-\lambda h$ est fonction de Green de pôle y_0, et les points-frontière de $D^{\lambda,h}$ situés sur Δ forment un ensemble h-négligeable pour $D^{\lambda,h}$* (et même pour Ω d'après [5], th 21) ; *$\Sigma^{\lambda,h}$* est une surface régulière. De plus, si Ω_n domaine régulier tend en croissant vers Ω, la h-mesure harmonique relative à $\Omega_n \cap D^{\lambda,h}$ de l'ensemble $\mathring{\Omega}_n \cap D^{\lambda,h}$ tend vers 0 dans $D^{\lambda,h}$.

Les démonstrations données ici suivront en général pas à pas celles du cas $h=1$, avec les seules modifications nécessitées par l'introduction de $h \neq 1$, mais seront écrites en détail pour en rendre la lecture indépendante. La terminologie utilisée restera celle du cas classique, comme dans [5], l'introduction dans le présent contexte d'une terminologie inspirée des récentes théories axiomatiques ayant paru tout à fait superficielle.

II. Arcs de green et lignes de green relatifs à h

4. Arcs et lignes de Green

Un *arc de Green* (relatif à h) est par définition un arc de Jordan ouvert, sans points à l'infini ni zéros de grad $\frac{G}{h}$, ne contenant pas y_0, et admettant en chacun de ses points un vecteur tangent non nul parallèle à grad $\frac{G}{h}$. Autrement dit, le point courant $x=(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$ admet, sur toute image locale, une représentation paramétrique en fonction d'un paramètre t, telle que, en chaque point, $\frac{dx}{dt} \neq 0$, grad $\frac{G}{h} \neq 0$, et $\frac{dx}{dt} \wedge \operatorname{grad}\frac{G}{h}=0$. Comme $h>0$, cet arc satisfait donc localement au système d'équations différentielles :

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{hG'_{x_1}-Gh'_{x_1}} = \frac{dx_2}{hG'_{x_2}-Gh'_{x_2}} = \cdots = \frac{dx_\tau}{hG'_{x_\tau}-Gh'_{x_\tau}} = dt.$$

On convient de l'orienter dans le sens des $\frac{G}{h}$ croissants, c'est-à-dire de prendre comme sens positif celui pour lequel $\frac{dx}{dt} \circ \operatorname{grad}\frac{G}{h}>0$, soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{G}{h}\right)>0$; alors $\frac{G}{h}$, fonction strictement croissante et dérivable de t sur l'arc, peut être pris comme paramètre canonique.

D'après l'analyticité des coefficients du système (1) au voisinage de tout point de $\mathring{\Omega}-\{y_0\}$ où grad $\frac{G}{h} \neq 0$, il existe, pour chaque tel point x_0, un voisinage $\mathscr{V}$ de x_0 et un $\varepsilon>0$ tels que par tout $x \in \mathscr{V}$ passe un arc de Green unique γ_x

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

sur lequel $\frac{G}{h}$ varie dans l'intervalle $I=\left[\frac{G}{h}(x_0)-\varepsilon,\ \frac{G}{h}(x_0)+\varepsilon\right]$. Les coordonnées locales du point de cet arc où $\frac{G}{h}=\lambda\in I$ sont fonctions analytiques de l'ensemble des coordonnées locales de x, et de λ, de sorte que si x décrit par exemple l'intersection de la surface $\left\{\frac{G}{h}=\frac{G}{h}(x_0)\right\}$ avec une surface régulière non tangente, l'arc γ_x décrit une surface régulière.

Si deux arcs de Green passent par un même point, ils ont en commun un même arc de Green; si, lorsque $\frac{G}{h}$ tend vers sa borne supérieure (ou inférieure) sur un arc de Green γ, le point courant x a une valeur d'adhérence $x_0\in\breve{\Omega}-\{y_0\}$ et non zéro de grad $\frac{G}{h}$, alors $x\to x_0$, et l'arc peut se prolonger de façon à contenir x_0.

On appellera *ligne de Green relative à h*, ou *h-ligne* de Green, et l'on omettra la plupart du temps le préfixe h, tout arc de Green maximal, c'est-à-dire tel qu'aucun autre arc de Green différent ne le contienne.

Par tout point x_0, distinct de y_0, non à l'infini, et où grad $\frac{G}{h}\neq 0$, *il passe une h-ligne de Green et une seule.* Il existe en effet au moins un arc de Green passant par x_0, et si l'on considère, pour tous ces arcs γ, les bornes

$$B=\sup_{\gamma}\left(\sup_{x\in\gamma}\frac{G}{h}(x)\right)\quad\text{et}\quad B'=\inf_{\gamma}\left(\inf_{x\in\gamma}\frac{G}{h}(x)\right),$$

on voit qu'il existe un arc de Green unique γ_0 contenant tous les γ, et sur lequel les bornes de $\frac{G}{h}$ sont précisement B et B', donc effectivement maximal.

5. Tube régulier, flux généralisé, ou "h-flux", d'un tube

Comme dans le cas $h=1$, on dira qu'un faisceau d'arcs de Green, limités à deux "sphères" de Green $\Sigma^{\lambda_1,h}$, $\Sigma^{\lambda_2,h}$, forme un *tube régulier* Θ si Θ est un domaine régulier, et si grad $\frac{G}{h}\neq 0$ sur l'adhérence $\overline{\Theta}$ dite tube compact régulier; les traces du faisceau (resp. du tube compact) sur les "sphères" $\Sigma^{\lambda_1,h}$, $\Sigma^{\lambda_2,h}$, sont les *bases* du tube (resp. du tube compact).

La formule de Green donne $\int_{\overset{*}{\Theta}_{\rm int}}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma=0$; mais sur les parois du tube, c'est-à-dire aux points de $\overset{*}{\Theta}$ hors des bases, grad $\frac{G}{h}$ est tangent à la surface limitante, donc $\frac{d}{dn}\left(\frac{G}{h}\right)$ y est nul, et de même $\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)$; de sorte que, en orientant les normales aux bases dans le même sens, par exemple celui des $\frac{G}{h}$ croissants (et nous adopterons ce sens dans toute la suite), il vient

$$\int_{\overset{*}{\Theta}\cap\Sigma^{\lambda_1,h}}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma=\int_{\overset{*}{\Theta}\cap\Sigma^{\lambda_2,h}}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma.$$

De même, l'integrale $\int_{\overset{*}{\Theta}\cap\Sigma^{\lambda,h}}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma$ conserve la même valeur lorsque λ varie dans l'intérvalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Ce sera par définition le flux généralisé, ou "*h-flux*" *du tube.*

Pour terminer, soient $\Sigma^{\lambda_1,h}$, $\Sigma^{\lambda_2,h}$ deux sphères de Green distinctes, traversées par une ligne ℓ aux points x_1, x_2 respectivement. Par tout point x suffisamment voisin de x_1 passe une h-ligne unique qui traverse $\Sigma^{\lambda_2,h}$ dans un voisinage fixé de x_2, et les coordonnées locales d'un point y de cette ligne entre $\Sigma^{\lambda_1,h}$ et $\Sigma^{\lambda_2,h}$ sont fonctions analytiques des coordonnées locales de x et de $\frac{G}{h}(y)$. Dans tout voisinage de l'arc (x_1, x_2), extrémités comprises, il existe un tube régulier contenant l'arc. Plus généralement, si α est une partie compacte régulière de $\Sigma^{\lambda_1,h}$, sans points à l'infini ni zéros de grad$\frac{G}{h}$, et si les h-lignes qui traversent α traversent aussi $\Sigma^{\lambda_2,h}$, elles engendrent un tube compact régulier dont la base sur $\Sigma^{\lambda_2,h}$ est aussi une partie compacte régulière, sans points à l'infini ni zéros de grad$\frac{G}{h}$.

Ces propriétés de "continuité" sont conséquences des propriétés des arcs de Green indiquées plus haut.

III. Étude des h-lignes de Green au voisinage du pôle

6. Limite et demi-tangente au pôle

Nous supposerons d'abord le pôle y_0 non à l'infini; $\frac{G}{h}$, alors non borné, y vaut $+\infty$. Le comportement des lignes au voisinage de y_0 est résumé dans le théorème suivant:

THEOREME 1. *Par tout point de Ω assez voisin de y_0 (y_0 non à l'infini) et distinct de y_0, il passe une h-ligne de Green et une seule. Elle admet dans le sens des $\frac{G}{h}$ croissants un point-limite qui est y_0, et une demi-tangente en y_0.*

Inversement, à toute demi-droite issue de y_0 correspond une h-ligne unique, qui lui est tangente en ce point, et il y a homéomorphisme, par l'intermédiaire de ces lignes, entre les demi-droites issues de y_0 et les points d'un $\Sigma^{\lambda_0,h}$ pour λ_0 assez grand.

Comme les points à l'infini de Ω sont isolés, il n'y en a aucun au voisinage de y_0. D'autre part, au voisinage de y_0, G est de la forme $\log\frac{1}{r}+\varphi$ dans le plan, $\frac{1}{r^{\tau-2}}+\varphi$ dans l'espace à $\tau>2$ dimensions, avec φ harmonique, et $r=|x-y_0|$, distance euclidienne prise sur l'image locale. Comme h est harmonique, on en déduit que $\left|\operatorname{grad}\frac{G}{h}\right|$ est, pour $r\to 0$, équivalent à $\frac{1}{hr}$ dans le plan, à $\frac{\tau-2}{hr^{\tau-1}}$ pour $\tau>2$, donc que $\operatorname{grad}\frac{G}{h}$ est $\neq 0$ hors de y_0; de sorte que, par tout point assez voisin de y_0, il passe bien une h-ligne et une seule.

Soit x le point courant sur une telle ligne ℓ ; la forme locale de G montre encore que $r=|x-y_0|$ est une fonction strictement décroissante de $\frac{G}{h}$ sur ℓ, et que, pour $r\to 0$, l'angle du vecteur y_0x avec $\operatorname{grad}\frac{G}{h}$ tend vers π tandis que le rapport entre la variation de l'arc et celle de r tend vers 1. Il en résulte que, lorsque $\frac{G}{h}$ tend en croissant vers sa borne supérieure sur ℓ, r décroit vers une limite r_0, nécessairement nulle (x ne peut avoir deux valeurs d'adhérence distinctes sur le cercle $r=r_0>0$, et s'il en avait une seule x_0 on pourrait prolonger ℓ au dela de x_0 ce qui est contradictoire), et x admet y_0 comme point limite, la borne supérieure de $\frac{G}{h}$ étant $+\infty$.

Passons à l'étude des *demi-tangentes* au point y_0. Soit U le vecteur unitaire sur y_0x, et prenons $r=|x-y_0|$ comme paramètre ; on a $y_0x=rU$, et l'équation différentielle des h-lignes s'écrit

$$\frac{d}{dr}(rU)\wedge\operatorname{grad}\frac{G}{h}=0,$$

soit

$$U\wedge\operatorname{grad}\frac{G}{h}+r\frac{dU}{dr}\wedge\operatorname{grad}\frac{G}{h}=0.$$

Le premier membre est ou bien nul, ou bien perpendiculaire à $\operatorname{grad}\frac{G}{h}$, qui, pour r assez petit, est voisin en direction de U, de sorte que la multiplication vectorielle par U donne une équation équivalente qui se réduit à

$$\frac{dU}{dr}=\frac{1}{r}\,\frac{\operatorname{grad}\frac{G}{h}-U\cdot\left(U\operatorname{grad}\frac{G}{h}\right)}{U\cdot\operatorname{grad}\frac{G}{h}},$$

explicitée selon

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{dU}{dr}=\frac{1}{r}\,\frac{\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}-U\left(U\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}\right)-\frac{1}{h^2}\left(\log\frac{1}{r}\right)\{\operatorname{grad}h-U(U\operatorname{grad}h)\}}{\left(U\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}\right)-\frac{1}{h^2}\left(\log\frac{1}{r}\right)(U\operatorname{grad}h)-\frac{1}{hr}},$$

dans le plan, et

$$\frac{dU}{dr}=\frac{1}{r}\,\frac{\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}-U\left(U\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}\right)-\frac{1}{h^2}r^{2-\tau}\{\operatorname{grad}h-U(U\operatorname{grad}h)\}}{U\operatorname{grad}\frac{\varphi}{h}-\frac{1}{h^2}r^{2-\tau}(U\operatorname{grad}h)-\frac{\tau-2}{hr^{\tau-1}}}$$

pour $\tau>2$.

Le second membre est, pour r assez petit, borné indépendamment des autres variables, donc toute intégrale admet une limite finie lorsque $r\to 0$, et il existe une intégrale unique de limite donnée pour $r\to 0$; elle varie continûment avec la limite initiale, d'où l'homéomorphisme de l'énoncé entre le compact des demi-droites issues de y_0 et les points d'un $\Sigma^{\lambda_0, h}$ pour λ_0 assez grand.

Le cas du point y_0 à l'infini se traite de façon similaire, en utilisant le développement de G au voisinage du point à l'infini dans R^τ, et en prenant $\frac{1}{r}$ comme paramètre ; on obtient :

THEOREME 1'. *Pour un pôle y_0 à l'infini, les résultats du théorème* 1 *subsistent, en remplaçant seulement le faisceau des demi-tangentes au point y_0 par celui des directions asymptotiques orientées issues d'un point fixe quelconque, et en prenant λ_0 assez voisin du maximum $\frac{G}{h}(y_0)$ de $\frac{G}{h}$ dans Ω.*

7. Conservation de la h-mesure harmonique au voisinage du pôle et h-mesure de Green

Complétons d'abord le théorème 1 par l'énoncé suivant :

THEOREME 2. *Pour $\lambda>\lambda_0$ assez grand (et λ_0 assez voisin de $\frac{G}{h}(y_0)$ si y_0 est à l'infini), les $\Sigma^{\lambda,h}$ sont en correspondance homéomorphe par l'intermédiaire des h-lignes qui les traversent. Dans cette correspondance, il y a conservation de la h-mesure harmonique au point y_0, relativement au domaine $D^{\lambda,h}$; et pour un ensemble e borélien variable de $\Sigma^{\lambda,h}$, cette h-mesure vaut le quotient par φ_τ du "h-flux" $\int_e\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma$, et le produit par $\frac{h(y_0)}{\sigma_\tau}$ de l'angle solide du faisceau des demi-tangentes correspondantes au point y_0* (resp. *des directions asymptotiques orientées*).

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_\tau=\text{flux élémentaire à travers la sphère unité de } R^\tau\,;\\ \sigma_\tau=\text{aire de la sphère unité de } R^\tau.\end{array}\right.$$

La correspondance entre les $\Sigma^{\lambda, h}$ se déduit de la fin du théorème 1. Puis, comme $\Sigma^{\lambda, h}$ est une surface régulière, la mesure harmonique ordinaire au point y_0, relative au domaine $D^{\lambda, h}$, vaut, sur $\Sigma^{\lambda, h}$, l'intégrale en surface de $\frac{1}{\varphi_\tau} \frac{dg}{dn}$, avec $g = G - \lambda h$, fonction de Green de $D^{\lambda, h}$ de pôle y_0; donc la h-mesure harmonique analogue, produit par h de la précédente, vaut l'intégrale en surface de $\frac{1}{\varphi_\tau} h\left(\frac{dG}{dn} - \lambda \frac{dh}{dn}\right)$, ce qui donne bien la valeur $\frac{1}{\varphi_\tau} \int_e \left(h \frac{dG}{dn} - G \frac{dh}{dn}\right) d\sigma$ pour le borélien e de l'énoncé, G étant égal à λh sur $\Sigma^{\lambda, h}$.

La notion de h-flux d'un tube régulier montre encore l'égalité des h-mesures harmoniques pour deux compacts réguliers e_1, e_2, en correspondance sur $\Sigma^{\lambda_1, h}$ et $\Sigma^{\lambda_2, h}$ respectivement (λ_1 et $\lambda_2 > \lambda_0$); le cas de e_1, e_2, ouverts réguliers, puis boréliens quelconques, s'en déduit aussitôt.

Pour terminer, considérons sur un $\Sigma^{\lambda, h}$ fixe, ($\lambda > \lambda_0$, et y_0 non à l'infini) la base e d'un tube régulier de h-lignes, qui traversent la surface sphérique S_r de rayon r assez petit ($r \to 0$) selon l'ensemble variable e_r; d'après la formule de Green, on a

$$\int_e \left(h \frac{dG}{dn} - G \frac{dh}{dn}\right) d\sigma = -\int_{e_r} \left(h \frac{dG}{dn} - G \frac{dh}{dn}\right) d\sigma = -\int_{e_r} \left(h \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial h}{\partial r}\right) d\sigma,$$

(normales intérieures), et, compte tenu de la forme locale de G, le dernier terme s'écrit

$$\int_{e_r} \frac{h}{r}\left(1 + \frac{r}{h} \log \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}\right) d\sigma - \int_{e_r} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial h}{\partial r}\right) d\sigma, \text{ dans le plan,}$$

$$\int_{e_r} \frac{(\tau - 2)h}{r^{\tau-1}} \left(1 + \frac{r}{h(\tau-2)} \frac{\partial h}{\partial r}\right) d\sigma - \int_{e_r} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial h}{\partial r}\right) d\sigma, \text{ pour } \tau > 2.$$

La seconde intégrale tend vers 0 avec r; la première a même limite que $\int_{e_r} \frac{h}{r} d\sigma$, $\left(\text{resp. } \int_{e_r} \frac{(\tau - 2)h}{r^{\tau-1}} d\sigma\right)$, ce qui est égal à $h(y_0) \lim_{r \to 0} \int_{e_r} \frac{1}{r} d\sigma$ $\left(\text{resp. } h(y_0) \lim_{r \to 0} \int_{e_r} \frac{(\tau - 2)}{r^{\tau-1}} d\sigma\right)$, puis à l'angle solide du cône des demi-tangentes initiales, au facteur $h(y_0) \frac{\varphi_\tau}{\sigma_\tau}$ près.

Raisonnement analogue pour le pôle y_0 à l'infini.

Ces résultats vont permettre de définir une *h-mesure de Green* généralisant la mesure de Green introduite de façon analogue dans le cas $h = 1$. On dira qu'une *h-ligne* ℓ *est issue de* y_0 si le point courant tend vers y_0 lorsque $\frac{G}{h}$ tend

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

vers sa borne supérieure sur ℓ, ce qui revient à dire que cette borne est égale à celle de $\frac{G}{h}$ dans Ω ($+\infty$ si y_0 n'est pas un point à l'infini). On notera $\mathscr{L}_h$ l'ensemble des h-lignes issues de y_0. On définit sur $\mathscr{L}_h$ une topologie d'espace compact, homéomorphe à l'espace des demi-tangentes ou directions asymptotiques initiales, ou, de façon équivalente, à la sphère unité S décrite par le point directeur de ces demi-droites. Sur l'espace compact $\mathscr{L}_h$, la h-mesure de Green est alors par définition la mesure de Radon ≥ 0, g_h, de total égal à $h(y_0)$, qui vaut le produit par $\frac{h(y_0)}{\sigma_\tau}$ de la mesure-aire sur S, et aussi la h-mesure harmonique en y_0, relative à tout $D^{\lambda,h}$ assez petit, de la trace sur $\Sigma^{\lambda,h}$ du faisceau de lignes.

IV. Etude globale des h-lignes de Green issues du pôle

On dira du'une ligne ℓ issue du pôle est *h-régulière* si la borne inférieure de $\frac{G}{h}$ sur la ligne est égale à zéro. Le but essentiel de ce paragraphe est de montrer que l'ensemble des lignes non h-régulières est de h-mesure de Green nulle, autrement dit que, au sens de la mesure g_h, presque toute ligne issue du pôle est h-régulière. La démonstration suit encore de près celle du cas $h=1$, mais on a besoin d'introduire une notion appropriée de capacité, associée à h, la h-capacité, remplaçant la capacité ordinaire, et d'établir quelques lemmes préalables. C'est l'objet du numéro suivant.

8. h-Capacité dans Ω

Pour tout compact $K\subset\Omega$, l'extrémale (au sens de M. Brelot [1]) de h relative à $\Omega-K$[1], est un potentiel de Green U_K^h, égal à h quasi-partout sur K; la mesure associée μ_K^h est portée par K, et son énergie définit pour K variable une capacité de Choquet alternée d'ordre infini, que l'on appellera *h-capacité* de K (relativement à Ω), notée $C_h^\Omega(K)$, et brièvement $C_h(K)$. $C_h(K)$ n'est nulle que si K est vide ou polaire, et comme μ_K^h ne charge pas l'ensemble polaire où $U_K^h \neq h$, $C_h(K)=\int U_K^h d\mu_K^h=\int_K h d\mu_K^h$. De plus:

---

[1] L'extrémale d'une fonction v surharmonique >0 sur un ensemble $E\subset\Omega$ est la plus petite fonction surharmonique ≥ 0 majorant v quasi-partout hors de E. Si E est ouvert, elle y vaut la solution du problème de Dirichlet pour E, et donnée-frontière égale à v dans Ω, à 0 ailleurs.

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

LEMME 1.[2] *Pour tout ouvert régulier ω, relativement compact dans Ω et contenant K, on a:*

$$C_h(K) = \frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\overset{*}{\omega}\,\mathrm{int}}\left(h\frac{dU_K^h}{dn} - U_K^h\frac{dh}{dn}\right)d\sigma.$$

Si $x\in\omega$, on voit d'abord en appliquant la formule de Green aux fonctions h et $G_x(y) = G(x, y)$ dans un ouvert $\omega - \overline{D}$, avec $D = \left\{\frac{G_x}{h} > \lambda > 0\right\}$, choisi relativement compact dans ω, que

$$(1) \qquad \frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\overset{*}{\omega}\,\mathrm{int}}\left(h\frac{dG_x}{dn} - G_x\frac{dh}{dn}\right)d\sigma = \frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\overset{*}{D}\,\mathrm{int}}\left(h\frac{dG_x}{dn} - G_x\frac{dh}{dn}\right)d\sigma,$$

ce qui vaut $h(x)$, puisque l'élément différentiel de la seconde intégrale représente la h-mesure harmonique au point x, relative au domaine D.

Puis, de $U_K^h(y) = \int_K G_x(y)d\mu_K^h(x)$, on déduit, pour chaque $y\in\overset{*}{\omega}$,

$$\frac{dU_K^h}{dn}(y) = \int_K\frac{dG_x}{dn}(y)d\mu_K^h(x),$$

d'où

$$\int_{\overset{*}{\omega}\,\mathrm{int}}\left(h\frac{dU_K^h}{dn} - U_K^h\frac{dh}{dn}\right)d\sigma = \int_{\overset{*}{\omega}\,\mathrm{int}}d\sigma(y)\int_K\left(h\frac{dG_x}{dn} - G_x\frac{dh}{dn}\right)d\mu_K^h(x),$$

et la formule annoncée par permutations d'intégrations dans le second membre et l'égalité (1).

LEMME 2. *Soit K compact $\subset\Omega$, de h-capacité $C_h(K)$, et potentiel correspondant U_K^h. Alors:*

$$\int_{\Omega-K}h^2\,\mathrm{grad}^2\frac{U_K^h}{h}\,d\omega \leq \varphi_\tau C_h(K).^{3)}$$

Soient ω_n et Ω_n ouverts très réguliers relativement compacts, tels que $\omega_n \downarrow K$, $\Omega_n \uparrow \Omega$, et soit u_n la solution du problème de Dirichlet ordinaire pour $\Omega_n - \overline{\omega}_n$, et donnée-frontière égale à h sur $\overset{*}{\omega}_n$, à 0 sur $\overset{*}{\Omega}_n$. Dans $\Omega - K$, $u_n \to U_K^h$, grad u_n $\to$ grad U_K^h, uniformément localement hors des points à l'infini, de sorte que

[2] Cas particulier de la formule générale $\int_K hd\mu = \frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\overset{*}{\omega}\,\mathrm{int}}\left(h\frac{dU}{dn} - U\frac{dh}{dn}\right)d\sigma$, pour le potentiel U d'une mesure $\mu\geq 0$ portée par K, qui étend la formule classique de Gauss ($h=1$), et se démontre comme dans le texte.

[3] Il y a en fait égalité, comme on le verra dans le développement de la Note [6], et au $n°9$ pour le cas particulier qui suit.

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

$$\int_{\Omega-K} h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{U_K^h}{h}\, d\omega \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega_n-\bar{\omega}_n} h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{u_n}{h}\, d\omega.$$

Comme $h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{u_n}{h} = \operatorname{grad}^2 u_n - \operatorname{grad} \frac{u_n^2}{h} \cdot \operatorname{grad} h,$

l'intégrale du second membre se transforme par la formule de Green en

$$\int_{\overset{*}{\widehat{(\Omega_n-\bar{\omega}_n)\text{int}}}} \frac{u_n}{h}\left(h\frac{du_n}{dn} - u_n\frac{dh}{dn}\right)d\sigma = \int_{(\overset{*}{\omega_n})\text{int}}\left(h\frac{du_n}{dn} - u_n\frac{dh}{dn}\right)d\sigma,$$

qui vaut $\int_{(\overset{*}{\omega_1})\text{int}}\left(h\frac{du_n}{dn} - u_n\frac{dh}{dn}\right)d\sigma$, laquelle tend vers $\int_{(\overset{*}{\omega_1})\text{int}}\left(h\frac{dU_K^h}{dn} - U_K^h\frac{dh}{dn}\right)d\sigma$ $= \varphi_\tau C_h(K)$, d'où l'inégalité en vue. *Cas particulier:* Pour un $D^{\lambda,h}$ relativement compact, et $K = \overline{D^{\lambda,h}}$, $U_K^h = \inf\left(\frac{G}{\lambda},\ h\right)$, $C_h(K) = \frac{1}{\lambda} h(y_0)$, d'où

$$\int_{\Omega-\overline{D^{\lambda,h}}} h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{G}{h}\, d\omega \le \lambda\varphi_\tau h(y_0).$$

Avant de passer au lemme suivant, remarquons que pour un tube compact régulier $\bar{\Theta}$ (adhérence du tube ouvert régulier Θ), de bases $\bar{a}$, $\bar{b}$, sur deux "sphères" $\Sigma^{\lambda,h}$, $\Sigma^{\lambda',h}$, respectivement, $(\lambda > \lambda')$, on a

$$\int_\Theta h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{G}{h}\, d\omega = (\lambda - \lambda')\int_{\bar{a}\text{ ou }\bar{b}}\left(h\frac{dG}{dn} - G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma.$$

On le voit en appliquant la formule de Green au premier membre, dans lequel $h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{G}{h} = \operatorname{grad}^2 G - \operatorname{grad}\frac{G^2}{h}\cdot \operatorname{grad} h.$

LEMME 3. *Soient $D^{\lambda,h}$ relativement compact dans Ω, et K compact $\subset \Omega_1 = \Omega - \overline{D^{\lambda,h}}$. L'ensemble des h-lignes de Green issues de y_0 et rencontrant K a une h-mesure de Green majorée par $\lambda C_h^{\Omega_1}(K)$.*

Il suffira de voir que la mesure $-g_h$ des lignes qui rencontrent un ouvert ω contenant K et relativement compact dans Ω_1 est majorée par $\lambda C_h^{\Omega_1}(\bar{\omega})$. Cet ensemble de lignes est ouvert dans $\mathscr{L}_h$, donc réunion dénombrable de compacts α_i, d'intérieurs disjoints, dont chacun découpe sur $\Sigma^{\lambda,h}$ et $\Sigma^{\lambda_i,h}$ convenable $(\lambda_i < \lambda)$, les bases $\bar{a}_i$ et $\bar{b}_i \subset \omega$ d'un tube compact régulier $\bar{\Theta}_i$, et a une mesure-g_h égale à $\frac{1}{\varphi_\tau}\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn} - G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma.$

Introduisons le compact $B = \cup \bar{b}_i \subset \bar{\omega}$, le potentiel U_B^{h,Ω_1}, qui vaut h quasi-partout sur B (en particulier sur $\bar{b}_i$), s'annulle sur $\Sigma^{\lambda,h}$, et la h-capacité $C_h^{\Omega_1}(B)$. Pour chaque $\bar{\Theta}_i$, on voit que

$$\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma=\int_{(\overset{*}{\Theta}_i)_{\text{int}}}\frac{U_B^{h,\Omega_1}}{h}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma,$$

qui, par la formule de Green et un calcul élémentaire, se transforme en $-\int_{\Theta_i}h^2\left(\operatorname{grad}\frac{G}{h}\cdot\ \operatorname{grad}\frac{U_B^{h,\Omega_1}}{h}\right)d\omega$, de sorte que

$$\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma\leq\sqrt{\int_{\Theta_i}h^2\operatorname{grad}^2\frac{G}{h}d\omega\cdot\int_{\Theta_i}h^2\operatorname{grad}^2\frac{U_B^{h,\Omega_1}}{h}d\omega}.$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{\Theta_i}h^2\operatorname{grad}^2\frac{G}{h}d\omega&=(\lambda-\lambda_i)\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma\\&\leq\lambda\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma,\end{aligned}$$

il vient finalement

$$\int_{\bar{a}_i}\left(h\frac{dG}{dn}-G\frac{dh}{dn}\right)d\sigma\leq\lambda\int_{\Theta_i}h^2\operatorname{grad}^2\frac{U_B^{h,\Omega_1}}{h}d\omega.$$

Par sommation, on obtient pour la mesure considérée la majoration

$$\frac{\lambda}{\varphi_\tau}\int_{\Omega_1-B}h^2\operatorname{grad}^2\frac{U_B^{h,\Omega_1}}{h}d\omega\leq\lambda C_h^{\Omega_1}(B),$$

et l'on peut avoir un $C_h^{\Omega_1}(B)$ arbitrairement voisin de $C_h^{\Omega_1}(\bar{\omega})$, d'où le résultat.

LEMME 4. *Soit K_n compact variable dans un $D^{\lambda,h}$ fixé, et tel que $U_{K_n}^h(y_0)\to 0$, $n\to\infty$. Alors $C_h(K_n)\to 0$.*

En effet,

$$C_h(K_n)=\int_{K_n}hd\mu_{K_n}^h\leq\frac{1}{\lambda}\int_{K_n}Gd\mu_{K_n}^h=\frac{1}{\lambda}U_{K_n}^h(y_0)\to 0,\ n\to\infty.$$

9. Etude globale des lignes issues de y_0

En plus des lemmes précédents, nous utiliserons ici le fait que les points de Ω où le gradient de $\frac{G}{h}$ s'annulle forment un ensemble polaire, d'ailleurs fermé dans Ω (en particulier réunion dénombrable de compacts), et ne contenant aucun point d'un voisinage assez petit de y_0. C'est conséquence de l'analyticité de $\frac{G}{h}$ hors de y_0. Alors:

THEOREME 3. *L'ensemble des h-lignes de Green issues de y_0 et non h-régulières est de h-mesure de Green nulle.*

Remarquons d'abord que pour une ligne ℓ non h-régulière, toute valeur d'adhérence du point courant x lorsque $\frac{G}{h}$ tend vers sa borne inférieure, >0, sur ℓ, est nécessairement soit un zéro de grad $\frac{G}{h}$, soit un point à l'infini de Ω, soit le point d'Alexandroff $\mathscr{A}$ (ou si l'on veut un point de la frontière de Martin $\varDelta$ en lequel lim sup $\frac{G}{h}>0$, c'est-à-dire non faiblement h-régulier dans la terminologie de [5]). Car la ligne ℓ pourrait se prolonger au-delà de toute valeur d'adhérence $x_0 \in \Omega$, non à l'infini et non zéro de grad $\frac{G}{h}$, ce qui est contradictoire, et si $x_0 \in \varDelta$ est valeur d'adhérence, il existe $x_n \in \ell$, $x_n \to x_0$, tel que $\frac{G}{h}(x_n) \to$ borne inf $\frac{G}{h}$ sur ℓ, d'où lim sup $\frac{G}{h}$ en $x_0 > 0$.

Cela met donc évidence trois ensembles de lignes, et il suffira de montrer que chacun d'eux est de h-mesure de Green nulle.

Le cas des zéros de grad $\frac{G}{h}$ se traite en appliquant le lemme 3 avec un $\overline{D^{\lambda, h}}$ compact où grad $\frac{G}{h} \neq 0$. Tout compact α de zéros de grad $\frac{G}{h}$ est polaire, donc de h-capacité nulle, et contenu dans l'intérieur $\mathring{K}$ d'un compact $K \subset \Omega_1$, dont la h-capacité relative à Ω_1 est arbitrairement petite ; toute ligne ayant une valeur d'adhérence sur α doit rencontrer $\mathring{K}$, donc K, et le résultat s'ensuit.

Pour une valeur d'adhérence x_0 à l'infini, on considère les lignes rencontrant un voisinage ouvert sphérique (ou circulaire) de x_0 (extérieur d'un domaine sphérique de rayon $r \to +\infty$ sur l'image). Celles qui pénètrent non tangentiellement à la surface limitante forment un faisceau que l'on décompose comme au lemme 3 en une infinité dénombrable de compacts d'intérieurs disjoints dont chacun a une mesure-g_h égale à l'intégrale de $\frac{1}{\varphi_\tau}\left(h\frac{dG}{dn} - G\frac{dh}{dn}\right)$ sur la section sphérique ; par la forme de G au voisinage de x_0 et l'harmonicité de h, on voit que cette intégrale tend vers 0 avec $1/r$, donc de même la mesure-g_h du faisceau considéré. On voit la même propriété pour les lignes qui pénètrent tangentiellement, grâce au lemme 12 de [4]. Donc les lignes admettant x_0 comme valeur d'adhérence forment un ensemble de mesure-g_h nulle, et l'on conclut puisque les points à l'infini de Ω sont en infinité dénombrable.

Considérons pour terminer les lignes non h-régulières qui convergent vers $\mathscr{A}$ lorsque $\frac{G}{h}$ tend vers sa borne inférieure sur la ligne ; il suffit de montrer que pour chaque $\varepsilon>0$, l'ensemble $\alpha_\varepsilon = \left\{ \ell \ : \text{borne} \inf_{\ell} \frac{G}{h} > \varepsilon > 0 \right\}$ est de mesure-g_h nulle. Introduisons $D^{\varepsilon, h}$, Ω_n régulier croissant vers Ω, avec $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$, et

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

$K_n = \overline{(\Omega_{n+1} - \Omega_n)} \cap D^{\varepsilon, h}$, compact contenu dans $\overline{D^{\varepsilon, h}}$ et intérieur à $D^{\varepsilon_0, h}$, si $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Toute ligne $\ell \in \alpha_\varepsilon$ rencontre nécéssairement tout K_n (même tout $\mathring{K}_n$), donc, notant α_n le faisceau de lignes qui rencontrent K_n, on a $\alpha_\varepsilon \subset \bigcap_n \alpha_n$. On va montrer que $g_h(\alpha_n) \to 0$, $n \to +\infty$, d'où il résultera bien que $g_h(\alpha_\varepsilon) = 0$.

Soit l'espace de Green $\omega = D^{\varepsilon_0, h}$, $(\varepsilon_0 < \varepsilon)$, qui admet $G^\omega = G - \varepsilon_0 h$ pour fonction de Green de pôle y_0, et un $D^{\lambda, h}$ relativement compact pour domaine $\left\{ \frac{G^\omega}{h} > (\lambda - \varepsilon_0) \right\}$; le lemme 3 pour ω et $\omega_1 = \omega - \overline{D^{\lambda, h}}$ donne $g_h(\alpha_n) \leq (\lambda - \varepsilon_0) C_h^{\omega_1}(K_n)$. Le potentiel correspondant $U_{K_n}^{h, \omega_1}$, qui vaut dans $\omega_1 - K_n$ la solution du problème de Dirichlet pour la donnée h sur K_n, 0 ailleurs, est majoré, dans $\Omega_n \cap \omega_1$, par la h-mesure harmonique relative à $\Omega_n \cap D^{\varepsilon_0, h}$ de l'ensemble $\mathring{\Omega}_n \cap D^{\varepsilon_0, h}$, qui, elle, tend vers 0 pour $n \infty$ ($n°3$); donc $U_{K_n}^{h, \omega_1}(y)$ tend vers 0 en chaque $y \in \Omega_n \cap \omega_1$. Mais la fonction de Green de ω_1 de pôle y fixé majore, hors de Ω_n, $k(G - \varepsilon_0 h)$, ($k =$ constante > 0, indépendante de n), donc majore $k(\varepsilon' - \varepsilon_0)h$ sur tout K_n $(\varepsilon > \varepsilon' > \varepsilon_0)$, d'où, par le lemme 4, $C_h^{\omega_1}(K_n) \to 0$, et le résultat.

Corollaire. Si $D^{\lambda, h}$ est relativement compact, on a

$$\int_{\Omega - \overline{D^{\lambda, h}}} h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{G}{h} \, d\omega = \lambda \varphi_\tau h(y_0).$$

Terminons cette étude par:

Theoreme 4. *Les lignes issues de y_0 qui traversent un $\Sigma^{\lambda, h}$ donné forment dans $\mathscr{L}_h$ un ouvert de h-mesure de Green égale à* 1, *et établissent avec leurs traces sur $\Sigma^{\lambda, h}$ un homéomorphisme où il y a égalité de la h-mesure de Green et de la h-mesure harmonique en y_0 relative à $D^{\lambda, h}$* (laquelle vaut l'intégrale en surface de $\frac{1}{\varphi_\tau}\left(h \frac{dG}{dn} - G \frac{dh}{dn}\right)$); *en particulier l'ensemble des traces est de h-mesure harmonique égale à* 1.

Les lignes traversant deux "sphères" $\Sigma^{\lambda_1, h}$, $\Sigma^{\lambda_2, h}$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, établissent entre les ensembles de leurs traces un homéomorphisme qui conserve les h-mesures harmoniques en y_0, relatives à $D^{\lambda_1, h}$ et $D^{\lambda_2, h}$ respectivement, et ces ensembles sont de h-mesures égales à 1.

On verra aisément ces propriétés en raisonnant comme aux théorèmes 1–2, et en utilisant le théorème 3 ci-dessus.

V. Applications

10. Notion de h-radiale

Soit f une fonction définie dans Ω quasi-partout hors des points à l'infini; notons $f_\lambda(\ell)$ sa valeur au point où la ligne ℓ issue de y_0 rencontre la surface $\left\{\frac{G}{h}=\lambda\right\}$. et supposons $f_\lambda(\ell)$ sommable-dg_h pour $\lambda>0$ assez petit; de façon équivalente, nous pouvons supposer l'existence de la solution $\mathscr{D}_{f,h}^{D^{\lambda,h}}$ pour $D^{\lambda,h}$ et donnée-frontière égale à f dans Ω (ce qui suffit, puisque les points-frontière de $D^{\lambda,h}$ hors de Ω forment un ensemble h-négligeable pour $D^{\lambda,h}$), et alors $\int f_\lambda(\ell)dg_h=\mathscr{D}_{f,h}^{D^{\lambda,h}}(y_0)$.

Etendant à notre cas la notion de radiale introduite par M. Brelot [2], nous dirons que f admet une *h-radiale* φ s'il existe une fonction $\varphi(\ell)$ sommable-dg_h sur $\mathscr{L}_h$ telle que $\int|f_\lambda(\ell)-\varphi(\ell)|dg_h(\ell)\to 0$, $\lambda\to 0$, c'est-à-dire telle que $f_\lambda(\ell)$ converge en norme vers $\varphi(\ell)$ dans $L^1(g_h)$; φ est déterminée presque partout-dg_h, et alors unique pour une f donnée. Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une h-radiale pour f est que $\int|f_\lambda(\ell)-f_{\lambda'}(\ell)|dg_h(\ell)$ $\to 0$, λ, $\lambda'\to 0$.

Propriétés immédiates:

Toute inégalité sur des fonctions se transporte aux h-radiales; toute combinaison linéaire, enveloppe supérieure ou inférieure de fonctions admettant une h-radiale donne une fonction pourvue d'une h-radiale qui se déduit des autres par les mêmes opérations. Si de plus f_n, pourvue d'une h-radiale φ_n, converge uniformément vers f, alors φ_n converge en norme-L^1 vers une $\varphi\in L^1(g_h)$ qui est h-radiale de f.

Exemples:

Si v est potentiel de Green d'une mesure ≥ 0, $\frac{v}{h}$ admet une h-radiale nulle pour tout pôle, puisque $\int\left(\frac{v}{h}\right)_\lambda dg_h=\mathscr{D}_{v/h,h}^{D^{\lambda,h}}(y_0)=H_v^{D^{\lambda,h}}(y_0)\to 0$, $\lambda\to 0$; de même ($n°12$) pour toute u harmonique >0 dont la mesure associée ne charge que l'ensemble-frontière où lim sup $\frac{G}{h}>0$.

On verra surtout, dans le développement de la Note [6], que pour toute fonction u dite de la classe *h-BLD*, $\frac{u}{h}$ admet une h-radiale pour tout pôle.

11. Fonctions harmoniques h-indifférentes

Une fonction u *harmonique* dans Ω est dite *h-indifférente* si pour tout λ la solution $\mathscr{D}^{D^{\lambda,h}}_{u/h,h}$ existe et est égale à u; de façon équivalente si pour tout λ, la solution $H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{u}}$ (du problème de Dirichlet ordinaire pour $D^{\lambda,h}$ et donnée-frontière égale à u dans Ω, à 0 ailleurs) existe et vaut u, puisque les deux solutions sont à priori égales (si l'une d'elles existe). La notion est indépendante du pôle choisi y_0.

Propriétés:

Toute combinaison linéaire, ou limite monotone finie de fonctions h-indifférentes est aussi h-indifférente.

Toute u pour laquelle $\frac{u}{h}$ est *bornée* est h-indifférente (en particulier h); donc aussi toute solution d'un problème de Dirichlet relatif à h et à la frontière de Martin Δ, puisque toute solution >0 est limite d'une suite croissante de fonctions harmoniques >0 dont le quotient par h est borné; donc, plus généralement, toute solution fournie par l'axiomatique $\mathscr{A}_h$, qui est égale, comme on sait [5], à une solution relative à Δ. On verra aussi que toute fonction harmonique h-*BLD* est h-indifférente.

Toute fonction harmonique comprise entre deux fonctions harmoniques h-indifférentes est h-indifférente.

De plus, si u_n h-indifférente tend en croissant (ou décroissant) vers u harmonique, et si $\frac{u_n}{h}$ a une h-radiale φ_n, alors φ_n converge en norme-L^1 vers une fonction $\varphi \in L^1(g_h)$, qui est h-radiale de $\frac{u}{h}$.

Donnons immédiatement ici une *propriété fondamentale d'unicité*, que nous retrouverons aussi comme conséquence des remarques du $n°13$:

THEOREME 5. *Si u harmonique est h-indifférente, et si $\frac{u}{h}$ admet une h-radiale nulle* (pour un pôle y_0), *alors* $u=0$.

L'existence de la solution $H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{u}}$ entraîne celle de $H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{|u|}}$, et l'on a $|u| = |H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{u}}| \leq H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{|u|}}$; mais au point y_0, $H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{|u|}}(y_0) = \int \left| \left(\frac{u}{h}\right)_\lambda \right| dg_h \to 0$, donc la fonction harmonique ≥ 0 $H^{D^{\lambda,h}}_{\underset{*}{|u|}}$ tend vers 0 en tout point, d'où $u=0$.

12. Fonctions harmoniques positives

Il est intéressant d'étudier de plus près les fonctions harmoniques *positives* h-indifférentes; pour une telle u, la condition de h-indifférence équivaut à son invariance par extrémisation[1] sur tout domaine $D^{\lambda,h}$, d'où, grâce aux résultats

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

de [5] (th 20), le théorème suivant:

THEOREME 6. *Pour qu'une fonction u harmonique* >0 *dans* Ω *soit h-indifférente, il faut et il suffit que la mesure canonique associée à u ne charge que l'ensemble* Δ_h *des points-frontière faiblement h-réguliers* $\left(\text{c'est-à-dire en lesquels } \frac{G}{h} \to 0\right)$.

(On sait que $\Delta - \Delta_h$ est de h-mesure harmonique nulle sur Δ).

COROLLAIRE. *Pour que toute fonction harmonique* >0 *dans* Ω *soit h-indifférente, il faut et il suffit que tout point-frontière soit faiblement h-régulier, ou encore que tout domaine* $D^{\lambda,h}$ *soit relativement compact dans* Ω*; et alors toute fonction harmonique dans* Ω *est h-indifférente.*

Il est immédiat que les deux conditions de l'énoncé sont équivalentes et que si tout point-frontière est faiblement h-régulier, alors toute u harmonique >0 est h-indifférente, d'après le théorème.

Réciproquement, si toute fonction harmonique >0 (et en particulier minimale) est h-indifférente, le théorème montre encore que tout point *minimal* x_0 doit être faiblement h-régulier, puisque la masse $+1$ en x_0, associée à $K(x_0, y)$, minimale et h-indifférente, ne peut charger qu'un point où $\frac{G}{h} \to 0$. Pour un x_0 non minimal, on introduit la mesure canonique ν_{x_0} associée à la fonction harmonique >0 $K(x_0, y)$, et le potentiel-Θ de la mesure associée à h, soit U; on sait [5] que $U(x_0) = \int_{\Delta_1} U(x)\, d\nu_{x_0}(x)$, où chaque $U(x)$, $x \in \Delta_1$, vaut ici $+\infty$ $\left(= \liminf \frac{h}{G} \text{ au point } x\right)$; donc $U(x_0) = +\infty$ et aussi $\liminf \frac{h}{G}$ au point x_0, qui est à priori plus grande; donc x_0 est bien faiblement h-régulier. Enfin si tout $D^{\lambda,h}$ est relativement compact, toute u harmonique dans Ω y coincide avec sa solution, donc est h-indifférente.

Considérons maintenant une u harmonique >0 quelconque, et la solution $H_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda,h}}$ (qui existe toujours et minore u); quand $\lambda \to 0$, elle converge vers une fonction u^* harmonique ≥ 0, h-indifférente et moindre que u; si w est une quelconque fonction harmonique h-indifférente minorant u, on a $w = H_{\underset{*}{w}}^{D^{\lambda,h}} \leq H_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda,h}}$ pour tout λ, donc $w \leq u^*$, c'est-à-dire que *u^* est la plus grande minorante harmonique h-indifférente de u.*

Notons u_{Δ_h} la réduite[4] de u sur Δ_h; par le théorème 6, u_{Δ_h} est h-indifférente,

---

[4] La réduite v_e d'une fonction v surharmonique >0, relativement à un ensemble-

(*Continued on Page* 86)

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

donc $u_{\Delta_h} \leq u^* \leq u$, puis $(u_{\Delta_h})_{\Delta_h} \leq (u^*)_{\Delta_h} \leq u_{\Delta_h}$, soit $u_{\Delta_h} \leq u^* \leq u_{\Delta_h}$, donc $u^* = u_{\Delta_h}$.

Ainsi, dire que la mesure canonique associée à u ne charge pas Δ_h, ou que $u_{\Delta_h} = 0$, équivaut à dire que $H_{u_*}^{D^{\lambda,h}} \to 0$, $\lambda \to 0$, ou encore que $\frac{u}{h}$ a une h-radiale nulle pour tout pôle. Donc:

THEOREME 7. *Soit u harmonique >0 dans Ω. Pour que $\frac{u}{h}$ ait une h-radiale nulle, il faut et il suffit que la mesure canonique associée à u ne charge que l'ensemble $\Delta - \Delta_h$ des points-frontière non faiblement h-réguliers.*

COROLLAIRE. *Si $\frac{u}{h}$ a une h-radiale nulle, alors $\frac{u}{h}$ admet à la frontière une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Car dans ce cas $\inf(u, h)$ est un potentiel de Green, ce qui suffit ([5], th. 24).

Remarque. Le corollaire n'admet pas de réciproque; en chargeant de façon quelconque un ensemble h-négligeable de Δ_h, on peut obtenir une fonction w harmonique >0 h-indifférente, pour laquelle $\frac{w}{h}$ n'a donc pas de h-radiale nulle, tandis que par [5] (th. 24) $\frac{w}{h}$ a une pseudo-limite nulle sauf sur un ensemble h-négligeable. Prendre par exemple x_0 minimal $\in \Delta_h$, avec $\{x_0\}$ h-négligeable, et la fonction minimale $K(x_0, y)$.

Décomposition canonique des fonctions harmoniques >0.

D'après ce qui précède, toute u harmonique >0 peut s'écrire comme somme $u = u_{\Delta_h} + u_{\Delta-\Delta_h}$ d'une fonction u_{Δ_h} harmonique ≥ 0 h-indifférente et d'une fonction $u_{\Delta-\Delta_h}$ harmonique ≥ 0 dont le quotient par h a une h-radiale nulle, et l'enveloppe inférieure de ces deux fonctions est un potentiel de Green. Cette décomposition est unique, car si l'on peut écrire de façon analogue $u = u_1 + u_2$, on a nécessairement

$$0 \leq u_{\Delta_h} - u_1 = u_{\Delta-\Delta_h} - u_2,$$

et chaque différence doit être nulle comme représentant une fonction harmonique ≥ 0 h-indifférente et dont le quotient par h a une h-radiale nulle. On obtient ainsi une décomposition canonique du type de F. Riesz des fonctions harmoniques >0 dans Ω.

---

frontiere e, est l'enveloppe inférieure des fonctions surharmoniques ≥ 0 dont chacune majore v dans un voisinage de e. Elle est harmonique, et sa mesure associée ne charge que e; elle minore v, et croît avec v,

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press

13. Principe du maximum

Pour terminer ces applications, nous nous contenterons d'indiquer rapidement une forme très générale du *principe du maximum*, obtenue et largement développée par M. Brelot [2] dans le cas $h=1$.

THEOREME 8. *Soit u sousharmonique dans Ω, telle que:*

1) *pour tout $\lambda>0$ la solution $H_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda}, h}$ existe et majore u;*

2) $\dfrac{u^{+}}{h}$ *admet, pour le pôle y_0, une h-radiale nulle.*

Alors u est ≤ 0.

D'après la première hypothèse, la solution $H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}$ existe pour tout $\lambda>0$, et $u \leq H_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda}, h} \leq H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}$, de sorte que $u^{+} \leq H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}$. La seconde hypothèse signifie que $H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}(y_0) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, et comme cela est ≥ 0 croissant de $1/\lambda$, $H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}(y_0)=0$, donc $H_{\underset{*}{u^+}}^{D^{\lambda}, h}=0$ en tout point, et $u^{+}=0$.

Comme cas particulier, nous retrouvons bien la propriété fondamentale d'unicité démontrée au théorème 5.

Notons que la conclusion du théorème 8 subsiste si, sans imposer à priori l'existence de la solution $H_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda}, h}$, on suppose seulement que $\overline{H}_{\underset{*}{u}}^{D^{\lambda}, h}$ $\Big($égal en y_0 à $\int^{-}\left(\dfrac{u}{h}\right)_{\lambda} dg_h\Big)$ majore u pour λ assez petit, et que $\int^{-}\left(\dfrac{u^{+}}{h}\right)_{\lambda} dg_h \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$. Il est aussi intéressant de souligner la signification de ce théorème lorsque $h=K(x_0, y)$ est une fonction minimale de pôle $x_0 \in \Delta_1$. Cette étude sera reprise ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Brelot, Minorantes sousharmoniques, extrémales et capacités, Journal de Math., **24** (1945), p. 1-32.

[2] M. Brelot, Majorantes harmoniques et principe de maximum, Archiv. der Math., **5** (1954), p. 429-439.

[3] M. Brelot, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin, Journal de Math., **35** (1956), p. 297-335.

[4] M. Brelot et G. Choquet, Espaces et lignes de Green, Annales de l'Institut Fourier, **3** (1951), p. 199-263.

[5] L. (Lumer) Naim, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, Annales de l'Institut Fourier, **7** (1957), p. 183-281.

[6] L. Lumer-Naim, Sur une extension du principe de Dirichlet en espace de Green, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, **255** (1962), p. 1058-1060.

Université de Grenoble, France

et

University of Washington, Seattle, Washington

https://doi.org/10.1017/S0027763000011648 Published online by Cambridge University Press