Canad. Math. Bull. Vol. **24** (3), 1981

SOMMES DE LA FORME $\sum \frac{g(n)}{f(n)}$

BY
ARMEL MERCIER

1. **Introduction.** Dans [8], nous avons étudié l'ordre de grandeur des sommes de la forme $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} g(n)/f(n)$, pour $k,\ l\in\mathbb{N}$, $(k,l)=1$ ou k, où $g(n)$ et $f(n)$ appartiennent respectivement à une classe de fonctions multiplicatives et additives. À partir de ce résultat, nous avons obtenu, par exemple, l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} \omega(n)/d(n)$, où $\omega(n)=\sum_{p\mid n} 1$ et $d(n)=\sum_{d\mid n} 1$. L'étude des sommes de la forme $\sum'_{n\le x} \theta(n)/f(n)$, où $\theta(n)$ et $f(n)$ appartiennent respectivement à une classe de fonctions multiplicatives et additives, a déjà été abordée (voir [2], [3], [6]). (Ici $\sum'_{n\le x} \theta(n)/f(n)$ signifie que la somme parcourt tous les $n\le x$ tels que $f(n)\ne 0$.) Nous établierons dans le présent manuscrit deux théorèmes de sommation, (il est à remarquer que ces ceux nouveaux résultats sont valides pour une plus grande classe de fonctions que deux obtenus dans [2], [3], [6]; notons cependant qu'à l'aide du théorème 1 de [7], il est possible d'obtenir lesdits résultats sans aucune restriction sur les entiers positifs k et l), l'un concernant l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} g(n)/f(n)$ et l'autre concernant l'ordre de grandeur de $\sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1}} g(n)/f(n)$, pour $k,\ l\in\mathbb{N}$, $(k,l)=1$ ou k, où $g(n)$ et $f(n)$ appartiennent respectivement à une classe de fonctions multiplicatives et additives. Notons enfin que, pour une série de Dirichlet donnée, nous désignerons par σ_a son abscisse de convergence absolue, lorsqu'elle existe.

2. **Principaux résultats.** Avant d'énoncer les deux principaux résultats, posons

$$h(s,u)=\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)\frac{g(p)}{p^r}}{p^s}+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^2)/f(p)}\frac{g(p^2)}{p^{2r}}}{p^{2s}}+\cdots\right)^{-1}$$
$$\times\prod_{p^a\parallel d}\left(\frac{\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}\frac{g(p^a)}{p^{ar}}}{p^{as}}+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^{a+1})/f(p)}\frac{g(p^{a+1})}{p^{(a+1)r}}}{p^{(a+1)s}}+\cdots\right)\frac{1}{\phi(k')}$$

Reçu le 25 juin 1979 et sous forme revisée, le 29 avril 1980.
Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press

$$\times \prod_{p|k'} \left(1 + \frac{\left(\frac{u}{b}\right) \frac{g(p)}{p^r}}{p^s} + \frac{\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^2)/f(p)} \frac{g(p^2)}{p^{2r}}}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^u$$

$$\times \prod_p \left(1 + \frac{\left(\frac{u}{b}\right) \frac{g(p)}{p^x}}{p^s} + \cdots \right),$$

où b, d et k' seront définis ultérieurement, de plus, nous supposons que $h(1, u) \in C^{\alpha+1}[0, b]$ (α est un entier positif).

Théorème 1. *Soit g une fonction multiplicative telle que $g(p) = bp^r + o(p^r)$, $b \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \ldots\}$, $r \in \mathbb{R}$, et $g(p^t) = O(p^{tr})$, $t > 1$. Soit f une fonction additive telle que $f(p^v)$ ne dépend pas de p et $f(p) \neq 0$. Supposons que*

$$\sum_{\substack{n \le x \\ f(n) \neq 0}} g(n) = O(x^{r+1} \log^{b-1} x) \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{n \le x \\ f(n) = 0}} g(n) = O(x^{r+1} \log^{b-2} x),$$

alors pour $k, l \in \mathbb{N}$, $(k, l) = 1$ ou k, nous avons

$$\sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l(k)}}{}' \frac{n^{-r} g(n)}{f(n)} = \frac{x \log^{b-1} x}{f(p)} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(\log \log x)^i} + O\left(\frac{x \log^{b-1} x}{(\log \log x)^{\alpha+1}}\right), \tag{1}$$

où

$$A_i = (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}} \left(\frac{h(1, u)}{u\Gamma(u)}\right)\Bigg|_{u=b}.$$

Preuve. Pour $\sigma > \sigma_a$, on a, (voir [6], [7], [8])

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv l(k)}}^{\infty} \left(\frac{n^{-r} g(n) t^{f(n)}}{n^s}\right)$$

$$= \prod_{p|d} \left(1 + \frac{p^{-r} g(p) t^{f(p)}}{p^s} + \frac{p^{-2r} g(p^2) t^{f(p^2)}}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1}$$

$$\times \prod_{p^a \| d} \left(\frac{p^{-ar} g(p^a) t^{f(p^a)}}{p^{as}} + \frac{p^{-(a+1)r} g(p^{a+1}) t^{f(p^{a+1})}}{p^{(a+1)s}} + \cdots \right) \frac{1}{\phi(k')}$$

$$\times \prod_{p|k'} \left(1 + \frac{p^{-r} g(p) t^{f(p)}}{p^s} + \frac{p^{-2r} g(p^2) t^{f(p^2)}}{p^{2s}} + \cdots \right)^{-1}$$

$$\times \prod_p \left(1 + \frac{p^{-r} g(p) t^{f(p)}}{p^s} + \frac{p^{-2r} g(p^2) t^{f(p^2)}}{p^{2s}} + \cdots \right)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press

$$+\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{p^{-r}g(p)t^{f(p)}}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\|d}\left(\frac{p^{-ar}g(p^a)t^{f(p^a)}}{p^{as}}+\cdots\right)$$

$$\times\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)t^{f(n)}\chi(n)}{n^s}\right),$$

où $p^a \| d$ signifie $p^a \mid d$ et $p^{a+1}\nmid d$, $d=(l,k)$, $k'=k/d$, $l'=l/d$, χ désigne les caractères mod k', χ_1 désigne le caractère principal et $t\in[0,1]$. Posons $u=bt^{f(p)}$, alors l'équation ci-dessus devient

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)}}{n^s}-\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)\frac{g(p)}{p^r}}{p^s}+\cdots\right)^{-1}$$

$$\times\prod_{p^a\|d}\left(\frac{g(p^a)p^{-ar}\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^a)/f(p)}}{p^{as}}+\frac{g(p^{a+1})p^{-(a+1)r}\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p^{a+1})/f(p)}}{p^{(a+1)s}}+\cdots\right)$$

$$\times\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)}\chi(n)}{n^s}\right)=\zeta^u(s)h(s,u)$$

ζ désigne la fonction zeta de Riemann et $h(s,u)$ est la fonction définie auparavant. Utilisant le fait que

$$\sum_{\substack{\chi\\ \chi\neq\chi_1}}\left(\frac{1}{\chi(l')}\sum_{n\le x}n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(p)}\chi(n)\right)=O(x\log^{u-2}x)$$

(voir [7], [8]) et un théorème de Selberg [9], nous obtenons

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)}=\frac{h(1,u)}{\Gamma(u)}x\log^{u-1}x+0(x\log^{u-2}x)$$

pour $u\in[0,b]$. Utilisant un procédé semblable à celui de [2], nous obtenons le résultat désiré.

Remarque. A partir de l'équation (1), nous obtenons, en utilisant le lemme d'Abel [1], pour $r>-1$

$$(2)\qquad \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}{}'\frac{g(n)}{f(n)}=\frac{x^{r+1}\log^{b-1}x}{(r+1)f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{A_i}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{x^{r+1}\log^{b-1}x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

et pour $r=-1$,

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}{}' \frac{g(n)}{f(n)}=\frac{\log^b x}{f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{A_i^*}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{\log^b x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right), \tag{3}$$

où

$$A_i^*=(-1)^{i-1}\frac{d^{i-1}}{du^{i-1}}\left(\frac{h(1,u)}{u^2\Gamma(u)}\right)\bigg|_{u=b}.$$

Le prochain résultat généralise un résultat de [2].

COROLLAIRE 1.1. *Soit f une fonction additive telle que $f(p^v)$ ne dépend pas de p et $f(p)\ne 0$. Supposons que $\sum_{\substack{n\le x\\ f(n)=0}} 1=0(x/\log x)$, alors pour $k, l\in\mathbb{N}$, $(k, l)=1$ ou k, nous avons*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}}\frac{1}{f(n)}=\frac{x}{f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{a_i}{(\log\log x)^i}+O(x/(\log\log x)^{\alpha+1})$$

où $a_1=1/k$ et les autres a_i sont calculables.

R. L. Duncan [4] a étudié la fonction additive Ω_m définie par

$$\Omega_m(n)=\alpha_1^m+\cdots+\alpha_s^m \quad \text{si} \quad n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

et m désigne un entier ≥ 0. Il est à remarquer que $\Omega_0(n)=\omega(n)$ et $\Omega_1(n)=\Omega(n)$ sont deux fonctions bien connues [5].

COROLLAIRE 1.2. *Pour $k, l\in\mathbb{N}$, $(k, l)=1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\ n\equiv l(k)}}\frac{1}{\Omega_m(n)}=x\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{b_i}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$b_1=\frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned}b_2=\frac{1}{k}\Bigg[1-\gamma-\sum_p\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\}-\sum_p\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\Omega_m(p^{a+1})-\Omega_m(p^a)}{p^{a+1}}\\+\sum_{p\mid k/(k,l)}\sum_{a=0}\frac{\Omega_m(p^{a+1})-\Omega_m(p^a)}{p^{a+1}}+\sum_{p\mid(k,l)}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\Omega_m(p^{a+1})-\Omega_m(p^a)}{p^{a+1}}\\-\Omega_m((k,l))+\sum_{p^a\|(k,l)}\sum_{r=1}\frac{\Omega_m(p^{a+r})-\Omega_m(p^{a+r-1})}{p^r}\Bigg],\end{aligned}$$

et les autres b_i sont calculables. La lettre γ désigne la constante d'Euler et $\Omega_m((k, l))$ est la fonction Ω_m évaluée au p.g.c.d de k et l.

COROLLAIRE 1.3. *Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, alors pour $k, l \in \mathbb{N}$, $(k, l) = 1$ ou k, nous avons*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\ n\equiv l(k)}} \frac{1}{\log d(n)} = \frac{x}{\log 2} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{c_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$c_1 = \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} c_2 = \frac{1}{k}\Bigg[1-\gamma-\sum_p\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\} &+\frac{1}{\log 2}\Bigg\{\sum_{\substack{p\mid d\\ r\ge 1}}\frac{\log(1+1/r)}{p^r}+\sum_{\substack{p\mid k'\\ r\ge 1}}\frac{\log(1+1/r)}{p^r}\\ &-\sum_{\substack{p^a\| d\\ r\ge 1}}\frac{\log(1+1/(a+r)}{p^r}-\log d(d)\\ &-\sum_{\substack{p\\ r\ge 2}}\frac{\log(1+1/r)}{p^r}\Bigg\}\Bigg] \end{aligned}$$

$d = (k, l)$, $k = k/d$ et tous les autres c_i sont calculables.

COROLLAIRE 1.4. *Soit $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour $k, l \in \mathbb{N}$, $(k, l) = 1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\ n\equiv l(k)}} \frac{d^\beta(n)}{\omega(n)} = x \log^{2^\beta-1} x \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x \log^{2^\beta-1}}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right),$$

où

$$\begin{aligned} d_1 = \frac{1}{2^\beta\Gamma(2^\beta)}&\prod_{p\mid d}\left(1+\frac{2^\beta}{p}+\frac{3^\beta}{p^2}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p\mid k'}\left(1+\frac{2^\beta}{p}+\frac{3^\beta}{p^2}+\cdots\right)^{-1}\\ &\times\frac{1}{\phi(k')}\prod_{p^a\| d}\left(\frac{(a+1)^\beta}{p^a}+\frac{(a+2)^\beta}{p^{a+1}}+\cdots\right)\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^\beta}\left(1+\frac{2^\beta}{p}+\frac{3^\beta}{p^2}+\cdots\right), \end{aligned}$$

$d = (k, l)$, $k' = k/d$ et les autres d_i sont calculables.

En particulier,

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\ n\equiv l(k)}} \frac{1}{d(n)\omega(n)} = \frac{x}{(\log x)^{1/2}} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d_i^*}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x \log^{-1/2} x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press

où

$$d_1^* = \frac{2}{\sqrt{(\pi)}k'} \prod_{p\mid d} \left(p \log \frac{p}{p-1}\right)^{-1} \prod_{p^a \| d} \left(\frac{(a+1)^{-1}}{p^a} + \frac{(a+2)^{-1}}{p^{a+1}} + \cdots\right)$$
$$\times \prod_p \left(\sqrt{(p^2-p)} \log \frac{p}{p-1}\right) \prod_{p\mid k'} \left((p-1)\log \frac{p}{p-1}\right)^{-1},$$

$d=(k,l)$, $k'=k/d$ et les autres d_i^* sont calculables.

COROLLAIRE 1.5. *Soit $\beta\in\mathbb{R}$, $\beta>-1$, alors pour $l, k\in\mathbb{N}$, $(k,l)=1$ ou k, on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} \frac{\phi^\beta(n)}{\omega(n)} = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{e_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x^{\beta+1}}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$e_1 = \frac{1}{\phi(k')} \prod_{p\mid d} \left(1+\frac{(1-1/p)^{\beta-1}}{p}\right)^{-1} \prod_{p\mid k'} \left(1+\frac{(1-1/p)^{\beta-1}}{p}\right)^{-1}$$
$$\times \prod_{p^a\|d} \left(\frac{(1-1/p)^\beta}{p^a} + \frac{(1-1/p)^\beta}{p^{a+1}} + \cdots\right) \prod_p \left(1-\frac{1-(1-1/p)^\beta}{p}\right),$$

les autres e_i sont calculables. Et

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l(k)}} \frac{1}{\phi(n)\omega(n)} = \log x \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{e_i^*}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$e_1^* = \frac{1}{\phi(k')} \prod_{p\mid d} \left(1+\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\right)^{-1} \prod_{p^a\|d} \left(\frac{(1-1/p)^{-1}}{p^a} + \frac{(1-1/p)^{-1}}{p^{a+1}} + \cdots\right)$$
$$\times \prod_{p\mid k'} \left(1+\frac{1}{p\left(1-\frac{1}{p}\right)^2}\right)^{-1} \prod_p \left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)$$

et les autres e_i^* sont calculables.

THÉORÈME 2. *Soit g une fonction multiplicative telle que $g(p)=bp^r+o(p^r)$, $b\in\mathbb{R}-\{0,-1,-2,\ldots\}$, $r\in\mathbb{R}$, et $g(p^t)=0(p^{tr})$, $t>1$. Soit f une fonction additive telle que $f(p^v)$ ne dépend pas de p et $f(p)\ne 0$. Supposons que*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ f(n)\ne 0}} g(n) = O(x^{r+1}\log^{b-1} x)$$

et

$$\sum_{\substack{n\le x\\ f(n)=0}} g(n) = O(x^{r+1}\log^{b-2} x)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press

alors pour $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}{}' \frac{n^{-r}g(n)}{f(n)} = \frac{x\log^{b-1}x}{f(p)} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x\log^{b-1}x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right) \tag{4}$$

où

$$A_i = (-1)^{i-1}\frac{d^{i-1}}{du^{i-1}}\left(\frac{g(1,u)}{u\Gamma(u)}\right)\Bigg|_{u=b}$$

et

$$g(1,u) = \prod_{p\mid k}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)g(p)p^{-r}}{p}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{u}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)g(p)p^{-r}}{p}+\cdots\right)$$

Preuve. Pour $k\in\mathbb{N}$ et $\sigma>\sigma_a$ nous avons

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)t^{f(n)}}{n^s} = \prod_{p\mid k}\left(1+\frac{p^{-r}g(p)t^{f(p)}}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)t^{f(n)}}{n^s}$$

où $t\in[0,1]$. Posons $u=bt^{f(p)}$, alors

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,k)=1}}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)}}{n^s} = \prod_{p\mid k}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)p^{-r}g(p)}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)}}{n^s}$$

$$= \zeta^u(s)g(s,u)$$

où

$$g(s,u) = \prod_{p\mid k}\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)g(p)p^{-r}}{p^s}+\cdots\right)^{-1}\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{\left(\frac{u}{b}\right)g(p)p^{-r}}{p^s}+\cdots\right)$$

Utilisant le théorème de Selberg [9], on a

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}} n^{-r}g(n)\left(\frac{u}{b}\right)^{f(n)/f(p)} = \frac{g(1,u)}{\Gamma(u)}x\log^{u-1}x + O(x\log^{u-2}x),$$

pour $u\in[0,b]$. Utilisant un procédé semblable à celui de [2], nous obtenons le résultat escompté.

Remarque. A partir de l'équation (4), nous obtenons, en utilisant le lemme d'Abel [1], pour $r>-1$

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}{}' \frac{g(n)}{f(n)} = \frac{x^{r+1}\log^{b-1}x}{(r+1)f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{A_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x^{r+1}\log^{b-1}x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right) \tag{5}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press

et pour $r=-1$,

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}' \frac{g(n)}{f(n)}=\frac{\log^b x}{f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{A_i^*}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{\log^b x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right), \tag{6}$$

où

$$A_i^*=(-1)^{i-1}\frac{d^{i-1}}{du^{i-1}}\left(\frac{g(1,u)}{u^2\Gamma(u)}\right)\bigg|_{u=b}$$

COROLLAIRE 2.1. *Soit f une fonction additive telle $f(p^v)$ ne dépend pas de p et $f(p)\neq 0$. Supposons que $\sum_{\substack{n\le x\\ f(n)=0}} 1=0(x/\log x)$, alors pour $k\in\mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{\substack{n\le x\\(n,k)=1}}' \frac{1}{f(n)}=\frac{x}{f(p)}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{a_i}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où $a=\phi(k)/k$ et les autres a_i sont calculables.

COROLLAIRE 2.2. *Pour $k\in\mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\(n,k)=1}} \frac{1}{\Omega_m(n)}=x\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{b_i}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$b_1=\frac{\phi(k)}{k}$$

$$b_2=\frac{\phi(k)}{k}\left[1-\gamma-\sum_p\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\}-\sum_p\sum_{a=1}^{\infty}\frac{\Omega_m(p^{a+1})-\Omega_m(p^a)}{p^{a+1}}+\sum_{p\mid k}\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\Omega_m(p^{a+1})-\Omega_m(p^a)}{p^{a+1}}\right],$$

les autres b_i étant calculables et γ désigne la constante d'Euler.

COROLLAIRE 2.3. *Pour $k\in\mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\(n,k)=1}} \frac{1}{\log d(n)}=\frac{x}{\log 2}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{c_i}{(\log\log x)^i}+O\left(\frac{x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right)$$

où

$$c_1=\frac{\phi(k)}{k}$$

$$c_2=\frac{\phi(k)}{k}\left[1-\gamma-\sum_p\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\}+\frac{1}{\log 2}\left\{\sum_p\left(\frac{\log 2/3}{p^2}+\frac{\log 3/4}{p^3}+\cdots\right)-\sum_{p\mid k}\left(\frac{\log 1/2}{p}+\frac{\log 2/3}{p^3}+\frac{\log 3/4}{p^3}+\cdots\right)\right\}\right],$$

les autres c_i étant calculables.

COROLLAIRE 2.4. *Soit $\beta \in \mathbb{R}$, alors pour $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\(n,k)=1}} \frac{d^{\beta}(n)}{\omega(n)} = x \log^{2^\beta-1} x \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d_i}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x \log^{2^\beta-1} x}{(\log\log x)^{\alpha+1}}\right),$$

où

$$d_1 = \frac{\prod_{p\mid k}\left(1+\frac{2^\beta}{p}+\frac{3^\beta}{p^2}+\cdots\right)^{-1} \prod_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2^\beta}\left(1+\frac{2^\beta}{p}+\frac{3^\beta}{p^2}+\cdots\right)}{2^\beta\Gamma(2^\beta)}$$

et les autres d_i sont calculables.

En particulier

$$\sum_{\substack{1<n\le x\\(n,k)=1}} \frac{1}{d(n)\omega(n)} = \frac{x}{(\log x)^{1/2}} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{d_i^*}{(\log\log x)^i} + O\left(\frac{x \log^{-1/2} x}{\log\log x}\right)$$

où

$$d_1^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \prod_{p\mid k}\left(p \log\frac{p}{p-1}\right)^{-1} \prod_{p}\left(\sqrt{(p^2-p)}\log\frac{p}{p-1}\right)$$

et les autres d_i^* sont calculables.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Chandrasekharan, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, 1968.
2. J. M. De Koninck, *On a class of arithmetical functions*, Duke Math. J., **39** (1972), 807–818.
3. J. M. De Koninck et A. Mercier, *Remarque sur un article de T. M. Apostol*, Cand. Math. Bull. Vol. **20** (1), 1977, 77–78.
4. R. L. Duncan, *A class of additive arithmetical functions*, Amer. Math. Month., **69** (1962), 34–36.
5. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, London, 1968.
6. A. Mercier, *Sommes de fonctions addiatives restreintes à une classe de congruence*, Canad. Math. Bull., Vol. **22** (1), 1979, 59–73.
7. A. Mercier, *Identité pour* $\sum_{\substack{n=1\\ n\equiv l(k)}} f(n)n^{-s}$, Canad. Math. Bull., Vol. **22** (3), 1979, 317–325.
8. A. Mercier, *On a class of distributive functions* (soumis pour publication).
9. A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc., **18** (1954), 83–87.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
CHICOUTIMI (QUÉBEC)
G7H 2B1

https://doi.org/10.4153/CMB-1981-047-8 Published online by Cambridge University Press