Recherches sur l'Enveloppe des Pédales des divers points d'une Circonférence par rapport à un triangle inscrit.

Par M. EDOUARD COLLIGNON,

Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite.

CHAPITRE I.

Mise en équation du problème à résoudre.

FIGURE 1.

I. Soit ABC un triangle inscrit dans une circonférence donnée, qui a pour centre le point O, et pour rayon R la quantité OA. Si d'un point M pris sur la circonférence on abaisse les perpendiculaires ML, MN, MR sur les côtés BC, CA, AB du triangle, les pieds L, N, R de ces perpendiculaires sont situés sur une même droite RN, à laquelle on a donné le nom de *pédale* du point M ; le point M est le point *directeur* de la pédale RN.

Cette proposition, qui est due à William Wallace, est attribuée par Poncelet, sur la foi de Servois, à Robert Simson. Poncelet, dans son ouvrage sur les *Propriétés projectives des figures*, l'a généralisée, en substituant aux projections orthogonales ML, . . . du point M sur les côtés, des projections obliques faisant le même angle avec les trois côtés du triangle.

A chaque position du point directeur correspond une pédale particulière, et l'ensemble de ces pédales dessine, quand on fait mouvoir le point M, une courbe enveloppe que nous allons chercher à déterminer.

Nous définirons la position du point M par l'angle $\text{MAC} = \theta$, que la droite AM, issue du point A, fait avec l'un des côtés AC du triangle donné. Cet angle se retrouve en CBM, en NRM, et si du point A nous abaissons AP perpendiculaire sur la pédale, nous le retrouvons encore en PAB.

Appelons α l'angle OAB, β l'angle OAC, que font les côtés AB, AC avec le rayon AO du cercle circonscrit. Nous aurons

$$\text{BAC} = \alpha + \beta, \quad \text{MAA}' = \beta - \theta, \quad \text{MAB} = \alpha + \beta - \theta.$$

Nous ferons $\text{AP} = p$, distance de la pédale au sommet A.

https://doi.org/10.1017/S001309150003296X Published online by Cambridge University Press

L'angle AMA′, inscrit dans la demi-circonférence, est droit, et l'on a

$$\mathrm{AM} = \mathrm{AA'}\cos \mathrm{A'AM} = 2\mathrm{R}\cos(\beta - \theta).$$

Projetons AM sur les côtés AB, AC en abaissant les perpendiculaires MR, MN ; il vient

$$\mathrm{AR} = \mathrm{AM}\cos \mathrm{MAB} = 2\mathrm{R}\cos(\beta - \theta)\cos(\alpha + \beta - \theta),$$

$$\mathrm{AN} = \mathrm{AM}\cos \mathrm{MAC} = 2\mathrm{R}\cos(\beta - \theta)\cos\theta.$$

La distance $\mathrm{AP} = p$ du sommet A à la pédale est la projection sur AP de AR ou de AN, et l'on a

$$(1) \qquad p = \mathrm{AR}\cos \mathrm{PAR} = 2\mathrm{R}\cos\theta\cos(\beta - \theta)\cos(\alpha + \beta - \theta).$$

Cette équation représente, *en coordonnées polaires*, le lieu des points P ; elle est aussi, *en coordonnées podaires*, l'équation de l'enveloppe de la pédale, perpendiculaire au rayon p. Dans ce dernier système de coordonnées, la distance $\mathrm{P}\mu$ du pied P du rayon vecteur AP au point μ où la pédale touche son enveloppe est donnée par la relation

$$(2) \qquad \mathrm{P}\mu = \frac{dp}{d\theta}.$$

Pour passer de là aux coordonnées rectangulaires rapportées à deux axes AX, AY, projetons sur ces axes le contour $\mathrm{AP}\mu$ Il viendra

$$(3) \qquad \begin{cases} x = p\cos\theta - \dfrac{dp}{d\theta}\sin\theta \\[2ex] y = p\sin\theta + \dfrac{dp}{d\theta}\cos\theta \end{cases}$$

équations qui, prises simultanément, représentent l'enveloppe cherchée. On aurait l'équation cartésienne de la courbe en éliminant θ entre les deux équations (3).

A ces relations on peut joindre l'équation

$$(4) \qquad \rho = p + \frac{d^2p}{d\theta^2}$$

qui fait connaître le rayon de courbure. Le problème revient à former les dérivées de p par rapport à l'angle θ.

II. *Formation des dérivées et construction de la courbe.*

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(5) \qquad u = \cos\theta\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta)$$
$$= \cos\theta\cos\phi\cos\psi,$$

en posant $p = 2\text{R}u$, $\phi = \beta - \theta$, $\psi = \alpha + \beta - \theta$.

Il résulte de ces deux dernières relations que l'on a

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\psi}{d\theta} = -1.$$

La première dérivation donne

$$(6) \quad \frac{du}{d\theta} = -\sin\theta\cos\phi\cos\psi + \cos\theta\sin\phi\cos\psi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi$$
$$= -\sin\theta\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta) + \cos\theta\sin(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta)$$
$$+ \cos\theta\cos(\beta-\theta)\sin(\alpha+\beta-\theta)$$
$$= \cos\theta[\sin(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta) + \cos(\beta-\theta)\sin(\alpha+\beta-\theta)]$$
$$- \sin\theta\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta)$$
$$= \cos\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta) - \sin\theta\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta).$$

Les seconds membres des équations (5) et (6) peuvent se développer en substituant des sommes de lignes trigonométriques aux produits indiqués. On a identiquement

$$\cos\phi\cos\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\phi+\psi) + \cos(\phi-\psi)]$$

et par conséquent

$$u = \cos\theta\cos\phi\cos\psi$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos\theta\cos(\phi+\psi) + \cos\theta\cos(\phi-\psi)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[\cos(\theta+\phi+\psi) + \cos(\theta+\phi-\psi) + \cos(\theta-\phi+\psi) + \cos(\theta-\phi-\psi)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[\cos(\alpha+2\beta-\theta) + \cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\beta-3\theta)].$$

On en déduit, en différentiant,

$$\frac{du}{d\theta} = \tfrac{1}{4}[\sin(\alpha+2\beta-\theta) + \sin(\alpha-\theta) - \sin(\alpha+\theta) + 3\sin(\alpha+2\beta-3\theta)]$$

et sous cette forme la seconde dérivation s'opère immédiatement, et conduit à un résultat simple. On a en effet

$$(7) \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\tfrac{1}{4}[\cos(\alpha+2\beta-\theta) + \cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta)$$
$$+ \cos(\alpha+2\beta-3\theta)] - 2\cos(\alpha+2\beta-3\theta)\,;$$

car le terme final de la première dérivée

$$+\tfrac{3}{4}\sin(\alpha+2\beta-3\theta)$$

donne par la dérivation

$$-\tfrac{9}{4}\cos(\alpha+2\beta-3\theta)=-(2+\tfrac{1}{4})\cos(\alpha+2\beta-3\theta).$$

La parenthèse du second membre de l'équation (7) reproduit la valeur de u changée de signe. On a donc

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=-2\cos(\alpha+2\beta-3\theta),$$

et en multipliant les deux membres par 2R, on trouve pour la valeur du rayon de courbure

$$\begin{aligned}(8)\qquad \rho&=p+\frac{d^2p}{d\theta^2}\\ &=2\mathrm{R}\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\\ &=-4\mathrm{R}\cos(\alpha+2\beta-3\theta).\end{aligned}$$

Les valeurs de u et de $\dfrac{du}{d\theta}$, multipliées de même par 2R, font connaître les expressions de x et de y ; il vient

$$\begin{aligned}(9)\qquad x&=2\mathrm{R}\left(u\cos\theta-\frac{du}{d\theta}\sin\theta\right)\\ &=2\mathrm{R}\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta)-2\mathrm{R}\sin\theta\cos\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta)\\ &=\frac{\mathrm{R}}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+2\cos\alpha+2\cos(\alpha+2\beta-2\theta)\\ &\qquad -\cos(\alpha+2\beta-4\theta)]\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10)\qquad y&=2\mathrm{R}\left(u\sin\theta+\frac{du}{d\theta}\cos\theta\right)\\ &=2\mathrm{R}\cos^2\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta)\\ &=\frac{\mathrm{R}}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+2\sin(\alpha+2\beta-2\theta)+\sin(\alpha+2\beta-4\theta)].\end{aligned}$$

Suivant les cas, il y aura lieu d'adopter l'une ou l'autre de ces formes.

1°. Reprenons les expressions de x et de y :

$$(9)\qquad x=2\mathrm{R}\cos(\beta-\theta)\cos(\alpha+\beta-\theta)-2\mathrm{R}\sin\theta\cos\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta),$$

$$(10)\qquad y=2\mathrm{R}\cos^2\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta).$$

FIGURE 2.

Nous remarquerons que le premier terme de la valeur de x est l'abscisse $AR = x'$ du pied R de la pédale sur le côté AB pris pour axe des abscisses. Si nous projetons le point μ en μ' sur ce même axe, nous aurons

$$\mu' R = x' - x = 2R\sin\theta\cos\theta\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta),$$
$$\mu'\mu = y \qquad = 2R\cos^2\theta\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta).$$

Elevons au carré, et ajoutons ; nous aurons

$$\overline{R\mu}^2 = 4R^2(\cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta)\sin^2(\alpha + 2\beta - 2\theta)$$
$$= 4R^2\cos^2\theta\sin^2(\alpha + 2\beta - 2\theta)$$

et, en extrayant la racine,

$$(11) \qquad R\mu = 2R\cos\theta\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta),$$

quantité facile à construire.

L'angle MOA' est égal à $2OAM = 2(\beta - \theta)$, et si l'on prolonge le rayon MO jusqu' en m, l'angle OHB, extérieur au triangle AOH, est la somme des deux angles intérieurs α et $2(\beta - \theta)$; c'est à dire, est égal à $\alpha + 2\beta - 2\theta$. Si donc on achève le triangle Mmm', dans lequel l'angle en m' est droit, puisque Mm est un diamètre, on aura

$$Mm' = Mm\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta) = 2R\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta)$$

et $$R\mu = Mm'\cos\theta.$$

Il suffit donc de faire glisser, de la quantité $m'R$, la corde $m'M$ pour amener le point M en un point m'', qui, projeté sur la pédale RN, fera connaître le point de contact μ.

FIGURE 3.

Appliquée au cas particulier où le point directeur M coïncide avec le sommet C, la pédale se confond avec la hauteur CR' et la construction se résume dans le prolongement de CR' en R'', et dans le transport du segment R'R'' en $C\mu''$; et il n'y a pas à projeter, puisqu'ici l'angle θ est nul.

Appliquée au point M placé en A' à l'extrémité du diamètre AOA', la construction revient à projeter le point A' sur la pédale, qui est alors le côté BC lui-même, ce qui donne en m la position correspondante du point de contact ; les trois droites A'C, A'B, $A'm$ sont les perpendiculaires abaissées de A' sur les trois côtés, et la dernière a pour pied le point où CB touche la courbe enveloppe.

Passons à la construction du rayon de courbure ρ.

La valeur de ce rayon de courbure peut se déduire de l'expression de l'ordonnée, en la différentiant. On a en effet

$$ds = \rho d\theta$$

et l'arc ds, projeté sur l'axe AY, donne la différentielle dy.
Or l'angle de ds avec AY est égal à l'angle θ de AP avec AX, et l'on a

$$ds \cos\theta = dy = \rho \cos\theta \, d\theta$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{dy}{\cos\theta \, d\theta} .$$

Mais $y = 2\mathrm{R}\cos^2\theta \sin(\alpha + 2\beta - 2\theta)$
et par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= -4\mathrm{R}\cos\theta\sin\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta) - 4\mathrm{R}\cos^2\theta\cos(\alpha+2\beta-2\theta)\\ &= -4\mathrm{R}\cos\theta[\sin(\alpha+2\beta-2\theta)\sin\theta + \cos(\alpha+2\beta-2\theta)\cos\theta]\\ &= -4\mathrm{R}\cos\theta\cos(\alpha+2\beta-3\theta),\end{aligned}$$

$$(12) \quad \rho = \frac{dy}{\cos\theta \, d\theta} = -4\mathrm{R}\cos(\alpha+2\beta-3\theta),$$

c'est à dire notre équation (8).

Le signe de la formule définit, comme à l'ordinaire, le sens dans lequel la valeur absolue de ρ doit être portée sur la normale ; le rayon ρ doit, en définitive, être toujours porté du côté de la concavité de la courbe. Nous nous occuperons ici exclusivement de sa valeur absolue.

FIGURE 4.

Soit MAC l'angle θ. Prenons le milieu I de l'arc CM et portons l'arc MI' = MI. Si nous joignons au centre O le point I', l'angle MOI' sera égal à θ, et l'angle MOA' étant égal à $2(\beta - \theta)$, l'angle I'OA' sera égal à $2\beta - 3\theta$.

L'angle OKB, extérieur au triangle OAK, sera égal à
$\alpha + \mathrm{AOI}_1' = \alpha + 2\beta - 3\theta$,
et par conséquent, pour obtenir le produit $2\mathrm{R}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta)$,
il suffit de mener par I_1' la droite $\mathrm{I}_1'\mathrm{I}_2'$ parallèle à AB,
et de joindre $\mathrm{I}'\mathrm{I}_2'$.

L'angle $I_1'I_2'I'$ sera droit, et l'on aura

$$I_1'I_2' = 2R\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta).$$

Donc on a, en valeur absolue, $\rho = 2I_1'I_2'$.

En résumé la corde Mm' conduit à la détermination du point de contact μ, et la corde $I_1'I_2'$, doublée, donne la valeur absolue du rayon de courbure au point correspondant au point M.

III. *Détermination directe du point de contact μ.*

FIGURE 5.

Soit RN la pédale du point M ; R'N' la pédale du point M' infiniment voisin ; μ le point où se coupent ces deux pédales consécutives.

Appliquons au triangle ARN, coupé par la droite R'N' le théorème des transversales. Nous aurons

$$\frac{AN'}{N'N} \times \frac{N\mu}{\mu R} \times \frac{RR'}{AR'} = 1.$$

Dans cette égalité NN' est la différentielle du segment AN prise avec le signe $-$; car $AN' = AN - NN'$. De même RR' est la différentielle du segment AR prise avec son signe. On a donc

$$\frac{AN + dAN}{-dAN} \times \frac{N\mu}{\mu R} \times \frac{dAR}{AR + dAR} = 1.$$

Les infiniment petits dAN, dAR sont négligeables devant les quantités finies AN, AR, et il vient à la limite, en résolvant par rapport à $\frac{\mu R}{N\mu}$,

$$\frac{\mu R}{N\mu} = -\frac{dAR}{AR} \times \frac{AN}{dAN} = -\frac{\left(\frac{dAR}{AR}\right)}{\left(\frac{dAN}{AN}\right)},$$

de sorte que le rapport des distances du point μ aux extrémités R et N de la pédale, est égal au rapport changé de signe des dérivées logarithmiques des côtés AR, AN adjacents à ces distances.

Nous avons trouvé plus haut

$$AR = 2R\cos(\beta - \theta)\cos(\alpha + \beta - \theta),$$
$$AN = 2R\cos(\beta - \theta)\cos\theta ;$$

on en déduit, en prenant les différentielles logarithmiques des deux membres,

$$\frac{d\mathrm{AR}}{\mathrm{AR}}=\frac{\sin(\beta-\theta)d\theta}{\cos(\beta-\theta)}+\frac{\sin(\alpha+\beta-\theta)d\theta}{\cos(\alpha+\beta-\theta)},$$

$$\frac{d\mathrm{AN}}{\mathrm{AN}}=\frac{\sin(\beta-\theta)d\theta}{\cos(\beta-\theta)}-\frac{\sin\theta d\theta}{\cos\theta},$$

et par conséquent

$$\frac{\mu\mathrm{R}}{\mathrm{N}\mu}=-\frac{\dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\cos(\beta-\theta)}+\dfrac{\sin(\alpha+\beta-\theta)}{\cos(\alpha+\beta-\theta)}}{\dfrac{\sin(\beta-\theta)}{\cos(\beta-\theta)}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=-\frac{\cos\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta)}{\cos(\alpha+\beta-\theta)\sin(\beta-2\theta)};$$

le facteur $\cos(\beta-\theta)$ disparaît aux deux termes de la fraction.

Si l'on multiplie haut et bas par 2R, on retrouve au numérateur la valeur de μR déterminée plus haut

$$\mu\mathrm{R}=2\mathrm{R}\cos\theta\sin(\alpha+2\beta-2\theta);$$

par suite le dénominateur donne l'égalité

$$\mathrm{N}\mu=-2\mathrm{R}\cos(\alpha+\beta-\theta)\sin(\beta-2\theta).$$

Cette seconde formule est l'application pure et simple de la première, lorsqu'on permute ensemble les côtés AB et AC, ainsi que les angles et les segments correspondants.

Pour obtenir le point μ, nous avons fait usage de la perpendiculaire MR, abaissée du point M sur le côté AB du triangle; la construction nous a conduit à un point m qui se projette sur la pédale au point μ. On aurait pu opérer de même sur les perpendiculaires MN ou ML, abaissées sur les autres côtés; on aurait trouvé des points n, l, qui se seraient projetés sur la pédale au même point μ. Les trois points m, n, l sont donc en ligne droite, sur une perpendiculaire à la pédale, et l'on a ce théorème :

FIGURE 6.

Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle O ; M un point pris arbitrairement sur la circonférence. On abaisse les perpendiculaires de ce point sur les trois côtés MN, ML, MR ; on prend ensuite sur ces perpendiculaires les segments

$$\mathrm{M}l=\mathrm{LL}'',\ \ \mathrm{M}m=\mathrm{RM}'',\ \ \mathrm{M}n=\mathrm{NN}''.$$

Les trois points l, m, n *seront sur une même droite perpendiculaire à la pédale* RLN, *et la coupant au point de contact* μ *de la pédale avec son enveloppe.*

CHAPITRE II.

Discussion de la Courbe.

FIGURE 7.

I. La somme $\alpha+2\beta$, qui figure dans nos formules, se ramène aux angles du triangle donné. Soient α, β, γ les angles formés par les côtés du triangle avec les rayons du cercle circonscrit menés aux sommets. Nous aurons

$$\alpha+\beta=\mathrm{A},\quad \beta+\gamma=\mathrm{C},\quad \gamma+\alpha=\mathrm{B}\,;$$

d'où l'on déduit

$$\alpha=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2},\quad \beta=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2},\quad \gamma=\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}$$

et par suite

$$\alpha+2\beta=\frac{3\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}.$$

L'équation (12) devient, quand on y substitue cette valeur de $\alpha+2\beta$

$$\rho=-4\mathrm{R}\cos\left(\frac{3\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}-3\theta\right). \tag{13}$$

Le rayon de courbure ρ, pris en valeur absolue, varie entre les limites 0 et 4R. Examinons les deux limites extrêmes.

1°. Le rayon de courbure est nul lorsque l'on a

$$\frac{3\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}-3\theta=\frac{\pi}{2},\ \text{ou}\ \frac{3\pi}{2},\ \text{ou}\ \frac{5\pi}{2},$$

ce qui donne pour θ trois valeurs successives :

$$\begin{aligned}
\theta_1&=\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{6}-\frac{\pi}{6} & \\
& & \text{diff. } \frac{\pi}{3},\\
\theta_2&=\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{6}-\frac{\pi}{2} & \\
& & \text{diff. } \frac{\pi}{3},\\
\theta_3&=\frac{\mathrm{A}}{2}+\frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{6}-\frac{5\pi}{6}, &
\end{aligned}$$

dont les différences sont égales à $\frac{\pi}{3}$. Les directions correspondantes, issues du sommet A, coupent la circonférence aux sommets d'un triangle équilatéral.

https://doi.org/10.1017/S001309150003296X Published online by Cambridge University Press

Nous pouvons remplacer dans la première équation la demi-circonférence π par la somme $A+B+C$ des trois angles. Il viendra

$$\theta_1 = \frac{A}{2} + \frac{C-B}{6} - \frac{A+B+C}{6} = \frac{A-B}{3}.$$

FIGURE 8.

Par le sommet C menons la corde CC′ parallèle au côté opposé BA ; cette droite intercepte sur la circonférence un arc CC′ qui correspond à un angle au centre égal à $2(B-A)$. Si donc on prend $CM_1 = \frac{1}{3}CC'$ sur la circonférence, on aura pour l'angle inscrit CAM_1 la valeur $\frac{B-A}{3}$, et en tenant compte du signe, on retrouve l'équation

$$\theta_1 = \frac{A-B}{3}.$$

Le point M_1 est donc l'un des sommets du triangle équilatéral pour lequel on aura $\rho = 0$. Les autres sommets s'obtiendront en achevant le triangle équilatéral, ou en opérant pour les sommets A et B comme nous venons de le faire pour le sommet C.

2°. On aura $\rho = 4R$, valeur maximum du rayon de courbure, en posant

$$\frac{3A+C-B}{2} - 3\theta = 0, \text{ ou } \pi, \text{ ou } 2\pi,$$

ce qui définit trois directions distinctes

$$\begin{aligned} \theta_1' &= \frac{A}{2} + \frac{C-B}{6} \\ & \qquad\qquad \text{diff. } \frac{\pi}{3}, \\ \theta_2' &= \frac{A}{2} + \frac{C-B}{6} - \frac{\pi}{3} \\ & \qquad\qquad \text{diff. } \frac{\pi}{3}, \\ \theta_3' &= \frac{A}{2} + \frac{C-B}{6} - \frac{2\pi}{3}; \end{aligned}$$

elles sont les bissectrices des angles formés par les rayons θ_1, θ_2, θ_3, et déterminent sur la circonférence un second triangle équilatéral, dont les sommets sont au milieu des arcs soustendus par les côtés du premier.

Les triangles équilatéraux $M_1M_2M_3$ et $M_1'M_2'M_3'$, aux sommets desquels on a, soit $\rho = 0$, soit $\rho = 4R$, sont les triangles-limites vers lesquels tendent les triangles successifs que l'on déduit du triangle ABC, en prenant pour sommets les milieux des arcs soustendus par ses côtés, et en répétant indéfiniment la même opération sur chacun des nouveaux triangles ainsi obtenus. Le triangle $M_1M_2M_3$ est le triangle équilatéral qui diffère le moins, comme position, du triangle donné. On trouvera une étude détaillée de cette question géométrique dans le Recueil des Mémoires de l'Association française pour l'avancement des sciences, Congrès d'Oran, 1888 : *Sur certaines séries numériques.*

L'application de la méthode graphique de recherche du rayon de courbure aux points M_1 et M_1' conduit à tracer pour M_1 le diamètre du cercle perpendiculaire à AB, ce qui annule la corde $I_1'I_2'$ et montre que $\rho=0$; pour M_1' on serait amené à tracer le diamètre parallèle à AB ; c'est ce diamètre qui devient la corde $I_1'I_2'$ et l'équation générale $\rho=2I_1'I_2'$ équivaut alors à $\rho=4R$.

Cherchons encore les valeurs du rayon de courbure, lorsque le point directeur M coïncide avec un des sommets du triangle, puis lorsqu'il coïncide avec l'un des points diamétralement opposés à ces sommets sur la circonférence circonscrite.

FIGURE 9.

1°. Au sommet C on a $\theta=0$ et

$$\rho=-4R\cos(\alpha+2\beta).$$

Le point I′ coïncide alors avec le point C et le diamètre $I'I_1'$ devient ici CI_1', qui fait l'angle $\alpha+2\beta$ avec le côté AB. Le rayon de courbure est le double de la corde $I_1'I_2'$, parallèle à AB, et l'on a en valeur absolue $\qquad \rho=2I_1'I_2'.$

Ce rayon de courbure est applicable à l'enveloppe au point μ, qui est situé sur la hauteur CR, prolongée de la quantité $C\mu=I_2'R$.

FIGURE 10.

2°. Au point A′, diamétralement opposé au sommet A, on a $\theta=\beta$ et l'équation donne

$$\rho=-4R\cos(\alpha-\beta).$$

La pédale correspondante est le côté CB, et le point de contact est au pied μ de la perpendiculaire abaissée du point A′ sur ce côté. Soit I le milieu de l'arc CA′; prenons $A'I_1=A'I$; menons le diamètre I_1I_1', et par le point I_1' menons la corde $I_1'I_2'$ parallèle à AB; nous aurons en valeur absolue

$$\rho=2I_1'I_2',$$

ce qui vérifie la formule.

II. *Les trois points de rebroussement μ_1, μ_2, μ_3 de la courbe enveloppe sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

Nous avons obtenu plus haut les deux équations générales

$$(9)\quad x=\frac{R}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+2\cos\alpha+2\cos(\alpha+2\beta-2\theta)-\cos(\alpha+2\beta-4\theta)],$$

$$(10)\quad y=\frac{R}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+2\sin(\alpha+2\beta-2\theta)+\sin(\alpha+2\beta-4\theta)];$$

substituons à θ les valeurs θ_1, θ_2, θ_3 qui annulent le rayon de courbure. Il viendra pour les coordonnées des points μ_1, μ_2, μ_3, savoir

$$\text{pour}\quad \theta=\theta_1=\frac{\alpha+2\beta}{3}-\frac{\pi}{6},\quad \text{point } \mu_1:$$

$$x_1=\frac{R}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+2\cos\alpha-3\sin\theta_1],$$

$$y_1=\frac{R}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+3\cos\theta_1];$$

$$\text{pour}\quad \theta=\theta_2=\frac{\alpha+2\beta}{3}-\frac{\pi}{2},\quad \text{point } \mu_2:$$

$$x_2=\frac{R}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+2\cos\alpha+3\sin\theta_2],$$

$$y_2=\frac{R}{2}[\sin(\alpha+2\beta)-3\cos\theta_2];$$

$$\text{pour}\quad \theta=\theta_3=\frac{\alpha+2\beta}{3}-\frac{5\pi}{6},\quad \text{point } \mu_3:$$

$$x_3=\frac{R}{2}[\cos(\alpha+2\beta)+2\cos\alpha-3\sin\theta_3],$$

$$y_3=\frac{R}{2}[\sin(\alpha+2\beta)+3\cos\theta_3].$$

Des coordonnées des trois points nous pouvons déduire les valeurs de leurs distances mutuelles

$$l_{1,2}=\mu_1\mu_2,\quad l_{2,3}=\mu_2\mu_3,\quad l_{3,1}=\mu_3\mu_1.$$

Il vient, en effectuant les opérations, toutes réductions faites,

$$l_{1,2}^2 = \frac{9R^2}{2}[1 + \cos(\theta_1 - \theta_2)],$$

$$l_{2,3}^2 = \frac{9R^2}{2}[1 + \cos(\theta_2 - \theta_3)],$$

$$l_{3,1}^2 = \frac{9R^2}{2}[1 + \cos(\theta_3 - \theta_1)].$$

Les différences $\theta_1 - \theta_2$, $\theta_2 - \theta_3$, $\theta_3 - \theta_1$ sont égales à $\frac{\pi}{3}$, dont le cosinus est égal à $\frac{1}{2}$. On constate donc l'égalité des côtés du triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$, qui ont pour longueur commune la valeur

$$l = \frac{3R\sqrt{3}}{2}.$$

La quantité $R\sqrt{3}$ est la valeur du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle qui a le rayon R; le nouveau triangle équilatéral est inscrit dans un cercle de rayon $R \times \frac{3}{2}$.

Soient ξ et η les coordonnées du centre du cercle passant par les points μ_1, μ_2, μ_3; ce point sera le centre des moyennes distances des trois sommets, et l'on aura par conséquent

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\\ &= \frac{R}{2}[\cos(\alpha + 2\beta) + 2\cos\alpha - (\sin\theta_1 - \sin\theta_2 + \sin\theta_3)],\\ \eta &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\\ &= \frac{R}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + (\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \cos\theta_3)].\end{aligned}$$

Mais comme on a $\theta_1 = \theta_2 + \frac{\pi}{3}$, $\theta_3 = \theta_2 - \frac{\pi}{3}$, les trois sommes algébriques de sinus et de cosinus se réduisent à zéro, et l'on a simplement

$$\xi = \frac{R}{2}[\cos(\alpha + 2\beta) + 2\cos\alpha] = R\cos\alpha + \tfrac{1}{2}R\cos(\alpha + 2\beta),$$

$$\eta = \tfrac{1}{2}R\sin(\alpha + 2\beta),$$

pour les coordonnées du centre O′ du cercle circonscrit au triangle $\mu_1\mu_2\mu_3$.

FIGURE 11.

Pour construire le point O′, centre défini par ces coordonnées ξ et η, prenons le milieu D du rayon OC, et projetons-le en D′ sur le côté AB. Nous aurons

$$\begin{aligned} AD' &= AO\cos\alpha + OD\cos DGB \\ &= R\cos\alpha + \tfrac{1}{2}R\cos(\alpha+2\beta) = \xi, \end{aligned}$$

de sorte que le point O′ appartient à l'ordonnée DD′. Nous avons opéré sur le rayon OC du cercle donné. On pourrait de même opérer sur les rayons OA, OB, et on aurait obtenu deux droites perpendiculaires aux côtés BC, CA passant également par le point O′. Ce point O′ est donc le point de concours des hauteurs du triangle qui aurait ses sommets aux points D, E, F, milieux des rayons OC, OA, OB. Ce triangle est homothétique au triangle donné, et les points de concours des hauteurs étant des points homologues, le point O′ est le milieu de la droite OH, qui joint le centre O du cercle circonscrit au point H commun aux trois hauteurs du triangle ABC.

FIGURE 12.

Le point O′ est également éloigné des pieds

$$\text{I et K, I}' \text{ et K}', \text{ I}'' \text{ et K}''$$

des perpendiculaires abaissées, sur les côtés AB, BC, CA, des points O et H. C'est donc le centre du *cercle des neuf points*, c'est à dire du cercle qui passe par les milieux I, I′, I″ des trois côtés, par les pieds des trois hauteurs K, K′, K″, et aussi par les milieux des droites AH, BH, CH qui joignent les sommets au point de concours des hauteurs.

Les mêmes résultats s'appliquent aux trois points μ_1', μ_2', μ_3', où le rayon de courbure de l'enveloppe a pour valeur absolue 4R, son maximum. Ces trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral, dont le côté sera égal à

$$l' = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

et qui a pour centre le point O′. Le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est $\frac{R}{2}$, tiers du rayon $\frac{3R}{2}$ du cercle qui contient les trois points de rebroussement μ_1, μ_2, μ_3.

Pour passer du point directeur M_1, pris sur le cercle circonscrit au triangle, au point μ_1 de l'enveloppe, on pourra donc augmenter le rayon R du cercle circonscrit de la moitié de sa valeur et le porter à $\frac{3R}{2}$; puis déplacer le centre O de la quantité $OO' = \frac{1}{2}OH$, en entraînant le cercle amplifié parallèlement à lui-même. On amènera de cette manière le rayon OM_1 à la grandeur et à la position qu'il doit prendre en $O'\mu_1$. Il reste à vérifier que les deux directions homologues OM_1, $O'\mu_1$ sont parallèles.

Or la droite OM_1 a pour coefficient d'inclinaison, par rapport à l'axe AX,

$$\frac{2R\cos(\beta-\theta_1)\sin(\alpha+\beta-\theta_1)-R\sin\alpha}{2R\cos(\beta-\theta_1)\cos(\alpha+\beta-\theta_1)-R\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\cos(\beta-\theta_1)\sin(\alpha+\beta-\theta_1)-\sin\alpha}{2\cos(\beta-\theta_1)\cos(\alpha+\beta-\theta_1)-\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+2\beta-2\theta_1)}{\cos(\alpha+2\beta-2\theta_1)}=\mathrm{tang}(\alpha+2\beta-2\theta_1),$$

et la droite $O'\mu_1$

$$\frac{\frac{3}{2}R\cos\theta_1}{-\frac{3}{2}R\sin\theta_1}=-\cot\theta_1=\mathrm{tang}\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais l'arc θ_1 est déterminé par la relation

$$\theta_1=\frac{\alpha+2\beta}{3}-\frac{\pi}{6},$$

ce qui donne pour les coefficients angulaires des deux droites les expressions

$$\mathrm{tang}\frac{\alpha+2\beta+\pi}{3} \text{ et } \mathrm{tang}\frac{\alpha+2\beta-2\pi}{3}.$$

La différence des angles faits par les deux droites avec l'axe AX est donc égale à

$$\frac{\alpha+2\beta+\pi}{3}-\frac{\alpha+2\beta-2\pi}{3}=\pi,$$

ce qui assure le parallélisme des deux droites.

On reconnaîtra de même que, pour passer du point M_1' du cercle circonscrit au point μ_1', où le rayon de courbure atteint sa valeur maximum 4R, il suffit de réduire le rayon R du premier cercle à la moitié $\frac{R}{2}$ de sa valeur et de déplacer le cercle réduit de la quantité OO' parallèlement à lui-même.

III. *Description de la courbe enveloppe considérée comme hypocycloïde.*

Figure 13.

Le centre O′ des circonférences C et C′ de rayon $\frac{3R}{2}$ et $\frac{R}{2}$ a pour coordonnées

$$\xi = \frac{R}{2}\cos(\alpha + 2\beta) + R\cos\alpha,$$

$$\eta = \frac{R}{2}\sin(\alpha + 2\beta).$$

Ces deux circonférences comprennent dans leur intervalle toute la courbe enveloppe. Soit $R\mu$ la pédale correspondante à une valeur particulière de l'angle θ; elle fait l'angle θ avec l'ordonnée RM; soit μ le point de contact de cette pédale avec son enveloppe. La droite $R\mu$ a pour équation

$$y = -\cot\theta[x - R\cos(\alpha + 2\beta - 2\theta) - R\cos\alpha]$$

ou bien

$$y\sin\theta + x\cos\theta - R\cos(\alpha + 2\beta - 2\theta)\cos\theta - R\cos\alpha\cos\theta = 0.$$

Par le point μ menons une perpendiculaire à $R\mu$; ce sera la normale à la courbe, et déterminons les distances O′K, O′I du centre O′ à ces deux droites.

On aura d'abord

$$\begin{aligned} O'K = \delta &= \eta\sin\theta + \xi\cos\theta - R\cos(\alpha + 2\beta - 2\theta)\cos\theta - R\cos\alpha\cos\theta \\ &= \frac{R}{2}[\cos(\alpha + 2\beta)\cos\theta + \sin(\alpha + 2\beta)\sin\theta] \\ &\qquad + R\cos\alpha\cos\theta - R\cos\alpha\cos\theta - R\cos(\alpha + 2\beta - 2\theta)\cos\theta \\ &= \frac{R}{2}\cos(\alpha + 2\beta - \theta) - \tfrac{1}{2}R\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta) - \tfrac{1}{2}R\cos(\alpha + 2\beta - \theta) \\ &= -\frac{R}{2}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta), \end{aligned}$$

quantité à prendre en valeur absolue.

La circonférence C′ de rayon $\frac{R}{2}$ coupe au point λ la pédale $R\mu$; on a donc $O'\lambda = \frac{R}{2}$; l'angle $\lambda O'K$ est égal à $\alpha + 2\beta - 3\theta$, et par suite l'angle $\lambda O'X'$ que fait $O'\lambda$ avec $O'X'$, parallèle à AX, est égal à $\alpha + 2\beta - 2\theta$, c'est à dire à l'angle que fait le rayon OM avec le même axe. Les deux rayons OM et $O'\lambda$ sont donc parallèles.

La demi-corde λK, dans le cercle C' a pour valeur

$$\lambda K = \frac{R}{2}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta).$$

Cherchons de même la distance O'I du centre O' à la normale. L'équation de la normale sera, si l'on appelle x' et y' les coordonnées du point μ,

$$(y - y')\cos\theta - (x - x')\sin\theta = 0,$$

et par conséquent la distance δ' du point O' à la normale est

$$\delta' = (\eta - y')\cos\theta - (\xi - x')\sin\theta$$

expression où il faut remplacer η, ξ, y', x' par leurs valeurs en fonction de θ :

$$\eta = \tfrac{1}{2}R\sin(\alpha + 2\beta), \quad \xi = \tfrac{1}{2}R\cos(\alpha + 2\beta) + R\cos\alpha,$$

$$y' = \frac{R}{2}[\sin(\alpha + 2\beta) + 2\sin(\alpha + 2\beta - 2\theta) + \sin(\alpha + 2\beta - 4\theta)],$$

$$x' = \frac{R}{2}[\cos(\alpha + 2\beta) + 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha + 2\beta - 2\theta) - \cos(\alpha + 2\beta - 4\theta)].$$

Il vient, toutes réductions opérées,

$$\delta' = -R\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta) - \frac{R}{2}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta),$$

c'est à dire

$$\delta' = O'I = \frac{3R}{2}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta) = 3\lambda K.$$

Soit S le point de rencontre du rayon $O'\lambda$ prolongé, avec la normale ; on aura $\lambda S = 2O'\lambda = R$, et le point S appartient à la fois à la normale μS, à la circonférence C de rayon $\frac{3R}{2}$ et au rayon $O'\lambda S$. L'angle $S\mu\lambda$ étant droit, le point μ appartient à une circonférence de diamètre $\lambda S = R$; et si l'on fait pivoter cette circonférence autour du point S, le point μ décrira un élément de la courbe. La courbe enveloppe peut donc être décrite *épicycloïdalement*, ou plutôt *hypocycloïdalement*, en faisant rouler la circonférence de diamètre R au dedans de la circonférence de rayon $\frac{3R}{2}$.

La circonférence C', de rayon $\frac{R}{2}$, est l'enveloppe des positions successives de la courbe roulante.

Le rayon de courbure au point μ est égal à 8 fois la distance O'K, ou à 4 fois la longueur $S\mu$ de la normale comprise entre le point décrivant et le centre instantané de rotation.

La courbe enveloppe lieu des points μ est donc *l'hypocycloïde tricuspide* engendrée en faisant rouler le cercle de diamètre R au dedans d'un cercle de rayon $\frac{3R}{2}$, dont le centre est au point O', c'èst à dire au centre du cercle des neuf points construit pour le triangle ABC.

La courbe des points μ dépend uniquement, comme forme, du rayon R du cercle circonscrit, et ne dépend pas de la forme du triangle donné; cette forme influe seulement sur la distance OO' et sur l'orientation de cette distance, c'est à dire sur la position de l'enveloppe.

IV. *Remarque sur la construction de la courbe par points.*

FIGURE 14.

Pour construire le point μ où la pédale correspondante à un point M touche son enveloppe, abaissons du point M sur l'un des côtés AB du triangle la perpendiculaire MR, et prolongeons-la en m' jusqu' à ce qu'elle recoupe la circonférence. Si l'on joint $m'C$, cette droite sera parallèle à la pédale cherchée. Car elle fait avec l'ordonnée un angle θ égal à l'angle MAC. Si donc on abaisse $M\mu'$ perpendiculaire sur $m'C$, on aura en $m'\mu'$ la longueur comprise sur la pédale entre le point R et le point de contact μ. Il suffit donc pour obtenir ce point de porter parallèlement aux ordonnées la quantité $\mu'\mu = m'R$; c'est à dire d'ajouter géométriquement les droites $m'\mu'$, $m'R$.

La construction pratique de la courbe peut se réduire à la construction de 12 points:

1° les points correspondants au point directeur amené en coïncidence avec les 3 sommets A, B, C;

2° les points correspondants aux trois points A', B', C', diamétralement opposés aux sommets A, B, C;

3° les points μ_1, μ_2, μ_3 correspondants au point directeur placé aux sommets du triangle équilatéral $M_1M_2M_3$; ce seront les points de rebroussement de la courbe;

https://doi.org/10.1017/S001309150003296X Published online by Cambridge University Press

4° les points μ_1', μ_2', μ_3' correspondants au point directeur amené aux sommets du triangle équilatéral symétrique du précédent, $M_1'M_2'M_3'$; ce seront les points où la courbure de la courbe atteindra son maximum. Ces deux séries de points se trouvent respectivement sur deux circonférences concentriques.

Si l'on a déterminé avec précision l'arc de courbe compris entre deux points de rebroussement μ_1, μ_2, il suffira de le répéter symétriquement dans les intervalles $\mu_2\mu_3$, $\mu_3\mu_1$ pour compléter la courbe.

V. *Examens de certains cas particuliers.*

FIGURE 15.

1°. Le triangle donné est *équilatéral*, $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{6}$.

Les points O et O′ coïncident, les points de rebroussement μ_1, μ_2, μ_3 correspondent aux sommets A, B, C, et les points de plus grande courbure μ_1', μ_2', μ_3' aux points diamétralement opposés sur le cercle circonscrit.

FIGURE 16.

2°. Triangle *isoscèle.* A sommet de l'angle formé par les côtés égaux ; on aura $\alpha = \beta$.

Le point de rebroussement μ_2 correspond à ce sommet A; le point μ_3' au point diamétralement opposé.

FIGURE 17.

3°. Triangle *rectangle.* A sommet de l'angle droit, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Le point O′ est le milieu du rayon AO, puisque le sommet de l'angle droit est le point de concours des hauteurs.

Les deux cercles de rayon $\dfrac{R}{2}$ et $\dfrac{3R}{2}$, décrits du centre O′ sont tangents, l'un extérieurement, l'autre intérieurement au cercle circonscrit. La courbe enveloppe passe par les sommets B et C des angles aigus et y est tangente aux côtés BA, CA.

FIGURE 18.

4°. Triangle *évanouissant*, réduit à deux côtés AB, AC, confondus en un seul, et à la tangente à la circonférence circonscrite, formant le troisième côté infiniment petit BC.

Le problème est ramené à la recherche de l'enveloppe des droites RN, qui joignent les pieds des perpendiculaires abaissées du point M, pris sur la circonférence, sur la corde AB et la tangente BL.

Ces perpendiculaires coupent la circonférence en R′ et en N′. Si l'on porte MN″ = NN′ et MR″ = R′R sur ces perpendiculaires, la droite R″N″ sera perpendiculaire à RN, et donnera la position μ du point de contact avec l'enveloppe.

Le point de concours H des hauteurs du triangle est à la rencontre des droites BH perpendiculaire à AB, et AH perpendiculaire à la tangente BL; et le point O′ centre des cercles de rayon $\frac{R}{2}$ et $\frac{3R}{2}$ est au milieu O′ de la droite OH.

CHAPITRE III.

Question incidente.

Relation entre les centres O et O′ des deux circonférences. Lieu géométrique.

FIGURE 19.

Soit O′ le centre des cercles de rayon $\frac{R}{2}$ et $\frac{3R}{2}$ contenant les rebroussements et les points de courbure maximum de l'enveloppe.

Nous aurons, par rapport aux axes AX, AY,

pour O les coordonnées $\quad x = R\cos\alpha,$

$$y = R\sin\alpha,$$

α étant l'angle OAX;

pour O′ les coordonnées $\quad \xi = R\cos\alpha + \frac{1}{2}R\cos(\alpha + 2\beta),$

$$\eta = \tfrac{1}{2}R\sin(\alpha + 2\beta),$$

β étant l'angle OAC, qui ajouté à OAB complète l'angle CAB = A du triangle.

On a donc $\alpha + \beta = A$, $\beta = A - \alpha$ et $\alpha + 2\beta = 2A - \alpha$;

de sorte que les coordonnées de O′ par rapport aux axes AX, AY sont

$$\xi = R\cos\alpha + \frac{R}{2}\cos(2A - \alpha),$$

$$\eta = \frac{R}{2}\sin(2A - \alpha).$$

Les coordonnées de O′ par rapport à des axes OX′, OY′ parallèles à AX, AY, menés par le point O seront données par les différences

$$\xi - x = x' = \frac{R}{2}\cos(2A - \alpha),$$

$$\eta - y = y' = \frac{R}{2}\sin(2A - \alpha) - R\sin\alpha,$$

ou bien

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(2A - \alpha) = \dfrac{2x'}{R} = x'', \\ \sin(2A - \alpha) - 2\sin\alpha = \dfrac{2y'}{R} = y'', \end{cases}$$

en appelant x'' et y'' les coordonnées x', y' rapportées à la moitié du rayon R.

Imaginons que l'on fasse mouvoir l'axe AX parallèlement à lui-même, en conservant l'angle CAX = A.

L'angle α variera, et le côté CB aura une longueur constante; il enveloppera dans son mouvement une circonférence concentrique au cercle O. Nous aurons l'équation du lieu décrit par le point O′ en éliminant α entre les deux équations (1); elles deviennent, en développant les sinus et cosinus,

$$(2) \quad \begin{cases} \cos 2A\cos\alpha + \sin 2A\sin\alpha = x'', \\ \sin 2A\cos\alpha - (\cos 2A + 2)\sin\alpha = y''. \end{cases}$$

Multiplions la première équation par $(\cos 2A + 2)$, la seconde par $\sin 2A$, et ajoutons, nous aurons la valeur de $\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{x''(\cos 2A + 2) + y''\sin 2A}{\cos 2A(\cos 2A + 2) + \sin^2 2A}$$

$$= \frac{x''(\cos 2A + 2) + y''\sin 2A}{1 + 2\cos 2A}.$$

On obtiendra $\sin\alpha$ en multipliant la première par $\sin 2A$, la seconde par $\cos 2A$, et en retranchant; ce qui donne

$$\sin\alpha = \frac{x''\sin 2A - y''\cos 2A}{1 + 2\cos 2A}.$$

Elevons au carré les deux équations obtenues, et ajoutons; α sera éliminé, et il vient pour équation finale

$$x''^2\sin^2 2A - 2x''y''\sin 2A\cos 2A + y''^2\cos^2 2A$$
$$+ x''^2(2 + \cos 2A)^2 + 2x''y''\sin 2A(\cos 2A + 2) + y''^2\sin^2 2A$$
$$= (1 + 2\cos 2A)^2.$$

Elle se réduit à la forme suivante

$$(5+4\cos 2A)x''^2+4\sin 2A x''y''+y''^2=(1+2\cos 2A)^2,$$

ou bien, en rétablissant $\dfrac{2x'}{R}$, $\dfrac{2y'}{R}$ à la place de x'' et y'',

$$(3) \quad y'^2+4\sin 2A x'y'+(5+4\cos 2A)x'^2=\frac{R^2}{4}(1+2\cos 2A)^2,$$

équation d'une courbe du second ordre, dont le centre est au point O.

On a d'ailleurs l'identité

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1,$$

d'où l'on déduit

$$1+2\cos 2A = 4\cos^2 A - 1$$

et $$5+4\cos 2A = 1+4(1+\cos 2A) = 1+8\cos^2 A.$$

L'équation (3) devient par conséquent

$$(4) \quad y'^2+4\sin 2A x'y'+(1+8\cos^2 A)x'^2=\frac{R^2}{4}(4\cos^2 A-1)^2.$$

Le second membre devient nul lorsque l'angle A satisfait à la relation $\cos^2 A=\frac{1}{4}$,

c'est à dire lorsque $A=\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3}$.

Le premier membre devient alors,

pour $A=\dfrac{\pi}{3}$,

$$y'^2+2\sqrt{3}x'y'+3x'^2=(y'+x'\sqrt{3})^2=0,$$

pour $A=\dfrac{2\pi}{3}$,

$$y'^2-2\sqrt{3}x'y'+3x'^2=(y'-x'\sqrt{3})^2=0.$$

Ces diverses relations définissent les valeurs du rapport $\dfrac{y'}{x'}$ et représentent deux droites doubles, savoir

$$y'=-x'\sqrt{3} \quad \text{pour } A=\frac{\pi}{3},$$

$$y'=+x'\sqrt{3} \quad \text{pour } A=\frac{2\pi}{3}.$$

L'ellipse lieu des points O' se réduit dans ces deux cas à une droite.

Dans tous les autres cas, le discriminant du premier membre de l'équation (4) n'est pas nul, et le calcul montre qu'il reste toujours positif et égal à $4(1-4\cos^2 A)^2$.

Si l'on fait $A=\frac{\pi}{2}$, l'équation devient $y'^2+x'^2=\frac{R^2}{4}$ et représente une circonférence concentrique au cercle O. C'est le cas déjà examiné du triangle rectangle BAC.

Faisons enfin $A=0$, ce qui correspond au triangle évanouissant, formé d'une corde AB et d'une tangente ; nous aurons pour l'équation du lieu

$$y'^2+9x'^2=\frac{9R^2}{4};$$

le lieu est une ellipse qui a pour demi-axes, parallèles aux axes coordonnés, $\frac{R}{2}$ suivant OX' parallèle à la corde AB, et $\frac{3R}{2}$ suivant OY'.

Les axes principaux de l'ellipse générale font avec l'axe OX' les angles

$$\phi=\frac{A}{2} \text{ et } \phi'=\frac{A+\pi}{2};$$

ils sont donc parallèles aux bissectrices de l'angle A et de l'angle extérieur supplémentaire. Les longueurs des demi-axes sont, dans ces directions, données par les relations

$$r_1=\frac{R}{2}\,\frac{4\cos^2 A-1}{1-4\cos^2\frac{A}{2}},\quad r_2=\frac{R}{2}\,\frac{4\cos^2 A-1}{1-4\sin^2\frac{A}{2}};$$

et la demi-distance focale $\sqrt{r_2^2-r_1^2}$ est égale à $R\sqrt{2\cos A}$, $\cos A$ étant pris positivement.

Pour $A=\frac{\pi}{3}$ on trouve

$$\sqrt{r_2^2-r_1^2}=R,$$

c'est le cas de l'ellipse réduite à une droite ;

et pour $A=\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{r_2^2-r_1^2}=0, \text{ cas du cercle.}$$

CHAPITRE IV.

I. *Rectification de la courbe enveloppe.*

FIGURE 20.

L'arc s de la courbe s'obtient par l'intégration de la fonction différentielle

$$ds = \rho d\theta = -4\text{R}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta)d\theta$$

ce qui donne

$$s = \text{C} + \tfrac{4}{3}\text{R}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta),$$

avec une constante arbitraire C. Entre les limites θ_0 et θ, on aurait

$$s = \tfrac{4}{3}\text{R}[\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta) - \sin(\alpha + 2\beta - 3\theta_0)].$$

Le rayon de courbure au point de la courbe qui correspond au point directeur M, s'obtient en augmentant l'ara CM de sa moitié MI portée en MI′, en menant le diamètre $\text{I}'\text{OI}_1'$ et en achevant le triangle rectangle inscrit $\text{I}'\text{I}_1'\text{I}_2'$; on a

$$\rho = 2\text{I}_1'\text{I}_2' = 4\text{R}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta)$$

en valeur absolue.

Le même triangle rectangle donne

$$\text{I}_2'\text{I}' = 2\text{R}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta)$$

et par suite, à la constante C près, l'arc de la courbe est représenté par les $\frac{2}{3}$ de la corde $\text{I}_2'\text{I}'$. L'arc dont les extrémités correspondent à deux points M et M′ est égal aux $\frac{2}{3}$ de la différence des cordes $\text{I}_2'\text{I}'$ correspondantes à ces deux points.

Appliquée à la longueur de l'arc compris entre deux rebroussements consécutifs de la courbe, la formule, où l'on fera $\theta_0 = \theta_2$, $\theta = \theta_1$, donne

$$\text{S} = \tfrac{4}{3}\text{R}[\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta_1) - \sin(\alpha + 2\beta - 3\theta_2)] = \frac{8\text{R}}{3},$$

car le second sinus est égal à l'unité négative, et le premier à l'unité positive. La courbe est donc rectifiable, et la longueur comprise entre deux rebroussements est commensurable avec le rayon du cercle ; la courbe totale a pour longueur 8 fois le rayon R. Cette longueur est intermédiaire entre la longueur du cercle circonscrit et celle du cercle de rayon $\frac{3\text{R}}{2}$.

II. *Quadrature de la courbe.*

FIGURE 21.

Pour trouver l'aire exacte de la courbe, il faudrait intégrer la différentielle ydx, qui, ramenée à la variable θ, s'exprimerait par une fonction entière des sinus et cosinus de cet arc. L'opération ne présenterait pas de difficulté. Mais on peut éviter ces calculs si l'on veut seulement trouver l'aire comprise entre les trois arcs $\mu_1\mu_2$, $\mu_2\mu_3$, $\mu_3\mu_1$, dont se compose la courbe totale. On y parvient approximativement de la manière suivante.

L'aire cherchée est égale à l'aire du triangle équilatéral $\mu_1\mu_2\mu_3$ de laquelle on aurait soustrait les trois segments égaux compris entre chaque arc et le côté qui lui sert de corde.

Soit l la longueur du côté $\mu_1\mu_3$; f la flèche KF de l'arc de courbe que ce côté soustend.

Si l'on rapporte ces quantités au rayon R du cercle donné, on aura

$$l = \frac{3R\sqrt{3}}{2}$$

puisque le triangle considéré est inscrit dans le cercle de rayon $\frac{3}{2}R$; sa surface est égale à $\frac{1}{4}l^2\sqrt{3} = \frac{27}{16}R^2\sqrt{3}$.

La flèche $f = KF$ est la différence entre $IK = R$ et FI, qu'on peut calculer. Le point I étant le milieu de l'arc de cercle $\mu_1\mu_3$, $\mu_1 I$ est le côté de l'hexagone régulier inscrit, et il est par conséquent égal au rayon $\frac{3R}{2}$. Le triangle $\mu_2\mu_1 I$ rectangle en μ_1 donne l'egalité

$$\overline{\mu_1 I}^2 = IF \times I\mu_2, \text{ c'est à dire } \frac{9R^2}{4} = IF \times 3R,$$

et par conséquent $IF = \frac{3}{4}R$; comme $KI = R$,

il en résulte $KF = f = \frac{R}{4}$.

FIGURE 22.

Menons au point K la tangente HH′ à la courbe, et tirons les droites $\mu_3 K$, $\mu_1 K$.

L'aire cherchée est comprise entre le triangle $\mu_3 K \mu_1$ et le trapèze $HH'\mu_1\mu_3$. Le triangle a pour mesure $\frac{1}{2}fl$; le trapèze a pour

https://doi.org/10.1017/S001309150003296X Published online by Cambridge University Press

hauteur f, et l'une de ses bases est égale à l, l'autre HH' est les $\frac{2}{3}$ de $\mu_3\mu_1$, car le point K est aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur O'F ; le trapèze a pour mesure $\frac{1}{2}(l+\frac{2}{3}l)\times f = \frac{5}{6}fl$.

L'aire à évaluer étant comprise entre le triangle formé par des cordes, et le trapèze limité à la même base mais formé par un contour tangentiel, il est conforme à une remarque souvent verifiée d'attribuer à l'aire du segment la moyenne des deux limites, en affectant du coefficient 2 l'aire excédante, ce qui donne pour le coefficient de lf

$$\frac{\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{6}}{3}=\frac{13}{18}.$$

L'aire du segment $\mu_1 K \mu_3$ est donc sensiblement égale à $\dfrac{13}{18}lf$; et comme il faut tripler ce résultat pour le retrancher de l'aire du triangle équilatéral, il vient pour l'aire cherchée

$$A=\frac{27}{16}R^2\sqrt{3}-3\times\frac{13}{18}\times\frac{3R\sqrt{3}}{2}\times\frac{R}{4}=\frac{7}{8}R^2\sqrt{3}.$$

On peut comparer ce résultat aux aires des triangles équilatéraux inscrits dans les différents cercles que nous avons considérés dans notre étude, savoir les cercles de rayon R, de rayon $\dfrac{R}{2}$, de rayon $\dfrac{3R}{2}$.

Appelons A_1, A_2, A_3 ces trois aires ; en les rangeant par ordre de grandeur, on aura

$$A_1=\frac{3}{16}R^2\sqrt{3},\quad A_2=\frac{3}{4}R^2\sqrt{3},\quad A=\frac{7}{8}R^2\sqrt{3},\quad A_3=\frac{27}{16}R^2\sqrt{3},$$

et l'on peut observer que A est le tiers de la somme $A_1+A_2+A_3$ des trois triangles rectilignes.

Si l'on assimilait la courbe $\mu_3 K \mu_1$ à une parabole, suivant la règle de Simpson, on aurait pour l'aire du segment

$$\frac{2}{3}\times l\times\frac{R}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}R\sqrt{3}\times\frac{R}{4}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4},$$

et l'ensemble des trois segments paraboliques représenterait l'aire A_2 du triangle équilatéral inscrit dans le cercle donné. La surface comprise au dedans de la courbe serait donc égale à la différence

$$A'=\frac{27}{16}R^2\sqrt{3}-\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}=\frac{15}{16}R^2\sqrt{3}$$

ce qui excède de $\frac{1}{16}R^2\sqrt{3}$ la valeur trouvée $\frac{7}{8}R^2\sqrt{3}$.

https://doi.org/10.1017/S001309150003296X Published online by Cambridge University Press

On peut expliquer cette différence en remarquant que les tangentes à la parabole aux points μ_1 et μ_3 iraient rencontrer l'axe FO′ de la courbe en un point L situé au milieu du segment KO′; car FL doit être égal à 2FK dans la parabole; la parabole reste donc au dessous de la courbe exacte vers les deux extrémités de l'arc $\mu_3 K \mu_1$, ce qui réduit le segment d'une certaine quantité.

Remarquons encore que

$$HH' = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} R \sqrt{3} = R \sqrt{3}$$

est le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle donné.

La longueur de l'arc $\mu_1 K \mu_3$ est comprise entre les longueurs du contour inscrit $\mu_3 K \mu_1$ et du contour tangent extérieurement $\mu_3 HH' \mu_1$; on a d'ailleurs

$$\mu_3 K = \sqrt{\frac{l^2}{4} + f^2} = \sqrt{\left(\frac{3R\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{R^2}{16}} = \frac{R}{2}\sqrt{7}.$$

Le contour inscrit $\mu_3 K \mu_1$ a donc pour développement $R\sqrt{7}$.

Le contour extérieur se compose de trois parties, dont les deux extrêmes sont égales à $\frac{R}{2}$, et la partie moyenne HH′ est égale à $\frac{2}{3} l$ ou à $R\sqrt{3}$; le développement est donc égal à $R(1 + \sqrt{3})$. La longueur de l'arc est donc comprise entre ces deux limites. On a en effet les inégalités

$$R\sqrt{7} < \tfrac{8}{3} R < R(1 + \sqrt{3}),$$

c'est à dire $\quad R \times 2 \cdot 646 < R \times 2 \cdot 667 < R \times 2 \cdot 732.$

La longueur trouvée $\frac{8R}{3}$ est sensiblement égale à la moyenne entre les deux limites *en affectant du coefficient 2 la moindre valeur*; on a en effet

$$\frac{2 \cdot 646 \times 2 + 2 \cdot 732}{3} = 2 \cdot 675,$$

résultat qui excède de 0·008 seulement la valeur exacte $\frac{8R}{3}$, soit une erreur relative des $\frac{3}{1000}$ de la valeur cherchée.

CHAPITRE V.

Problème inverse.

Si l'on donne le rayon R d'une circonférence O, circonscrite à un triangle, dont les angles A, B, C sont connus, on pourra construire le triangle, en faisant autour du centre O de la circonférence des angles égaux respectivement au double 2A, 2B, 2C de chacun des angles donnés.

Nous supposerons qu'on donne en outre la position O′ du centre de deux circonférences de rayons $\frac{R}{2}$ et $\frac{3R}{2}$, et sur la plus grande des deux les points μ_1, μ_2, μ_3, sommets d'un triangle équilatéral inscrit. Ces données suffisent pour définir entièrement *l'hypocycloïde tricuspide* E, qui aurait pour points de rebroussement les trois points μ_1, μ_2, μ_3 et qui serait engendrée par le roulement à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{3R}{2}$ d'un cercle de diamètre R.

Le problème à résoudre consiste à placer le cercle O et le triangle ABC de telle sorte que les pédales des divers points de la circonférence O par rapport au triangle aient pour enveloppe l'hypocycloïde E.

Figures 23 et 24.

Cherchons dans le triangle ABC le point de concours H des trois hauteurs; joignons OH et soit I le milieu de la droite OH. Ce point I sera dans le cercle O la position relative du centre O′ des cercles de rayons $\frac{R}{2}$, $\frac{3R}{2}$ de sorte que le centre O du cercle de rayon R, rapporté sur le plan des cercles donnés O′, sera situé sur une circonférence C_1 décrite de O′ comme centre avec un rayon égal à $OI = \frac{1}{2}OH$.

Soit O_1 un point quelconque de cette circonférence C_1; de ce point comme centre avec R pour rayon on décrira la circonférence donnée, et on pourra y inscrire le triangle ABC, qui y occupera une position quelconque A′B′C′; puis on déterminera les sommets a_1, b_1, c_1 du triangle équilatéral inscrit qui diffère le moins du triangle A′B′C′. On sait qu'il suffit pour cela de mener par chaque sommet A′ une corde parallèle au côté opposé B′C′, et de prendre le point a_1 au tiers de l'arc soustendu par cette corde à partir du point A′.

Le problème serait résolu si le côté a_1b_1 du triangle équilatéral qu'on vient de tracer était parallèle à l'un $\mu_1\mu_2$ des côtés du triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $\frac{3R}{2}$. On satisfait à cette dernière condition en faisant tourner le cercle O_1 et le triangle $A'B'C'$ qu'il renferme, autour du centre O' jusqu' à ce qu'on ait amené la droite a_1b_1 à être parallèle à la droite fixe $\mu_1\mu_2$. Du point O' abaissons $O'p$, $O'q$ perpendiculaires à a_1b_1, $\mu_1\mu_2$; joignons $O'O_1$; si nous faisons tourner la partie mobile de la figure de l'angle $pO'q$, la droite a_1b_1 prendra la position $a_1'b_1'$, parallèle à $\mu_1\mu_2$, et le centre O_1 passera au point O_1'; le triangle $A'B'C'$, déplacé du même angle autour de O', sera amené dans la position où il satisfera à toutes les conditions du problème inverse.

CHAPITRE VI.

Considérations cinématiques.

Imaginons que le point directeur M parcoure la circonférence de rayon R et de centre O avec une vitesse uniforme; que dans ce mouvement il entraîne le système des trois perpendiculaires MN, ML, MR abaissées sur les côtés du triangle inscrit.

Au point M correspond sur le cercle O', de rayon $\frac{3R}{2}$, un point de contact S de la circonférence O' avec le cercle de diamètre R qui, en roulant à son intérieur, engendre comme hypocycloïde l'enveloppe de la pédale. A chaque position de M correspond une pédale RN, un point S et une position du point μ, point de contact de la pédale avec son enveloppe et point décrivant appartenant à la circonférence roulante.

Les perpendiculaires MN, ML, MR constituent un système rigide qui rencontre les côtés du triangle aux points N, L, R, qu'on peut considérer comme appartenant aux côtés.

Nous nous proposons d'examiner ces divers mouvements dans ce chapitre.

Le système des droites indéfinies MN, ML, MR conserve son parallélisme, et est animé d'un mouvement de translation; chaque point du système a une vitesse égale et parallèle à la vitesse du point directeur M. C'est donc un mouvement de *translation circulaire*; chaque point décrit une circonférence de rayon R avec la vitesse v du point M.

Si nous appelons ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ du rayon AM autour du sommet A pris sur la circonférence, la vitesse angulaire du rayon OM issu du centre aura pour valeur 2ω, et l'on aura

$$v = 2R\omega\,;$$

cette vitesse linéaire est commune à tous les points du système invariable formé par les trois perpendiculaires; l'accélération de chacun de ces points est dirigée vers le centre de la circonférence qu'il décrit, et a pour valeur $4R\omega^2$.

Les points N, L, R, pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les trois côtés, peuvent être considérés comme appartenant aux côtés du triangle. Le mouvement de ces points sur ces côtés est la projection du mouvement circulaire uniforme du point directeur. Ce sera donc un mouvement rectiligne *pendulaire*, dans lequel l'accélération est proportionnelle à la distance du point mobile au milieu du côté décrit, projection du centre O sur ce même côté. Si l'on désigne par z la distance de l'une des projections N, L, R au milieu du côté qu'elle parcourt, on aura pour l'équation du mouvement

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -4\omega^2 z\,.$$

La même loi s'applique, comme nous allons le montrer, au mouvement du point μ sur sa trajectoire.

FIGURE 25.

Soit CC′ la circonférence de rayon $\frac{3R}{2}$, décrite du point O′ pris pour centre; $R\mu$ la pédale qui fait un angle θ avec l'ordonnée RR′, abaissée du point M perpendiculairement au côté AB pris pour axe des x.

Le point μ peut être considéré comme appartenant au cercle mobile O″ de rayon R roulant à l'intérieur de la circonférence CC′.

La pédale RN et la normale μS font des angles θ avec lex axes fixes AY et AX ; elles ont donc toutes deux la vitesse angulaire

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

La vitesse v du point μ sur sa trajectoire est égale à $\frac{ds}{dt}$, ds représentant l'arc de la courbe, c'est à dire $\frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\omega$.

On a donc, en mettant pour ρ sa valeur,

$$v = 4\text{R}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta)\omega.$$

On en déduit pour les composantes de l'accélération totale, suivant la tangente $\mu\lambda$

$$\frac{dv}{dt} = \omega\frac{d\rho}{dt} = 12\text{R}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta)\omega^2,$$

et suivant la normale μS

$$\frac{v^2}{\rho} = \rho\omega^2 = 4\text{R}\cos(\alpha + 2\beta - 3\theta)\omega^2.$$

L'accélération totale J est la résultante de ces deux composantes ; soit ψ l'angle qu'elle fait avec la tangente $\mu\lambda$.

Nous aurons, en divisant $\frac{v^2}{\rho}$ par $\frac{dv}{dt}$,

$$\text{tang}\,\psi = \tfrac{1}{3}\cot(\alpha + 2\beta - 3\theta).$$

Or l'angle $\alpha + 2\beta - 3\theta$ est donné sur la figure par l'angle $\mu\text{S}\lambda$. Si nous achevons le rectangle $\lambda\mu\text{SS}'$ inscrit dans le cercle O″, l'angle $\text{S}'\mu\lambda$ sera le complément de $\mu\text{S}\lambda$, et par suite $\text{S}'\mu\lambda$ a pour tangente la cotangente de l'angle $\mu\text{S}\lambda$. On a donc

$$\text{tang}\,\psi = \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\text{S}'\mu\lambda$$

et, si l'on prend $\lambda j = \frac{1}{3}\lambda\text{S}'$, la droite μj donnera la direction de l'accélération totale J.

Figure 26.

Considérons à part l'accélération tangentielle, et comptons les arcs s sur la courbe à partir du *sommet* μ_1', c'est à dire du point où le rayon de courbure atteint sa plus grande valeur absolue 4R. Supposons que le mouvement du point μ s'opère dans le sens $\mu\mu_1'\mu_2$.

La vitesse du point μ sera égale à $\dfrac{ds}{dt}$ en grandeur et en signe, et l'on aura en mettant le signe en évidence

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -12\mathrm{R}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta)\omega^2$$

pour l'accélération tangentielle.

Or l'arc s mesuré de μ_1' à μ a pour expression

$$s = \tfrac{4}{3}\mathrm{R}\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta)$$

puisque le facteur $\sin(\alpha + 2\beta - 3\theta)$ s'annule au point μ_1' ; on a donc

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -9\omega^2 s = -(3\omega)^2 s$$

équation d'un *mouvement pendulaire* curviligne qui aurait pour centre attractif le point μ_1'. Le coefficient de s dans l'équation de ce mouvement est réglé sur une vitesse angulaire 3ω.

Nous avons donc constaté quatre mouvements pendulaires ; savoir

1°. ceux des trois points N, L, R mobiles sur les côtés du triangle, qui parcourent chacun dans les deux sens une longueur égale à 2R, pendant que le point directeur parcourt la circonférence entière, c'est à dire dans le temps $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \dfrac{\pi}{\omega}$; il en résulte pour chacun des trois mobiles une vitesse moyenne u, égale au quotient

$$u = \frac{4\mathrm{R}}{\left(\dfrac{\pi}{\omega}\right)} = \frac{4\mathrm{R}\omega}{\pi} ;$$

2°. le mouvement du point μ sur la courbe hypocycloïdale ; dans ce mouvement le point μ parcourt l'arc $\mu_1\mu_1'\mu_2$ compris entre deux rebroussements consécutifs, pendant le temps, $\dfrac{\mathrm{T}}{3} = \dfrac{\pi}{3\omega}$, que le point directeur met à parcourir le tiers de la circonférence ; la vitesse du mobile, u', est en moyenne égale au quotient

$$u' = \frac{\dfrac{8\mathrm{R}}{3}}{\dfrac{\pi}{3\omega}} = \frac{8\mathrm{R}\omega}{\pi} = 2u ;$$

elle est double de la vitesse moyenne des trois mouvements rectilignes.

La pédale a une vitesse angulaire constante, égale à ω; les mouvements rectilignes pendulaires sont réglés sur la vitesse angulaire double, 2ω; le mouvement du point de contact sur la courbe enveloppe est réglé sur la vitesse angulaire 3ω. Les quatre points mobiles L, N, R, μ sont *tous les quatre à un même instant* sur la même droite, et l'on obtient ce théorème :

Lorsqu'on fait rouler la pédale uniformément sur l'hypocycloïde qui lui sert de courbe enveloppe, les points de rencontre de la droite mobile avec les trois côtés du triangle inscrit, parcourent ces côtés suivant la loi pendulaire $\frac{dz^2}{dt^2} = -4z\omega^2$; et le point de contact μ parcourt la courbe enveloppe suivant la loi $\frac{d^2s}{dt^2} = -9s\omega^2$, les z étant comptés à partir des milieux des côtés décrits, et les s à partir du sommet des arcs successifs de la courbe.