Bull. Austral. Math. Soc.
Vol. 58 (1998) [189–198] 11G99

G-FONCTIONS ET COHOMOLOGIE DES HYPERSURFACES SINGULIÉRES II

Cristiana Bertolin

Following Dwork's indications, in this work we give a further elaboration and a list of corrections for the article "G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières". Moreover we extend the contents of that work to quasi-homogeneous polynomials.

Introduction

Soit f un polynôme homogène en les variables $x_1, \dots, x_{n+1}$ et à coefficients dans un corps de nombres, K. Dans [3] Dwork définit les modules exponentielles $\mathcal{K}^{(l)}$ associés à f et il démontre que si K est un corps de nombres alors pour presque tous les premiers p de K, l'action du Frobenius sur $\mathcal{K}^{(l)}$ est liée à la fonction Zêta de l'hypersurface définie par la réduction mod p de f. Cette théorie est intéressante dans le cas où $f = 0$ a des singularités.

Dans [1] on étudie $\mathcal{K}^{(l)}$ en tant que module différentiel dans le cas où K est le corps des fonctions rationnelles en une seule variable sur un corps de nombres. On démontre que $\mathcal{K}^{(l)}$ est un module de type G et on explicite une majoration effective de son rayon globale, $\rho(\mathcal{K}^{(l)})$, qui ne dépend pas de "l", mais seulement du polynôme f (voir [**1**, Théorème 4.2, Remarque 4.3]).

Suivant les indications de Dwork, dans ce travail on va apporter des approfondissements et des corrections à l'article [**1**]. Plus précisement, dans la première section on explique le contenu de [**1**]. Dans la deuxième on démontre en utilisant les résultats de [**1**], que même dans le cas où f est un polynôme quasi homogène le module différentiel $\mathcal{K}^{(l)}$, qui lui est associé, est un module de type G. Enfin dans la troisième section on donne une liste de corrections de [**1**].

L'auteur est reconaissante à Dwork pour les idées, l'aide et les conseils qu'il n'a jamais cessé de lui fournir.

0. Terminologie et notations

On utilise les notations de [1] (voir en particulier [**1**, Section 0]).

Received 15th December, 1997

1. Explication de l'article [1]

1.1. D'après [3] le complexe de koszul des opérateurs $\{D^*_{1,f}, \ldots, D^*_{n+1,f}\}$ agissant sur R^*, fournit des espaces de cohomologie de dimension finie. Cependant il se peut très bien que l'action du Frobenius ne soit pas définie sur ces espaces.

Puisqu'il existe une application naturelle $\mathcal{K}^{(l)} \hookrightarrow \mathcal{K}^{(l+1)}$, on peut définir $\mathcal{K}^{(\infty)}$ comme étant l'espace limite. On a

$$\mathcal{K}^{(\infty)} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{K}^{(l+1)} \supseteq \mathcal{K}^{(l)} \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{K}^{(1)}.$$

Si les coefficients de f sont indépendants de λ, c'est-à-dire s'ils appartiennent à K, alors $\mathcal{K}^{(\infty)}$ est contenu dans $L^*(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et pour presque toutes les valuations de K. Le complexe de koszul des opérateurs $\{D^*_{1,f}, \ldots, D^*_{n+1,f}\}$ agissant cette fois sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, fournit encore des espaces de cohomologie de dimension finie et pour presque tout premier p de K, la fonction Zêta de la variété torique définie par la réduction mod p de $f(x) = 0, x_1, \ldots, x_{n_1} \neq 0$, est calculée dans [3, Théorème 20.2], grâce à l'action du Frobenius sur ces espaces de cohomologie.

1.2. Dans [1] les coefficients du polynôme f appartiennent à $\mathrm{K}(\lambda)$, c'est-à-dire ils dépendent de λ. Il semble raisonnable de croire que le complexe de koszul des opérateurs $\{D^*_{1,f}, \ldots, D^*_{n+1,f}\}$ construits avec ce nouveau f et agissants sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, fournisse encore des espaces de cohomologie de dimension finie. Dans [1, Théorème 4.2, Remarque 4.3] on calcule une majoration explicite de $\rho\big(\mathcal{K}^{(l)}\big)$, qui est indépendante de "l". Mais alors non seulement le module différentiel $\mathcal{K}^{(l)}$ a un rayon global fini pour chaque $l \geqslant 1$, mais aussi $\mathcal{K}^{(\infty)}$, qui est un module "différentiel" sur $\mathrm{K}(\lambda)$ de dimension infinie, a un rayon globale fini, c'est-à-dire $\rho\big(\mathcal{K}^{(\infty)}\big) < +\infty$.

On est donc amené à croire que le module de dimension infinie, $\mathcal{K}^{(\infty)}$, se comporte comme un module de dimension finie $\mathcal{K}^{(l)}$ pour l assez grand. En particulier le complexe de koszul des opérateurs $\{D^*_{1,f}, \ldots, D^*_{n+1,f}\}$ agissants sur $\mathcal{K}^{(\infty)}$, pourrait être déterminé par celui des opérateurs $\{D^*_{1,f}, \ldots, D^*_{n+1,f}\}$ agissants sur $\mathcal{K}^{(l)}$ pour l assez grand. Ainsi on pourrait avoir des informations sur la fonction Zêta de la variété définie par la réduction mod p de $f(x) = 0,\ x_1, \ldots, x_{n_1} \neq 0$, à partir d'un espace de dimension finie.

2. Théorie des formes quasi homogènes

2.1. Soit $\widetilde{R} = \mathrm{K}(\lambda)[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Rappelons qu'un polynôme $g(X) \in \widetilde{R}$ est un *polynôme quasi homogène* sur $\mathrm{K}(\lambda)$ s'il existe un $(n+1)-$uplet $(d_1, \ldots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $g\Big(X_1^{d_1}, \ldots, X_{n+1}^{d_{n+1}}\Big)$ soit un polynôme homogène.

Théorème 2.2. *Soit $g(X)$ un polynôme quasi homogène sur $K(\lambda)$. Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module*

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} \Big/ \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}$$

muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial g}{\partial \lambda}$, est un module de type G.

Preuve: Par définition de $g(X)$, il existe $(d_1, \ldots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $g\left(X_1^{d_1}, \ldots, X_{n+1}^{d_{n+1}}\right)$ soit un polynôme homogène de degré noté d.
Soient $f(X) = g\left(X_1^{d_1}, \ldots, X_{n+1}^{d_{n+1}}\right)$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \widetilde{R} \Big/ \sum_{|v|=l} D_f^v \widetilde{R}$. Puisque $f(X) \in R_1$, on peut utiliser les arguments de [1] pour démontrer que pour chaque $l \geqslant 1$, $\mathcal{W}_f^{(l)}$ muni de la connection $\sigma_{\lambda,f} = \dfrac{\partial}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$, est un module de type G.
Maintenant pour chaque $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $0 \leqslant \alpha_i < d_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$, soit $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$ l'espace sur $\mathrm{K}(\lambda)$ engendré par X^u, où $u \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $u_i \equiv \alpha_i \bmod d_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$.
Puisque $\widetilde{R}(\vec{\alpha})$ est stable sous $\sigma_{\lambda,f}$ et $D_{i,f}$ pour $i = 1, \ldots, n+1$, on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}) = \widetilde{R}(\vec{\alpha}) \Big/ \sum_{|v|=l} D_f^v \widetilde{R}(\vec{\alpha}).$$

On observe que $\widetilde{R} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{R}(\vec{\alpha})$ et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)} = \bigoplus_{\vec{\alpha}} \widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha}).$$

Mais alors, puisque pour chaque $l \geqslant 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}$ est un module de type G, on trouve que pour chaque $\vec{\alpha}$ et chaque $l \geqslant 1$, $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(\vec{\alpha})$ est un module de type G.
Considérons maintenant l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \theta : \widetilde{R} &\longrightarrow \widetilde{R}^{(0)} \\ X^u &\longmapsto X_1^{u_1 d_1} \cdots X_{n+1}^{u_{n+1} d_{n+1}}. \end{aligned}$$

Il est évident que $\theta g = f$ et que $\theta \circ \sigma_g = \sigma_f \circ \theta$. Puisque $(1/d_i) E_i \circ \theta = \theta \circ E_i$ on a aussi que $d_i \theta \circ D_{i,g} = D_{i,f} \circ \theta$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Donc cet isomorphisme passe au quotient et on obtient que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ est isomorphe au module de type G $\widetilde{\mathcal{W}}_f^{(l)}(0)$. Par conséquent on peut conclure que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ est un module de type G pour chaque $l \geqslant 1$. $\square$

Corollaire 2.3. *Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$. De plus soit*

$$g(X_1, \dots, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n_2} X_{n_1+1+j} h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$$

où pour $j = 1, \dots, n_2$, $h^{(j)}(X_1, \dots, X_{n_1+1})$ est un polynôme homogène sur $K(\lambda)$ de degré μ_j en les $n_1 + 1$ variables $X_1, \dots, X_{n_1+1}$.
Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \widetilde{R} \Big/ \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}$$

muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial g}{\partial\lambda}$, est un module de type G.

Preuve: Conséquence immédiate du Théorème 2.2 car $g(X)$ est un polynôme quasi homogène. En effet il suffit de considérer le $(n+1)-$uplet $(1, \dots, 1, d - \mu_1, \dots, d - \mu_{n_2})$, où $d = \max_{1 \leqslant j \leqslant n_2} \mu_j$, pour le rendre homogène. ∎

2.4. Soit $g(X)$ un polynôme comme dans 2.3 et posons $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_{n_2}) \in \mathbb{N}^{n_2}$. Pour chaque $\beta \in \mathbb{N}$, soit $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ l'espace sur $\mathrm{K}(\lambda)$ engendré par X^u, où $u \in \mathbb{N}^{n+1}$ et $\sum_{i=1}^{n_1+1} u_i = \sum_{j=1}^{n_2} \mu_i u_{n_1+1+j} + \beta$.
Puisque $\widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ est stable sous $\sigma_{\lambda,g}$ et $D_{i,g}$ pour $i = 1, \dots, n+1$, on peut définir

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta) \Big/ \sum_{|v|=l} D_g^v \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta).$$

Corollaire 2.5. *Soit β tel que $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$ soit non nul. Alors pour chaque $l \in \mathbb{N} - \{0\}$, le module $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta)$ muni de la connection $\sigma_{\lambda,g} = \dfrac{\partial}{\partial\lambda} + \dfrac{\partial g}{\partial\lambda}$, est un module de type G. En particulier $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, 0)$ est un module de type G.*

Preuve: On observe que $\widetilde{R} = \bigoplus_\beta \widetilde{R}(\vec{\mu}, \beta)$ et donc

$$\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)} = \oplus_\beta \widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta).$$

On a alors $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) = 0$ pour presque tout β et lorsque $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}(\vec{\mu}, \beta) \neq 0$ c'est un module de type G, puisque d'après 2.3 $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(l)}$ l'est. ∎

2.6. Remarque: une version un peu modifiée de $\widetilde{\mathcal{W}}_g^{(1)}(\vec{\mu}, 0)$ est le sujet du livre [4].

3. Errata corrige de l'article [1]

p.358, (2.2.2): $g(X) = (X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2) + \cdots + (X_{n-1}^2 + X_{n-1}X_n + X_n^2) + X_{n+1}^2$.
p.359, (1.4.3): $\overline{N} = \binom{n+l}{n+1}N$ (il y a une erreur dans [**3**, Section 4]).
p.359, l.17: $\left\{ \sum_{u\in\mathcal{F}'} B_u(1/X^u) \mid B_u \in \Omega_0 \right\}$ où $\mathcal{F}' \overset{\text{déf}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \cdots + u_{n+1} \equiv 0 \bmod d\}$.
p.360, l.4: ... on doit substituer à l'ensemble $\mathcal{F}' \overset{\text{déf}}{=} \{u \in \mathbb{N}^{n+1} \mid u_1 + \cdots + u_{n+1} \equiv 0 \bmod d\}$, l'ensemble: ...
p.362, l.7: $D^*_{A,i,\infty} : L^*(b) \longrightarrow L^*(b)$.
p.362, l.27: $1/(p-1) < b \leqslant p/(p-1)$.
p.363, l.3: Dans notre contexte on ne peut pas utiliser [**2**, Lemme 3.10] car il utilise la compacité. Nous allons donc donner une autre démonstration de ce lemme.

Lemme 3.1. *Soient $c, b, e \in \mathbb{R}$ tels que $1/(p-1) < b \leqslant p/(p-1)$ et $e = b - 1/(p-1)$. Indiquons par S soit un sous ensemble propre de $\{1, \ldots, n+1\}$ soit $\{0, \ldots, n\}$. De plus soient $\{\xi_i\}_{i\in S}$ des éléments de $L(b,c)$ tels que $\sum_{i\in S} D_{A,i,\infty}\xi_i = 0$. Alors il existe des éléments $\{\eta_{i,j}\}_{i,j\in S}$ de $L(b, c+e)$, avec $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$, tels que*

$$\xi_i = \sum_{j\in S} D_{A,j,\infty}\eta_{i,j} \qquad \forall i \in S.$$

Preuve: Pour chaque $r \geqslant 0$, on va construire par récurrence une famille $\{\xi_i^{(r)}\}_{i\in S}$ d'éléments de $L(b, c+re)$ tels que $\sum_{i\in S} D_{A,i,\infty}\xi_i^{(r)} = 0$. Pour $r = 0$ posons $\xi_i^{(0)} = \xi_i \quad \forall i \in S$. Supposons maintenant que la famille $\{\xi_i^{(r)}\}_{i\in S}$ existe. Puisque $\sum_{i\in S} D_{A,i,\infty}\xi_i^{(r)} = 0$ on a $\sum_{i\in S} F_i\xi_i^{(r)} = -\sum_{i\in S} E_i\xi_i^{(r)} \in L(b, c+re)$. Grâce à [**2**, Lemme 3.8], on sait alors qu'il existe des éléments $\{\eta_i^{(r)}\}_{i\in S}$ de $L(b, c+(r+1)e)$ et des éléments $\{\eta_{i,j}^{(r)}\}_{i,j\in S}$ de $L(b, c+(r+1)e)$, avec $\eta_{i,j}^{(r)} = -\eta_{j,i}^{(r)}$ et $\eta_{i,i}^{(r)} = 0 \quad \forall i, j \in S$, tels que

$$\xi_i^{(r)} = \eta_i^{(r)} + \sum_{j\in S} F_j\eta_{i,j}^{(r)} \qquad \forall i \in S.$$

Définissons

$$\xi_i^{(r+1)} = \xi_i^{(r)} - \sum_{j\in S} D_{A,j,\infty}\eta_{i,j}^{(r)} \qquad \forall i \in S. \tag{3.1.1}$$

On observe que $\xi_i^{(r+1)} = \eta_i^{(r)} - \sum_{j\in S} E_j\eta_{i,j}^{(r)} \in L(b, c+(r+1)e)$ et que $\sum_{i\in S} D_{A,i,\infty}\xi_i^{(r+1)} = \sum_{i\in S} D_{A,i,\infty}\xi_i^{(r)} = 0$. On a donc vérifié que la famille $\{\xi_i^{(r+1)}\}_{i\in S}$ a bien toutes les propriétés requises. En écrivant (3.1.1) pour $r = 1, \dots, m$ et en additionnant toutes les égalités obtenues, on trouve que

$$\xi_i^{(m+1)} = \xi_i^{(0)} - \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty}\Big(\sum_{r=0}^{m} \eta_{i,j}^{(r)}\Big) \qquad \forall i \in S.$$

Maintenant si on fait tendre m à l'infini, $\xi_i^{(m+1)}$ tend vers 0 et $\sum\limits_{r=0}^{m} \eta_{i,j}^{(r)}$ converge dans $L(b, c+e)$ vers un élément qu'on notera $\eta_{i,j}$ et qui est tel que $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$. Par conséquent on obtient finalement

$$\xi_i = \sum_{j \in S} D_{A,j,\infty}\eta_{i,j} \qquad \forall i \in S$$

avec $\{\eta_{i,j}\}_{i,j \in S}$ éléments de $L(b, c+e)$ tels que $\eta_{i,j} = -\eta_{j,i}$ et $\eta_{i,i} = 0 \quad \forall i, j \in S$. □

p.364, l.8-10: $\dots E(b)$ est fermé dans $L_c(b)$ et donc $L_c(b)/E(b)$ est un espace vectoriel normé sur un corps complet. D'après [**1**, (1.7.8)] il est de dimension finie et par conséquent tout χ appartenant à $\mathrm{Hom}\big(L_c(b)/E(b), \Omega\big)$ est continu. Mais alors, puisque par définition de la topologie de $L_c(b)/E(b)$ l'application $\pi_{c,b}$ est continue, on peut conclure que pour chaque élément χ appartenant à $\mathrm{Hom}\big(L_c(b)/E(b), \Omega\big)$, $\chi \circ \pi_{c,b}$ est une fonction linéaire et continue sur $L_c(b)$.

p.366, l.13: $\{w^*_{u,i,A} = \sum\limits_{w \in \mathcal{F}_0} \big(1/\chi(A)\big)\big(G_{w,u,i}(A)/\big(R(A)\pi\big)^{w_0}\big)1/X^w\}_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N \\ 0 \leqslant |u| \leqslant l-1}}$

p.367, (2.3.2): $\mathcal{K}_{t_v}^{(l)} \subset L^*\big(\mathrm{ord}\, R(t_v) + \varepsilon\big) \qquad \forall \varepsilon > 0$.
Ceci signifie que si $\omega^*_{i,t_v} = \sum\limits_{u \in \mathcal{F}_0} B_u(1/X^u)$, alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{ord}\,(B_u) \geqslant -u_0\big(\varepsilon + \mathrm{ord}\, R(t_v)\big) - c_\varepsilon$.

p.368, l.9: $\mathrm{ord}\,(H_w B_{w+u}) \geqslant -c_\varepsilon + w_0\big(-\varepsilon + \mathrm{ord}\,(\lambda - t_v) - \mathrm{ord}\, R(t_v)\big) - u_0\big(\varepsilon + \mathrm{ord}\, R(t_v)\big)$.

p.370, l.26: $\lim\limits_{v \to \infty} B_v(\lambda, \Gamma) = 0$ $\Gamma-$adiquement car $B_v(\lambda, \Gamma) \in \Gamma^{v_0}\mathrm{K}(\lambda)[[\Gamma]]$.

p.371, l.2: $\sigma^*_\Gamma = \gamma_- \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial \Gamma} - \dfrac{\partial g}{\partial \Gamma}\right)$.

p.372, l.9-11: Munissons $\mathrm{K}(\lambda)$ de la norme de Gauss par rapport à λ et soit Ω la clôture algébrique de $\mathrm{K}(\lambda)$, munie d'une extension de la norme de $\mathrm{K}(\lambda)$.

p.372, l.14: $|\Gamma| \leqslant \big|\rho_0(\lambda, A^{(0)})\big|^{1+N^2} \big|\sigma_0(\lambda, A^{(0)})\big|$ où $\sigma_0(\lambda, A^{(0)})$ est le coefficient de Γ^τ dans $\chi(\lambda, \Gamma) \overset{\text{déf}}{=} \chi(\lambda, \Gamma, A^{(0)}) = \Gamma^\tau\big(\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) + \Gamma\sigma_1(\lambda, A^{(0)}) + \dots\big)$, avec $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$. (On change légèrement la spécialisation de A faite en [**1**, 3.1] en ajoutant la condition $\sigma_0(\lambda, A^{(0)}) \neq 0$.) En effet dans la démonstration de [**1**, 3.9] on a choisit α tel que $|\alpha| \leqslant 1$ et tel que $R(\lambda, \Gamma)$ n'ait pas de zéros dans le disque pointé $0 < |\Gamma| < |\alpha|$. Ceci signifie que le système $\dfrac{\partial}{\partial \Gamma} - G(\lambda, \Gamma) = 0$ peut avoir seulement des singularités triviales dans cette région. Cependant dans la quatrième partie de la démonstration de [**1**, A3] on a besoin qu'il n'y ait pas de singularités triviales dans ce disque pointé.

Pour résoudre ce problème, on choisit α tel que $\chi(\lambda,\Gamma)R(\lambda,\Gamma)$ n'ait pas de zéros dans le disque pointé $0<|\Gamma|<|\alpha|$. Avec cette nouvelle condition, l'assertion [**1**, (3.9.2)] reste vraie, mais il faut changer la conclusion de l'énoncé de [**1**, 3.9].

p.372, (3.9.1):
$$|h_{i,w,s}| \leqslant \frac{M(\varepsilon)}{\varepsilon^s\,\left|\rho_0(\lambda,A^{(0)})\right|^{s(1+N^2)}\,\left|\sigma_0(\lambda,A^{(0)})\right|^s}.$$

p.372, l.18 - p.373, l.3: La discussion sur les singularités du système $\dfrac{\partial}{\partial\Gamma}-G(\lambda,\Gamma)=0$ est un peu confuse. D'après [**1**, 1.8], les coefficients de $G(\lambda,\Gamma)$ appartiennent à $\mathrm{K}(\lambda)\big[\Gamma,1/(\chi(\lambda,\Gamma)R(\lambda,\Gamma))\big]$ et donc les singularités de $\dfrac{\partial}{\partial\Gamma}-G(\lambda,\Gamma)=0$ sont contenues dans l'ensemble des Γ_0 tels que le produit $\chi(\lambda,\Gamma_0)R(\lambda,\Gamma_0)$ soit nul. Soit Γ_0 tel que $\chi(\lambda,\Gamma_0)=0$ et $R(\lambda,\Gamma_0)\neq 0$. Alors Γ_0 doit être une singularité apparente, car si on choisit une nouvelle base de $\mathcal{W}^{(l)}$, on obtient un nouveau $\chi(\lambda,\Gamma)$ qui ne s'annule pas en Γ_0. Mais d'après [**3**, Lemme 9.1] on sait en plus que si $R(\lambda,\Gamma_0)\neq 0$, alors Γ_0 est une singularité triviale de $\dfrac{\partial}{\partial\Gamma}-G(\lambda,\Gamma)=0$. Par conséquent on peut conclure que les singularités non triviales du système $\dfrac{\partial}{\partial\Gamma}-G(\lambda,\Gamma)=0$ sont contenues dans l'ensemble des Γ_0 tels que $R(\lambda,\Gamma_0)=0$.

p.374, l.12: $\mathcal{K}^{(l)}_{\lambda,0}\subset L^*\big((1+e(1+N^2))\ \operatorname{ord}\rho_0(\lambda,A^{(0)})+e\ \operatorname{ord}\sigma_0(\lambda,A^{(0)})+\varepsilon\big)\ \forall\varepsilon>0$.

p.375, (3.13.1):
$$\rho(\mathcal{G}(\lambda))\leqslant\big(1+e(N^2+1)\big)\sum_{v\in\mathcal{P}_f}\log\frac{1}{\left|\rho_0(\lambda,A^{(0)})\right|_v}+e\sum_{v\in\mathcal{P}_f}\log\frac{1}{\left|\sigma_0(\lambda,A^{(0)})\right|_v}.$$

Lemme 3.2.

(3.2.1)
$$e\sum_{v\in\mathcal{P}_f}\log\frac{1}{\left|\sigma_0(\xi,A^{(0)})\right|_v}\leqslant\left(\sum_{s=1}^{n}\binom{n+sd}{n}\right)\cdot\binom{n+(n+1)d}{n}\left[\frac{1}{2}\log\left(\binom{n+d}{d-2}\frac{4(n+2d)}{d-1}\right)+\log(m+1)+h_\infty(f)\right].$$

Preuve: Dans [**1**, 4.1] on spécialise λ et Γ et on modifie la spécialisation $A^{(0)}$ de A, faite en [**1**, 3.1]. Pour majorer le terme $e\sum_{v\in\mathcal{P}_f}\log 1/\left|\sigma_0(\xi,A^{(0)})\right|_v$, on va ajouter trois conditions à ces spécialisations:

(1) $\sigma_0(\lambda,A^{(0)})\neq 0$,

(2) $\sigma_0(\xi, A^{(0)}) \neq 0$,
(3) $\sigma(\xi, \mu) \neq 0$.

D'après [4, Section 3] $\chi(\xi,\mu) = \prod_{s=1}^{n} b_s(\xi,\mu,A^{(0)})$ avec $b_s(\xi,\mu,A^{(0)}) = \mu^{\tau_s}\Big(\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \mu\sigma_1^{(s)}(\xi, A^{(0)}) + \dots\Big)$ où $\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \neq 0$ pour $s = 1,\dots,n$. On a donc

$$\sigma_0(\xi, A^{(0)}) = \prod_{s=1}^{n} \sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)}) \tag{3.2.2}$$

et par conséquent il nous suffit de trouver une bonne majoration de $\left|\sigma_0^{(s)}(\xi, A^{(0)})\right|_v$ pour $s = 1,\dots,n$. Considérons l'application surjective

$$\begin{aligned} \delta : W_s \otimes R_{s-1}^{n+1} &\longrightarrow R_s \\ (w, h_1, \dots, h_{n+1}) &\longmapsto w + \sum_{j=1}^{n+1} h_j g_j \end{aligned}$$

où W_s est le sous espace de R engendré par les mônomes X^u avec $u \in \mathbb{N}^{n+1}, u_1 + \dots + u_{n+1} = sd$ et $0 \leqslant u_k < d$ pour $k = 1,\dots,n+1$. Choisissons comme bases de W_s, R_{s-1}^{n+1} et R_s celles composées de mônomes. D'après [4, 3.2.1] $b_s(\xi,\mu,A^{(0)})$ est le déterminant de la sous matrice de rang maximale de la matrice Δ, qui représente δ par rapport aux bases que l'on a choisies. Par conséquent en utilisant les notations de [1, 4.1]

$$\sigma_0^{(s)}\Big(\xi, A^{(0)}\Big) = \sum_{\substack{J \subseteq I_s, \mathrm{card}\, J = \tau_s \\ J \cup J' = I_s, J \cap J' = \emptyset}} \Big(\wedge_{\alpha \in J'} \vec{\mathcal{X}}_\alpha\Big) \bigwedge \Big(\wedge_{\alpha \in J} \vec{\mathcal{Y}}_\alpha\Big)$$

où I_s est un ensemble de $M_s = \binom{n+sd}{n}$ éléments, $\vec{\mathcal{X}}_\alpha$ est un vecteur dont les coefficients sont 0,1 ou $u_i\left(\sum_{k=0}^{m} C_{u,k}\xi^k\right)$ pour tout $u \in \mathcal{F}$ et $\vec{\mathcal{Y}}_\alpha$ est un vecteur dont les coefficients sont $u_i A_u^{(0)}$ pour tout $u \in \mathcal{F}$. Maintenant en appliquant le Théorème d'Hadamard à ces $\binom{M_s}{\tau_s}$ déterminants, on obtient grâce à [1, (4.2.3) et (4.2.4)]

$$\begin{aligned} &\sum_{v \in \mathcal{P}_\infty} \log \left|\sigma_0^{(s)}\Big(\xi, A^{(0)}\Big)\right|_v \\ &\quad\leqslant \log \binom{M_s}{\tau_s} + \frac{M_s}{2} \log\left(\binom{n+d}{d-2} \frac{(n+2d)}{d-1}\right) + (M_s - \tau_s)\Big(\log(m+1) + h_\infty(f)\Big) \\ &\quad\leqslant M_s\left[\frac{1}{2}\log\left(\binom{n+d}{d-2}\frac{4(n+2d)}{d-1}\right) + \log(m+1) + h_\infty(f)\right] \end{aligned}$$

et donc grâce à (3.2.2), on trouve la majoration (3.2.1). ∎

p.376, (4.2.1): $\rho(\mathcal{G}(\lambda)) \leqslant d^{2n\binom{n+(n+1)d}{n}^2}\Big[(3/2)\log\Big(\binom{n+d}{d-2}(4(n+2d)/(d-1))\Big)$ $+(3/4)\Big(\log(m+1)+h_\infty(f)\Big)\Big]+\Big(\sum_{s=1}^{n}\binom{n+sd}{n}\Big)\binom{n+(n+1)d}{n}\Big[\log\Big(\binom{n+d}{d-2}(4(n+2d)/(d-1))\Big)$ $\Big/2+\log(m+1)+h_\infty(f)\Big]$.

Remarque 3.3: même après avoir ajouté le terme $e\sum_{v\in\mathcal{P}_f}\log 1/\left|\sigma_0\left(\lambda, A^{(0)}\right)\right|_v$, notre majoration du rayon global de $\mathcal{K}^{(l)}, \rho(\mathcal{G}(\lambda))$, reste toujours indépendante de "l".

3.4. On termine cette section en donnant la démonstration d'une formule qu'on a utilisée dans [**1**, p.377, l.10].

Lemme 3.5.

$$\sum_{u\in\mathcal{F}} u_i^2 = \binom{n+d}{d-2}\frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

Preuve: On observe que

$$\sum_{u\in\mathcal{F}} u_i^2 = d^2+(d-1)^2 n+(d-2)^2\binom{n+1}{2}+\cdots+1^2\binom{n+d-2}{n-1}. \tag{3.5.1}$$

De plus si $\delta = t\dfrac{d}{dt}$,

$$\delta^2\left(\frac{1}{1-t}\right)=\delta^2\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2t^i=\delta\left(\frac{t}{(1-t)^2}\right)=\frac{t}{(1-t)^2}+\frac{2\,t^2}{(1-t)^3}.$$

Par conséquent

(3.5.2)

$$\frac{1}{(1-t)^n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}i^2t^i\right)=\frac{t}{(1-t)^{n+2}}+\frac{2\,t^2}{(1-t)^{n+3}}=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\binom{n+l}{l-1}+2\binom{n+l}{l-2}\right]t^l.$$

Au contraire, en faisant directement les calculs

$$\frac{1}{(1-t)^n}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}i^2t^i\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\sum_{j+i=l}\binom{n-1+j}{j}i^2\right)t^l. \tag{3.5.3}$$

Mais alors grâce à (3.5.2) et (3.5.3)on trouve que pour chaque $l\geqslant 0$

$$\binom{n+l}{l-1}+2\binom{n+l}{l-2}=\sum_{j+i=l}\binom{n-1+j}{j}i^2 \tag{3.5.4}$$

et donc d'après (3.5.1) et (3.5.4) on peut finalement conclure que

$$\sum_{u\in\mathcal{F}} u_i^2=\binom{n+d}{d-1}+2\binom{n+d}{d-2}=\binom{n+d}{d-2}\frac{(n+2d)}{(d-1)}.$$

$\square$

https://doi.org/10.1017/S0004972700032160 Published online by Cambridge University Press

Bibliographie

[1] C. Bertolin, 'G-fonctions et cohomologie des hypersurfaces singulières', *Bull. Austral. Math. Soc.* **55** (1997), 353–383.

[2] B. Dwork, 'On the Zeta function of a hypersurface', *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **12** (1962), 5–68.

[3] B. Dwork, 'Zeta function of a hypersurface III', *Ann. Math.* **83** (1966), 457–519.

[4] B. Dwork, *Generalized hypergeometric functions*, Oxford Science Publications (Oxford University Press, New York, 1990).

Institut de Mathématiques, case 247
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu - F-75252
Paris, Cedex 05
France
e-mail: bertolin@riemann.math.jussieu.fr