Can. J. Math., Vol. XXXIX, No. 3, 1987, pp. 583-602

EXISTENCE, UNICITE ET MULTIPLICITE DE SOLUTIONS PERIODIQUES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DE DUFFING NON-LINEAIRES AVEC DISSIPATION

M. N. NKASHAMA

1. Introduction. Nous nous intéressons à l'existence, l'unicité et la multiplicité de solutions de l'équation différentielle forcée:

$$(1.1) \qquad x''(t) + cx'(t) + g(t, x(t)) = e(t)$$

vérifiant les conditions périodiques

$$(1.2) \qquad x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

où $e \in L^1(0, 2\pi)$, $c \in \mathbf{R}$, c arbitraire, $g:[0, 2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfait les conditions de Carathéodory i.e., $g(\cdot, x)$ est measurable pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(t, \cdot)$ est continu pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

Le problème (1.1)-(1.2) a été étudié par plusieurs auteurs. Nous mentionerons les travaux **[22]**, **[18]**, **[21]**, **[20]**, **[19]**, [7], **[29]**, **[25]** et la bibliographie contenue dans ces articles.

Dans ce travail, nous supposerons que les quantités

$$\limsup_{x\to+\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \quad \text{et} \quad \limsup_{x\to-\infty} x^{-1} \cdot g(t, x)$$

(respectivement

$$\liminf_{x\to+\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \quad \text{et} \quad \liminf_{x\to-\infty} x^{-1} \cdot g(t, x))$$

peuvent prendre des valeurs différentes et sont comparées avec les valeurs propres du problème linéaire

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} &x''(t) + \lambda x(t) = 0, \quad \lambda \in \mathbf{R} \\ &x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Dans la première section, nous démontrons un résultat d'existence (cfr. Théorème 1) en supposant qu'il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ et des fonctions à valeurs réelles $a_+, a_-, b_+, b_- \in L^1(0, 2\pi)$ tels que

$$m^2 \leqq a_\pm(t) \leqq \liminf_{x\to\pm\infty} x^{-1} \cdot g(t, x)$$

Reçu le 24 janvier, 1985 et sous forme revisée, le 11 décembre, 1985.

$$\leqq \limsup_{x \to \pm\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_{\pm}(t) \leqq (m + 1)^2$$

uniformément pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ avec des conditions supplémentaires, sur l'interaction de $a_{\pm}$ et $b_{\pm}$ avec m^2 et $(m + 1)^2$ respectivement, qui généralisent les conditions des auteurs cités ci-dessus dans plusieurs directions. On déduit du résultat principal de la première section un resultat d'existence et d'unicité (cfr. Corollaire 1).

Dans la seconde section, nous considérons le cas où le non-linéarité g est assez "régulière" et "croise" d'une certaine manière la première valeur propre de (1.3), c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels $d < 0$ et $0 < p$ tels que

$$\limsup_{x \to -\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq d < 0 < p \leqq \liminf_{x \to +\infty} x^{-1} \cdot g(t, x)$$

uniformément en $t \in [0, 2\pi]$. Nous démontrons alors un résultat d'existence et de multiplicité pour le problème (1.1)-(1.2) en utilisant d'une part la méthode de sualors un résultat d'existence et de multiplicité pour le problème (1.1)-(1.2) en utilisant d'une part la méthode de sur- et sous-solutions et d'autre part l'indice de point fixe.

Enfin pour terminer cette introduction, nous signalons que tout au long de ce travail, nous utiliserons les notations de **[25]** pour les espaces abstraits, la convergence forte et la convergence faible. De plus, pour $m \in \mathbf{N}$, nous utiliserons les espaces

(1.4) $\quad Y_m = \text{Span}\{\sin mt, \cos mt\},\ m \neq 0;\ y_0 = \text{Span}\{1\}$

(1.5) $\quad Y_{m+1} = \text{Span}\{\sin(m + 1)\, t, \cos(m + 1)\, t\}$

c'est-à-dire, les sous-espaces vectoriels de $C[0, 2\pi]$ engendrés par sin mt, cos mt et sin$(m + 1)\, t$, cos$(m + 1)\, t$ respectivement. Pour $v \in C[0, 2\pi]$, on notera

$$v^+(t) = \max(v(t), 0) \quad \text{et} \quad v^-(t) = \max(-v(t), 0).$$

2. Les resultats d'existence et d'unicité. Tout au long de cette section, nous supposerons que la non-linéarité g satisfait les conditions de Carathéodory et que y_m et y_{m+1} sont donnés par (1.4) et (1.5) respectivement (cfr. Section 1). Nous avons le résultat d'existence suivant:

THEOREME 1. *Supposons satisfaites les inégalités suivantes*:

(2.1) $$m^2 \leqq a_+(t) \leqq \liminf_{x \to +\infty} x^{-1} \cdot g(t, x)$$

$$\leqq \limsup_{x \to +\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_+(t) \leqq (m + 1)^2$$

$$m^2 \leqq a_-(t) \leqq \liminf_{x \to -\infty} x^{-1} \cdot g(t, x)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-027-6 Published online by Cambridge University Press

$$\leqq \limsup_{x \to -\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_-(t) \leqq (m+1)^2$$

uniformément pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ *où* $m \in \mathbf{N}$ *et* $a_\pm, b_\pm \in L^1(0, 2\pi)$ *vérifient les conditions suivantes*:

$$(2.2) \qquad \int_0^{2\pi} [(a_+(t) - m^2)(v^+(t))^2 + (a_-(t) - m^2)(v^-(t))^2] dt > 0$$

pour tout $v \in Y_m \setminus \{0\}$ *et*

$$(2.3) \qquad \int_0^{2\pi} [((m+1)^2 - b_+(t))(w^+(t))^2 + ((m+1)^2 - b_-(t))(w^-(t))^2] dt > 0$$

pour tout $w \in Y_{m+1} \setminus \{0\}$.

Alors le problème (1.1)-(1.2) *possède au moins une solution pour chaque* $e \in L^1(0, 2\pi)$.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de deux lemmes dont les énoncés et les preuves sont donnés ci-dessous.

LEMME 2.1. *Soient* $a_\pm, b_\pm \in L^1(0, 2\pi)$ *et* $m \in \mathbf{N}$ *satisfaisant les conditions du Théorème* 1. *Alors, il existe*

$$\epsilon = \epsilon(a_\pm, b_\pm) > 0 \quad et \quad \delta = \delta(a_\pm, b_\pm) > 0$$

tels que pour tout $p_+, p_- \in L^1(0, 2\pi)$ *satisfaisant*

$$a_+(t) - \epsilon \leqq p_+(t) \leqq b_+(t) + \epsilon$$
$$a_-(t) - \epsilon \leqq p_-(t) \leqq b_-(t) + \epsilon$$

pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$, *et pour tout* $x \in W^{2,1}(0, 2\pi)$ *avec*

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

on a

$$|x'' + cx' + p_+x^+ - p_-x^-|_{L^1} \geqq \delta |x|_C.$$

Preuve. Elle est divisée en deux étapes:

1ère étape. Montrons tout d'abord que si $p_+, p_- \in L^1(0, 2\pi)$ sont tels que

$$a_\pm(t) \leqq p_\pm(t) \leqq b_\pm(t)$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ où $a_\pm, b_\pm$ satisfont les conditions du Théorème 1. Alors le problème

$$(2.4) \qquad x''(t) + cx'(t) + p_+(t)x^+(t) - p_-(t)x^-(t) = 0$$
$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

n'a que la solution triviale (i.e., $x = 0$).

Définissons $p:[0, 2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$p(t, x) = \begin{cases} p_+(t) & \text{si } x > 0 \\ p_-(t) & \text{si } x \leqq 0, \end{cases}$$

on a par hypothèse

$$m^2 \leqq p(t, x) \leqq (m + 1)^2 \tag{2.5}$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ et tout $x \in \mathbf{R}$. De plus le problème (2.4) est équivalent à

$$\begin{aligned} & x''(t) + cx'(t) + p(t, x(t))x(t) = 0 \\ & x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Maintenant, soit $x \in W^{2,1}(0, 2\pi)$ une solution du problème (2.4) (et donc une solution du problème (2.6)), alors x peut être écrit sous la forme de série de Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Soit $x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t)$ où

$$\bar{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \text{et}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Compte tenu de l'orthogonalité de $\bar{x}$ et $\tilde{x}$ dans $L^2(0, 2\pi)$, on déduit de (2.6) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} (\bar{x}(t) - \tilde{x}(t))(x''(t) + cx'(t) + p(t, x(t))x(t))dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t))^2 - p(t, x(t))\tilde{x}^2(t)]dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} [p(t, x(t))\bar{x}^2(t) - (\bar{x}'(t))^2]dt. \end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont positifs en vertu des inégalités (2.5) et de l'égalité de Parseval-Steklov. Dès lors

$$\int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t))^2 - p(t, \bar{x}(t) + \tilde{x}(t))\tilde{x}^2(t)]dt = 0 \tag{2.7}$$

$$\int_0^{2\pi} [p(t, \bar{x}(t) + \tilde{x}(t))\bar{x}^2(t) - (\bar{x}'(t))^2]dt = 0 \tag{2.8}$$

avec

$$\tilde{x}(t) = a_{m+1} \cos(m + 1) t + b_{m+1} \sin(m + 1) t$$

$$\bar{x}(t) = a_m \cos mt + b_m \sin mt$$

c'est-à-dire $\bar{x} \in Y_m$ et $\tilde{x} \in Y_{m+1}$ (cfr. p. ex. **[25]** pour les détails). Supposons que $\bar{x}(t) = 0$, alors la relation (2.7) entraîne que

$$0 = \int_0^{2\pi} [(\tilde{x}'(t))^2 - p(t, \tilde{x}(t))\tilde{x}^2(t)]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [((m + 1)^2 - p_+(t))(\tilde{x}^+(t))^2 + ((m + 1)^2 - p_-(t))(\tilde{x}^-(t))^2]dt$$

avec $\tilde{x} \in Y_{m+1}$; l'hypothèse (2.3) entraîne que $\tilde{x} = 0$ et donc $x = 0$. Maintenant supposons que $\tilde{x} \neq 0$, alors la relation (2.8) entraîne que

$$p(t, \bar{x}(t) + \tilde{x}(t)) = m^2$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$. Dès lors, par la relation (2.7) on a

$$\int_0^{2\pi} [(m + 1)^2 - m^2]\tilde{x}^2(t)dt = 0$$

i.e., $\tilde{x} = 0$. Par conséquent $x = \bar{x}$. La relation (2.8) entraîne que

$$0 = \int_0^{2\pi} [p(t, \bar{x}(t))\bar{x}^2(t) - (\bar{x}'(t))^2]dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [p_+(t) - m^2)(\bar{x}^+(t))^2 + (p_-(t) - m^2)(\bar{x}^-(t))^2]dt$$

avec $\bar{x} \in Y_m$; l'hypothèse (2.2) implique $\bar{x} = 0$, une contradiction avec le fait que $\bar{x} \neq 0$. Ainsi donc, dans tout les cas $\bar{x} = 0$, ce qui entraîne que $x = 0$.

2ème étape. Supposons que la conclusion du lemme soit fausse. Nous pouvons trouver des suites

$$(x_n) \subset W^{2,1}(0, 2\pi), \quad (p_\pm^n) \subset L^1(0, 2\pi)$$

avec

$$|x_n|_C = 1,$$

$$x_n(0) - x_n(2\pi) = x_n'(0) - x_n'(2\pi) = 0,$$

$$a_\pm(t) - n^{-1} \leqq p_\pm^n(t) \leqq b_\pm(t) + n^{-1}$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ tels que

$$(2.8') \qquad x_n'' + cx_n' + p_+^n x_n^+ - p_-^n x_n^- = v_n, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

avec

$$|v_n|_{L^1} < n^{-1}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-027-6 Published online by Cambridge University Press

Soit $\mu \in \mathbf{R}$ arbitrairement fixé tel que $m^2 < \mu < (m + 1)^2$, alors l'équation (2.8′) est équivalente à

$$x_n'' + cx_n' + \mu x_n = v_n - p_+^n x_n^+ + p_-^n x_n^- + \mu x_n.$$

Définissons l'opérateur linéaire

$$A: \text{Dom}\, A \subset C[0, 2\pi] \to L^1(0, 2\pi)$$

comme suite:

$$\text{Dom}\, A = \{x \in W^{2,1}(0, 2\pi): x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0\},$$

$$Ax = x'' + cx' + \mu x.$$

Il est bien connu que A est un opérateur linéaire inversible tel que

$$A^{-1}: L^1(0, 2\pi) \to C[0, 2\pi]$$

est compact c'est-à-dire complétement continu (cfr. [**26**]). Dès lors, l'équation (2.8′) est équivalente à

$$x_n = A^{-1}[v_n - p_+^n x_n^+ + p_-^n x_n^- + \mu x_n]$$

dans Dom A. Compte tenu de la compacité de A^{-1}, du fait que la quantité

$$v_n - p_+^n x_n^+ + p_-^n x_n^- + \mu x_n$$

est bornée dans $L^1(0, 2\pi)$ grâce aux inégalités

$$|p_\pm^n(t)| \leqq |a_\pm(t) - 1| + |b_\pm(t) - a_\pm(t) + 2| = \beta_\pm(t)$$

où $\beta_\pm \in L^1(0, 2\pi)$; on peut affirmer, considérant les sous-suites s'il y a nécessité, que

$$x_n \to x \quad \text{dans } C[0, 2\pi]$$

$$p_\pm^n \rightharpoonup p_\pm \quad \text{dans } L^1(0, 2\pi)$$

avec $|x|_C = 1$ et $a_\pm(t) \leqq p_\pm(t) \leqq b_\pm(t)$ p.p. $t \in [0, 2\pi]$. De plus, pour tout $\phi \in L^\infty(0, 2\pi)$, on a

$$\left|\int_0^{2\pi} \phi(p_\pm^n x_n^\pm - p_\pm x^\pm)\right|$$

$$\leqq \left|\int_0^{2\pi} \phi p_\pm^n (x_n^\pm - x^\pm)\right| + \left|\int_0^{2\pi} \phi(p_\pm^n - p_\pm)x^\pm\right|$$

$$\leqq |\phi|_\infty |x_n - x|_C |\beta|_{L^1} + \left|\int_0^{2\pi} (p_\pm^n - p_\pm)x^\pm \phi\right|$$

et donc

$$p_{\pm}^n x^{\pm} \rightharpoonup p_{\pm} x^{\pm} \quad \text{dans } L^1(0, 2\pi).$$

Comme l'operateur A est faiblement fermé, on déduit que $x \in \operatorname{Dom} A$ et p.p. tout $t \in [0, 2\pi]$

$$x''(t) + cx'(t) + p_+(t)x^+(t) - p_-(t)x^-(t) = 0$$

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0.$$

Dès lors, en vertu de la première étape, on a que $x = 0$, une contradiction avec le fait que $|x|_C = 1$, ce qui achève la preuve.

Le lemme suivant nous permettra d'utiliser la propriété d'existence du degré de coïncidence [**26**]. Soit

$$X = C[0, 2\pi], \quad Z = L^1(0, 2\pi) \quad \text{et} \quad L: \operatorname{Dom} L \subset X \to Z$$

défini par

$$\operatorname{Dom} L = \{x \in X: x' \text{ absolument continu et } x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0\}$$

$$Lx = x'' + cx'.$$

Nous montrons que, sous les hypothèses du Lemme 2.1, le degré de coïncidence ou le degré relatif à L de l'opérateur

$$L + p_+(\cdot)^+ - p_-(\cdot)^-$$

par rapport à toute boule ouverte $B(r)$ dans X centrée en l'origine (cfr. [**26**]), c'est-à-dire

$$D_L[L + p_+(\cdot)^+ - p_-(\cdot)^-; B(r)]$$

est bien défini, non nul et indépendant du choix de p_+ et p_-.

LEMME 2.2. *Avec les hypothèses du Lemme* 2.1,

$$D_L[L + p_+(\cdot)^+ - p_-(\cdot)^-, B(r)] = \pm 1$$

pour chaque $r > 0$ *et chaque* p_+ *et* p_- *satisfaisant les conditions du Lemme* 2.1.

Preuve. On voit immédiatement que l'opérateur $p_+(\cdot)^+ - p_-(\cdot)^-$ est L-complétement continu (cfr. [**26**]). Des hypothèses du Lemme 2.1 et de la propriété d'invariance du degré par rapport à une homotopie, on déduit que

$$D_L[L + p_+(\cdot)^+ - p_-(\cdot)^-; B(r)]$$
$$= D_L[L + b_+(\cdot)^+ - b_-(\cdot)^-; B(r)].$$

Soit $\eta \in \mathbf{R}$, $m^2 < \eta < (m + 1)^2$, η fixé arbitrairement. Alors, pour chaque $\lambda \in [0, 1]$ et p.p. $t \in [0, 2\pi]$, on a

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-027-6 Published online by Cambridge University Press

$$m^2 \leqq (1 - \lambda)\eta + \lambda b_{\pm}(t) \leqq (m + 1)^2 \quad \text{p.p.}$$

Un calcul élémentaire montre que

$$(1 - \lambda)\eta + \lambda b_+ \quad \text{et} \quad (1 - \lambda)\eta + \lambda b_-$$

vérifient les hypothèses du Lemme 2.1. Dès lors, quelque soit $\lambda \in [0, 1]$, l'équation

$$Lx + [(1 - \lambda)\eta + \lambda b_+]x^+ - [(1 - \lambda)\eta + \lambda b_-]x^- = 0$$

ne possède que la solution triviale. Il s'ensuit, de la propriété d'invariance du degré par rapport à une homotopie et des résultats sur le degré des opérateurs linéaires injéctifs (cfr. [**26**]), que

$$D_L[L + b_+(\cdot)^+ - b_-(\cdot)^-; B(r)] = D_L[L + \eta I; B(r)] = \pm 1,$$

ce qui achève la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 1.

Démonstration du Théorème 1. Soient $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ qui sont associés aux fonctions $a_{\pm}$ et $b_{\pm}$ par le Lemme 2.1. On peut trouver un nombre réel $\rho = \rho(\epsilon) > 0$ tel que pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$a_+(t) - \epsilon \leqq x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_+(t) + \epsilon \quad \text{si } x \geqq \rho$$

$$a_-(t) - \epsilon \leqq x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_-(t) + \epsilon \quad \text{si } x \leqq -\rho.$$

Définissons

$$g_+: [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R},$$

$$g_-: [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_- \to \mathbf{R} \quad \text{et}$$

$$h: [0, 2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

comme suit:

$$g_+(t, x) = \begin{cases} x^{-1} \cdot g(t, x) & \text{si } x \geqq \rho \\ \rho^{-1} \cdot g(t, \rho) & \text{si } 0 \leqq x < \rho \end{cases}$$

$$g_-(t, x) = \begin{cases} x^{-1} \cdot g(t, x) & \text{si } x \leqq -\rho \\ (-\rho)^{-1} \cdot g(t, -\rho) & \text{si } -\rho < x < 0 \end{cases}$$

$$h(t, 0) = g(t, 0)$$

$$h(t, x) = \begin{cases} g(t, x) - g_+(t, x) & \text{si } x > 0 \\ g(t, x) - g_-(t, x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le problème (1.1)-(1.2) est equivalent à

$$\text{(2.9)} \quad x''(t) + cx'(t) + g_+(t, x^+(t))x^+(t) - g_-(t, -x^-(t))x^-(t) + h(t, x(t)) = e(t)$$

$$x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0$$

où

(2.10) $|h(t, x)| \leqq \gamma_\rho(t)$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ et tout $x \in \mathbf{R}$, pour un certain $\gamma_\rho \in L^1(0, 2\pi)$. De plus

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_+(t) - \epsilon \leqq g_+(t, x) \leqq b_+(t) + \epsilon \quad \text{sur } [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_+ \\ a_-(t) - \epsilon \leqq g_-(t, x) \leqq b_-(t) + \epsilon \quad \text{sur } [0, 2\pi] \times \mathbf{R}_-. \end{aligned}$$

Nous mettons le problème (2.9) sous la forme abstraite adéquate pour l'application de la théorie du degré topologique de la manière suivante: Soient les espaces fonctionnels X, Z et l'opérateur

$$L: \text{Dom } L \subset X \rightarrow Z$$

définis juste avant l'énoncé du Lemme 2.2 et soient les opérateurs $H: X \rightarrow Z$ et $G: X \rightarrow Z$ définis comme suit:

$$H(x) = h(\cdot, x(\cdot)) - e(\cdot),$$

$$G(x)(t) = [C(x)(t)]x(t) \equiv (C(x)x)(t)$$

où

$$C(x)(t) = g_+(t, x^+(t))\chi_{I_+(x)} + g_-(t, -x^-(t))\chi_{I_-(x)}$$

avec

$$I_+(x) = \{t \in [0, 2\pi]: x(t) > 0\}$$

$$I_-(x) = \{t \in [0, 2\pi]: x(t) < 0\}$$

et $\chi_{I_\pm}$ sont les fonctions caractéristiques correspondant à I_+ et I_- respectivement. Ainsi,

$$G(x)(t) = g_+(t, x^+(t))x^+(t) - g_-(t, -x^-(t))x^-(t).$$

Soit l'opérateur $A: X \rightarrow Z$ défini par

$$(Ax)(t) = (A_b(x)(t))x(t) \equiv (A_b(x)x)(t)$$

où

$$A_b(x)(t) = b_+(t)\chi_{I_+(x)} + b_-(t)\chi_{I_-(x)}$$

et donc

$$(Ax)(t) = b_+(t)x^+(t) - b_-(t)x^-(t).$$

Dès lors le problème (2.9) est équivalent à

(2.12) $Lx + Gx + Hx = 0, \quad x \in \text{Dom } L.$

En vertu de la propriété d'invariance par rapport à une homotopie du degré de coïncidence (**[26]**) et du Lemme 2.2, le problème (2.12) (et donc

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-027-6 Published online by Cambridge University Press

(2.9) et (1.1)) possède au moins une solution si l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille d'équations

$$(2.13)\quad Lx + (1 - \lambda)Ax + \lambda Gx + \lambda Hx = 0, \quad x \in \text{Dom } L$$

est borné indépendamment de $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $x \in \text{Dom } L$ une solution de (2.13) pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. Par construction, on a

$$\begin{aligned} &(1 - \lambda)(Ax)(t) + \lambda(Gx)(t) \\ &= [(1 - \lambda)b_+(t) + \lambda g_+(t, x^+(t))]x^+(t) \\ &- [(1 - \lambda)b_-(t) + \lambda g_-(t, -x^-(t))]x^-(t) \end{aligned}$$

où p.p. $t \in [0, 2\pi]$

$$(2.14)\quad \begin{aligned} a_+(t) - \epsilon &\leqq (1 - \lambda)b_+(t) + \lambda g_+(t, x^+(t)) \leqq b_+(t) + \epsilon \\ a_-(t) - \epsilon &\leqq (1 - \lambda)b_-(t) + \lambda g_-(t, -x^-(t)) \leqq b_-(t) + \epsilon. \end{aligned}$$

Dès lors, en vertu des relations (2.14), (2.10) et du Lemme 2.1 ci-dessus on a

$$\begin{aligned} 0 &= |Lx + (1 - \lambda)Ax + \lambda Gx + \lambda Hx|_{L^1} \\ &\geqq |Lx + (1 - \lambda)Ax + \lambda Gx|_{L^1} - |Hx|_{L^1} \\ &\geqq \delta|x|_C - |\gamma_\rho|_{L^1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(2.15)\quad |x|_C \leqq R$$

où $R \in \mathbf{R}$, R dépend uniquement de $a_\pm$, $b_\pm$ et γ_ρ. L'existence d'au moins une solution pour le problème (2.12) provient de la propriété d'existence du degré de coïncidence ([**26**]) et du Lemme 2.2 ci-dessus; ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.1. Une simple analyse de la demonstration du Théorème 1 permet de conclure que sa conclusion reste vraie si on remplace les inégalités (2.1) par

$$\begin{aligned} a_\pm(t) - \eta &\leqq \liminf_{x \to \pm\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \\ &\leqq \limsup_{x \to \pm\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq b_\pm(t) + \eta \end{aligned}$$

uniformément p.p. $t \in [0, 2\pi]$, où $0 \leqq \eta < \epsilon$; $a_\pm$, $b_\pm$ satisfont les hypothèses du Théorème 1 et $\epsilon > 0$ est associé à $a_\pm$, $b_\pm$ par le Lemme 2.1. Dès lors, on peut "traverser" les valeurs propres m^2 et $(m + 1)^2$ sur des sous-ensembles de $[0, 2\pi]$ de mesure positive.

Remarque 2.2. Le Théorème 1 généralise les resultats de [**29**, Théorème

3], [**25**, Théorème II.2]. De plus, la conclusion du Théorème 1 reste vrai si on considère le second membre du problème (1.1) comme étant une fonction

$$e: [0, 2\pi] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

continue telle que

$$|e(t, x)| \leqq C + \Delta_0(|x|)$$

où C est une constante réelle et $\Delta_0 \in \mathbf{R}$ avec Δ_0 suffisamment petit. (Signalons que le cas où $m = 0$ est largement étudié dans [**27**] dans le cadre de l'équation de Liénard.)

Le corollaire suivant généralise certains résultats de [**22**], [**21**], [**20**], [**18**], [**19**]:

COROLLAIRE 1. *Supposons que la non-linéarité g est telle que*

$$m^2 \leqq a(t) \leqq \frac{g(t, x) - g(t, y)}{x - y} \leqq b(t) \leqq (m + 1)^2 \tag{2.16}$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ *et tout* $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq y$, *où*

$$m^2 < a(t), b(t) < (m + 1)^2 \tag{2.17}$$

sur des sous-ensembles de $[0, 2\pi]$ *de mesure positive. Alors le problème* (1.1)-(1.2) *possède une solution unique pour chaque* $e \in L^1(0, 2\pi)$.

Preuve. Les conditions (2.16) et (2.17) entraînent que les hypothèses (2.1)-(2.3) sont satisfaites. Dès lors l'existence d'au moins une solution du problème (1.1)-(1.2) découle du Théorème 1.

Supposons maintenant que x et y sont deux solutions de (1.1)-(1.2). Alors $v = x - y$ est une solution du problème

$$\begin{aligned} &v''(t) + cv'(t) + g(t, v(t) + y(t)) - g(t, y(t)) = 0 \\ &v(0) - v(2\pi) = v'(0) - v'(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Considérons

$$f(t, v) = \begin{cases} v^{-1}[g(t, v + y) - g(t, v)], & \text{si } v \neq 0 \\ a(t), \quad \text{si } v = 0. \end{cases}$$

Alors, le problème (2.18) est équivalent à

$$v''(t) + cv'(t) + f(t, v(t))v(t) = 0$$

$$v(0) - v(2\pi) = v'(0) - v'(2\pi) = 0$$

où

$$a(t) \leqq f(t, v) \leqq b(t)$$

p.p. $t \in [0, 2\pi]$ et tout $v \in \mathbf{R}$. On déduit du Lemme 2.1 que $v = 0$, ce qui achève la preuve.

3. Un resultat de multiplicite. Dans cette section, nous supposerons que

$$e: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}, \quad g: [0, 2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

sont continus. De plus, nous supposerons que $g(t, \cdot)$ est une fonction de classe C^1. Il est bien connu que $e \in \mathbf{C}[0, 2\pi]$ peut être écrit sous la forme équivalente suivante:

$$e(t) = \tilde{e}(t) + s$$

où

$$s = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e(t)dt \quad \text{et}$$

$$\tilde{e} \in \tilde{C}[0, 2\pi] \equiv \left\{ e \in C[0, 2\pi]: \int_0^{2\pi} e(t)dt = 0 \right\}.$$

Sous des hypothèses du type d'Ambrosetti-Prodi [**3**] sur le comportement asymptotique de la non-linéarité, nous déduisons des bornes inférieures sur le nombre de solutions périodiques du problème (1.1). Ce résultat est basé sur la méthode de sur- et sous-solutions et sur l'indice de point fixe comme défini dans [**1**].

Par commodité, nous écrirons le problème (1.1)-(1.2) sous la forme équivalente suivante:

$$\begin{aligned} &-x''(t) - cx'(t) = g(t, x(t)) + \tilde{e}(t) + s \\ &x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definition. On dit que $\alpha \in C^2[0, 2\pi]$ est une *sous-solution* (respectivement $\beta \in C^2[0, 2\pi]$ est une *sur-solution*) du problème (3.1) si et seulement si

$$-\alpha''(t) - c\alpha'(t) \leqq g(t, \alpha(t)) + \tilde{e}(t) + s$$

$$\alpha(0) - \alpha(2\pi) = 0 = \alpha'(0) - \alpha'(2\pi)$$

respectivement

$$-\beta''(t) - c\beta'(t) \geqq g(t, \beta(t)) + \tilde{e}(t) + s$$

$$\beta(0) - \beta(2\pi) = 0 = \beta'(0) - \beta'(2\pi);$$

les sous- et sur-solutions sont dites strictes si les inégalités ci-dessus sont strictes.

En adaptant une approche due à [**2**] (utilisée pour la résolubilité du problème aux valeurs limites pour les équations aux dérivées partielles elliptiques dépendant d'un paramètre) nous démontrons le

THEOREME 2. *Supposons qu'il existe deux nombres réels* p, $q \in \mathbf{R}$ *avec* $0 < p \leqq q < +\infty$ *tels que*

$$p \leqq \liminf_{x \to +\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq \limsup_{x \to +\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq q \tag{3.2}$$

uniformément en $t \in [0, 2\pi]$. *Si de plus*

$$\limsup_{x \to -\infty} x^{-1} \cdot g(t, x) \leqq d < 0, \ (d \in \mathbf{R}) \tag{3.3}$$

uniformément en $t \in [0, 2\pi]$.

Alors, pour chaque $\tilde{e} \in \tilde{C}[0, 2\pi]$ *donné, il existe un nombre réel* $s_0 = s_0(\tilde{e}) \in \mathbf{R}(-\infty < s_0 < +\infty)$ *tel que*

(i) *le problème* (3.1) *n'a aucune solution pour* $s > s_0$,

(ii) *le problème* (3.1) *a au moins une solution pour* $s = s_0$,

(iii) *le problème* (3.1) *a au moins deux solutions distinctes pour* $s < s_0$.

Démonstration. a) Nous montrons premièrement que si le problème (3.1) possède une solution pour un certain $s^* \in \mathbf{R}$, alors il possède une solution pour chaque $s \in \mathbf{R}$ tel que $s \leqq s^*$.

En effet, supposons que $x^* \in C^2[0, 2\pi]$ est une solution du problème (3.1) pour un certain $s^* \in \mathbf{R}$ et considérons $s \leqq s^*$; l'on a immédiatement que

$$-(x^*)''(t) - c(x^*)' \geqq g(t, x^*(t)) + \tilde{e} + s.$$

Dès lors, x^* est une sur-solution de (3.1). D'autre part par l'hypothèse (3.3), il existe une constante réelle $r < x^*(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ telle que

$$g(t, r) + \tilde{e}(t) + s \geqq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 2\pi].$$

Dès lors, r est une sous-solution de (3.1). L'existence d'au moins une solution du problème (3.1) où $s \leqq s^*$ découle du théorème fondamental d'existence classique de la méthode de sur- et sous-solution (**[25]**).

b) Nous montrons ensuite que le problème (3.1) possède au moins une solution pour un certain $s^* \in \mathbf{R}$.

Soit $R \in \mathbf{R}$, $0 < R$ fixé. Nous choissions $s^* \in \mathbf{R}$ comme suit

$$s^* \leqq -\left[\max\left(\max_{[0, 2\pi]} |\tilde{e}(t)|, \max_{[0, 2\pi]} |g(t, R)|\right)\right]$$

on a que

$$g(t, R) + \tilde{e}(t) + s^* \leqq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 2\pi].$$

Dès lors, $\beta(t) = R$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ est une sur-solution de

(3.1). D'autre part, suivant l'approche utilisée dans a), on peut trouver une constante réelle $r < 0$ telle que $\alpha(t) = r$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ est une sous-solution de (3.1) pour $s = s^*$. L'existence d'au moins une solution x^* du problème (3.1) où $s = s^*$ découle du théorème fondamental de la méthode de sur- et sous-solutions. Considerons $s_0 = s_0(\tilde{e})$ défini par

$$s_0 = \sup\{s \in \mathbf{R}\text{: (3.1) possède au moins une solution}\}.$$

Clairement, par a) et b), on a $-\infty < s_0 \leqq +\infty$.

c) Il s'agit maintenant de montrer que $s_0 < +\infty$. Il découle des hypothèses (3.2) et (3.3) que la fonction $g(t, x)$ est bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle A telle que $g(t, x) \geqq A$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Supposons maintenant que l'équation (3.1) admet une solution $x \in C^2[0, 2\pi]$. En integrant (3.1) sur $[0, 2\pi]$, on obtient

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} g(t, x(t))dt = -s.$$

Donc on a nécessairement que $s \leqq -A < +\infty$. D'où $-\infty < s_0(\tilde{e}) < +\infty$ et la conclusion (i) est prouvée. Le reste de la démonstration est divisée en cinq étapes:

1ère étape. Il découle de a), b) et c) ci-dessus qu'il existe un nombre réel $s_0 = s_0(\tilde{e})(-\infty < s_0 < +\infty)$ tel que le problème (3.1) n'a aucune solution pour $s > s_0$ et a au moins une solution pour $s < s_0$.

Soit $s^* < s_0$ fixé, et choisissons $\tau \in]s^*, s_0[$. Alors il existe une fonction $\beta \in C^2[0, 2\pi]$ telle que

$$\begin{aligned} &-\beta''(t) - c\beta'(t) = g(t, \beta(t)) + \tilde{e}(t) + \tau \\ &\beta(0) - \beta(2\pi) = \beta'(0) - \beta'(2\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Comme $\tau > s^*$, on a que β est une sur-solution stricte du problème (3.1) où $s = s^*$. De plus, en vertu de l'hypothèse (3.3) il existe

$$\alpha(t) = r \in \mathbf{R}, \quad r < \min_{[0,2\pi]} \beta(t)$$

telle que α est une sous-solution de (3.1) où $s = s^*$. Dès lors

$$\alpha(t) < \beta(t) \quad \text{pour tout } t \in [0, 2\pi]. \tag{3.5}$$

Soit $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega > 0$ arbitrairement fixé tel que

$$\omega + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) > 0 \tag{3.6}$$

pour

$$t \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad x \in \left[\min_{[0,2\pi]} \alpha(t), \max_{[0,2\pi]} \beta(t)\right];$$

on définit la fonction

$$G(x, s)(t) = g(t, x(t)) + \tilde{e}(t) + s + \omega x(t).$$

Il est bien connu (cfr [**13**, **25**, **29**]) que le problème

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} &-x''(t) - cx'(t) + \omega x(t) = h(t) \\ &x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

possède une solution unique pour chaque $h \in C[0, 2\pi]$. Nous définissons alors l'operator $x = Kw$ comme étant l'unique solution du problème

$$(3.8)\qquad \begin{aligned} &-x'' - cx' + \omega x = G(w, s) \\ &x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que K est strictement croissant c'est-à-dire que si $w_1 < w_2$ sur $[0, 2\pi]$, alors $Kw_1 < Kw_2$. En effet si on considère

$$L: \text{Dom } L \subset C^1_{2\pi}[0, 2\pi] \to C[0, 2\pi]$$

défini par

$$\text{Dom } L = C^2[0, 2\pi] \quad \text{et} \quad Lx = -x'' - cx',$$

où

$$C^1_{2\pi}[0, 2\pi] = \{x \in C^1 : x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi)\},$$

on a

$$\begin{aligned} &LKw_1 + \omega Kw_1 = g(t, w_1(t)) + \tilde{e}(t) + s + \omega w_1(t) \\ &LKw_2 + \omega Kw_2 = g(t, w_2(t)) + \tilde{e}(t) + s + \omega w_2(t) \\ &Kw_1(0) - Kw_1(2\pi) = (Kw_1)'(0) - (Kw_1)'(2\pi) = 0 \\ &Kw_2(0) - Kw_2(2\pi) = (Kw_2)'(0) - (Kw_2)'(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Considérons $x = Kw_2 - Kw_1 \equiv x_2 - x_1$, on a

$$\begin{aligned} &Lx + \omega x = (g(t, w_2) - g(t, w_1)) + \omega(w_2 - w_1) \\ &x(0) - x(2\pi) = x'(0) - x'(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$(t, x) \mapsto g(t, x) + \omega x$$

est strictement croissante en x par (3.6), on a que

$$Lx + \omega x > 0 \quad \text{sur }]0, 2\pi[.$$

Dès lors en vertu des Théorèmes 3, 4 et du corollaire de [**28**, pp. 6-7] où $u = -x$, on a que $x(t) > 0$ sur $[0, 2\pi]$ c'est-à-dire $Kw_2 > Kw_1$.

D'où K est un opérateur linéaire compact, strictement positif et strictement croissant (cfr. [**1**]).

Soit

$$E = C^1_{2\pi}[0, 2\pi].$$

Le problème (3.1) est donc équivalent au problème de point fixe

$$x = KG(x, s)$$

dans E. On vérifie aisément que

$$\alpha < KG(\alpha, s^*) \quad \text{et} \quad KG(\beta, s^*) < \beta, \tag{3.9}$$

de plus, $KG(\cdot, s^*)$ est fortement croissant sur l'intervalle ordonné (cfr. [**1**])

$$X = [\alpha, \beta] = \{u \in E: \alpha \leqq u \leqq \beta\}.$$

K étant compact et X étant borné dans $C[0, 2\pi]$, on a que $\overline{KG(X, s^*)}$ est compact dans E. De plus KG: $E \times \mathbf{R} \to E$ transforme les bornés en relativement compact.

2ème étape. Soit $F \equiv KG(\cdot, s^*)$. Nous nous proposons de montrer que F possède deux points fixes distincts. Comme F est croissant, (3.9) implique que $F(X) \subset X$. Dès lors, par le théorème de point fixe de Schauder [**5**, p. 131], F possède un pointe fixe $x_0 \in X$. De plus comme F est fortement croissant, (3.9) implique que X est d'intérieur non vide $\overset{\circ}{X}$, et $x_0 \in \overset{\circ}{X}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que x_0 est l'unique point fixe de F dans X (sinon on a deux points fixes distincts dans X et on a fini la preuve sur la multiplicité). Dès lors, si B est la boule unité ouverte dans E, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que

$$x_0 + \epsilon B \subset X$$

et le degré de Leray-Schauder (cfr. [**5**, p. 134])

$$D_{LS}[I - F, x_0 + \epsilon B, 0]$$

est bien défini. Par la propriété d'unicité du degré de Leray-Schauder et les propriétés de permanence et d'excision de l'indice de point fixe (cfr. [**1**, Théorème 11.1], et la première formule de sa preuve), nous avons

$$\begin{aligned} D_{LS}[I - F, x_0 + \epsilon B, 0] &= i(F, x_0 + \epsilon B, E) \\ &= i(F, x_0 + \epsilon B, X) = i(F, X, X) = 1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

La dernière égalité étant une conséquence triviale de la convexité de X et de la propriété d'invariance par rapport à une homotopie (cfr. [**1**, p. 660], la preuve du théorème de point fixe de Schauder).

3ème étape. Supposons que

$$\left| \begin{array}{l} \text{il existe un réel } \rho > 0 \text{ tel que } x_0 + \epsilon B \subset \rho B \text{ et} \\ KG(x, s) \neq x \text{ pour tout } s \in I \equiv [s^*, s_0 + 1] \\ \text{et tout } x \in E \text{ avec } |x|_{C^1} = \rho. \end{array} \right. \tag{3.11}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1987-027-6 Published online by Cambridge University Press

Alors, par la propriété d'invariance du degré de Leray-Schauder par rapport à une homotopie on a:

$$D_{LS}[I - F, \rho B, 0] = D_{LS}[I - KG(\cdot, s_0 + 1), \rho B, 0] = 0,$$

car, en vertu de la définition de s_0, $KG(\cdot, s_0 + 1)$ n'a pas de point fixe dans E. Dès lors, la relation (3.10) entraîne que

$$D_{LS}[I - F, \rho B \backslash (x_0 + \epsilon \bar{B}), 0]$$
$$= D_{LS}[I - F, \rho B, 0] - D_{LS}[I - F, x_0 + \epsilon B, 0] = -1,$$

ce qui entraîne qu'il existe un point fixe de F dans l'ensemble

$$\rho B \backslash (x_0 + \epsilon \bar{B}).$$

Donc, l'existence d'au moins deux solutions distinctes du problème (3.1) où $s = s^*$ est acquise si l'on vérifie l'estimation *a priori* (3.11).

4ème étape. On remarque que K peut être considéré comme un endomorphisme de E qui est fortement positif et compact. Donc le rayon spectral $r(K)$ de K est positif et est la seule valeur propre de K ayant une fonction propre positive (cfr. [**1**, Théorème 3.2 (i)-(iii)]). Il s'ensuit que $r(K) = \omega^{-1}$. Les hypothèses (3.2) et (3.3) entraînent qu'il existe des réels $0 < \mu < \omega$ et $k \geqq 0$ tels que

(3.12) $\quad G(x, s) \geqq \mu x - k$

pour tout x: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ et tout $s \in I$.

Soit w l'unique solution de l'équation linéaire

$$w - \mu K w = -Kk.$$

Alors pour chaque point fixe x_s de $KG(\cdot, s)$, $s \in I$, on a, en vertu de (3.12), que

$$(x_s - w) - \mu K(x_s - w) \geqq 0.$$

Par conséquent, comme $\mu^{-1} > r(K)$, le Théorème 3.2 (iv) de [**1**, p. 633] implique que

(3.13) $\quad x_s \geqq w \quad$ pour chaque $s \in I$.

Supposons maintenant que (3.11) soit faux. Nous pouvons trouver, en passant aux sous-suites si il y a nécessité, des suites $(s_j) \subset I$ et $(x_j) \subset E$ avec

$$|x_j|_{C^1} \to +\infty$$

telles que

(3.14) $\quad x_j = KG(x_j, s_j)$

pour tout $j \in \mathbf{N}$. Posons

$$y_j = x_j/|x_j|_{C^1},$$

alors en vertu de l'hypothèse (3.2) et de la relation (3.13), on a que le sous-ensemble

$$\{G(x_j, s_j)/|x_j|_{C^1}: j \in \mathbf{N}\}$$

est borné dans $C[0, 2\pi]$.

En divisant (3.14) par $|x_j|_{C^1}$ et en utilisant la compacité de K comme une application de $C[0, 2\pi]$ dans E, on arrive à la conclusion que la suite (y_j) est relativement compact dans E. Dès lors, en passant à une sous-suite si il y a nécessité, on a

$$y_j \to y \quad \text{dans } E, \ |y|_{C^1} = 1,$$

avec, en vertu de (3.13),

$$(3.15) \quad y \geqq 0.$$

De plus, les hypothèses (3.2) et (3.3) entraînent l'existence des réels $a > 0$, $b \geqq 0$ tels que

$$G(x, s) \geqq (\omega + a)x - b$$

pour tout x: $[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ et tout $s \in I$. Dès lors, en vertu de (3.14),

$$y_j \geqq (\omega + a)Ky_j - |x_j|_{C^1}^{-1}Kb$$

et à la limite, on obtient

$$y - (\omega + a)Ky \geqq 0.$$

$(\omega + a)^{-1} < r(K)$, le Théorème 3.2 (iv) de [**1**] et la relation (3.15) impliquent que $y = 0$, une contradiction avec le fait $|y|_{C^1} = 1$.

5ème étape. Pour démontrer que le problème (3.1) a au moins une solution pour $s = s_0$, on considère la suite croissante (s_j) telle que $s_j \to s_0$. On déduit de la 4ème étape que les solutions correspondantes

$$(3.16) \quad x_j = KG(x_j, s_j), \quad j \in \mathbf{N}$$

restent bornées dans E. De plus, en vertu de (3.16), la suite (x_j) est relativement compact dans E par la compacité de K. Dès lors, en passant à une sous-suite si il y a nécessité, on a que $x_j \to x$ dans E et que $x = KG(x, s_0)$, c'est-à-dire que x est une solution du problème (3.1) avec $s = s_0$. (ii) est démontré; ce qui achève la démonstration.

Remerciements. Nous remercions sincèrement le Prof. J. Mawhin pour nous avoir suggeré ce problème et pour son aide. Nous sommes reconnaissant au juge anonyme dont les suggestions nous ont permis d'améliorer la présentation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*, SIAM Review, *18* (1976), 620-709.
2. H. Amann et P. Hess, *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edin. *84*A (1979), 145-151.
3. A. Ambrosetti et G. Prodi, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. di Mat. Pura ed Appl. *93* (1972), 231-247.
4. A. Castro, *A two point boundary value problem with jumping nonlinearities*, Proc. AMS *79* (1980), 207-211.
5. J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, Mathematical Surveys *11* (A.M.S. Providence, R.I., 1964).
6. ——— *Differential equations: introduction and qualitative theory* (Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1980).
7. E. N. Dancer, *On the Dirichlet problem for weakly non-linear elliptic partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edin. *76*A (1977), 283-300.
8. ——— *On the range of certain weakly non-linear elliptic partial differential equations*, J. Math. Pures et Appl. *57* (1978), 351-366.
9. ——— *Non-uniqueness for nonlinear boundary-value problems*, Rocky Mount. J. of Math. *13* (1983), 401-412.
10. D. G. de Figueiredo, *Lectures on boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type*, Atas do 12° Seminário Brasileiro de Análise, São Paolo (1980), 230-291.
11. P. Drabek, *Nonlinear noncoercive equations and applications*, Zeit. für Analysis and ihrer Anwendungen *1* (1983), 53-65.
12. P. Drabek et S. Invernizzi, *On the periodic bvp for the forced Duffing equation with jumping nonlinearity*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications (To appear).
13. S. Fucik, *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems* (Reidel, Dordrecht, 1980).
14. R. Iannacci et M. N. Nkashama, *On periodic solutions of forced second order differential equations with a deviating argument*, Université de Louvain, Seminaire de Math. (N.S.), Rapport *51* (Cabay, août, 1984).
15. J. L. Kadzan et F. W. Warner, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Math. *28* (1975), 567-597.
16. Ju. S. Kolesov, *Positive periodic solutions of a class of differential equations of the second order*, Soviet Math. Dokl. *8* (1967), 68-70.
17. Ju. V. Komlenko, *Solvability conditions of some boundary value problems for an ordinary linear differential equation of second order*, Soviet Math. Dokl. *8* (1967), 708-711.
18. Ju. V. Komlenko et E. L. Tonkov, *A periodic boundary value problem for an ordinary second-order differential equation*, Soviet Math. Dokl. *9* (1968), 305-308.
19. A. Lasota et Z. Opial, *Sur les solutions périodiques des équations differentielles ordinaires*, Annales Polonici Mathematici *16* (1964), 69-94.
20. A. C. Lazer et D. E. Leach, *Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance*, Ann. di Mat. Pura ed Appl. *82* (1969), 49-68.
21. D. E. Leach, *On Poincaré's perturbation theorem and a theorem of W. S. Loud*, Journal of Diff. Eq. *7* (1970), 34-53.
22. W. S. Loud, *Periodic solutions of nonlinear differential equations of Duffing type*, Proc. U.S. – Japan Semin. on Diff. and Funct. Equations (Benjamin, New York, 1967), 199-224.
23. ——— *Subharmonic solutions of second-order equations arising near harmonic solutions*, J. Diff. Eq. *53* (1984), 192-212.
24. J. Mawhin, *Contractive mappings and periodically perturbed conservative systems*, Arch. Math. (Brno) *12* (1976), 67-74.
25. ——— *Compacité, monotonie et convexité dans l'étude de problèmes aux limites semi-linéaires*, Sém. Anal. Moderne *19* (Université de Sherbrooke, Québec, 1981).

26. ——— *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems*, CBMS Regional Conference Series in Math. *40* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979).

27. J. Mawhin et M. N. Nkashama, *Asymptotic conditions for periodic solutions of forced Liénard differential equations with jumping nonlinearities* (preprint).

28. M. H. Protter et H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations* (Prentice Hall, Inc., Englewoods Cliffs, New Jersey, 1967).

29. R. Reissig, *Contractive mappings and periodically perturbed non-conservative systems*, Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e. nat. *58* (1975), 696-702.

30. B. Ruf, *Remarks and generalizations related to a recent multiplicity result of A. Lazer and P. McKenna*, Publications du Laboratoire d'Analyse numérique, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Vol. 2, fasc. 7 (1983), (preprint).

Università Degli Studi Della Calabria,
Calabria, Italia