Can. J. Math., Vol. XXIII, No. 1, 1971, pp. 116–130

RÉPARTITION DES NOMBRES HAUTEMENT COMPOSÉS DE RAMANUJAN

JEAN-LOUIS NICOLAS

1. Introduction. On dit qu'un nombre entier A est hautement composé si tout nombre M plus petit que A a moins de diviseurs que A. Si l'on définit $d(n)$ = nombre de diviseurs de n, on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \Pi_i \, p_i^{a_i}$, on a:

$$d(n) = \prod_i (a_i + 1).$$

La définition devient: A est hautement composé si et seulement si:

$$M < A \Rightarrow d(M) < d(A). \tag{1}$$

Ramanujan [**8**] a défini et étudié les nombres hautement composés, démontrant les propriétés suivantes:

Si $A = 2^{a_2} 3^{a_3} \ldots p_k^{a_{p_k}}$ est un nombre hautement composé, on a:

$$a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_{p_k} \tag{2}$$

et à l'exception de $A = 4$ et $A = 36$, on a: $a_{p_k} = 1$ [**8**, §8].

Soit $p = p_k$ le plus grand nombre premier divisant A, soit λ un nombre premier plus petit que p, Ramanujan donne des formules permettant de déterminer a_λ à une unité près lorsque λ est grand, et donnant un équivalent de a_λ lorsque λ est petit [**8**, §§18–24].

Le quotient de deux nombres hautement composés consécutifs tend vers 1, et $Q(X)$, le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X, vérifie: [**8**, § 28]

$$\lim_{X\to\infty} \frac{Q(X)}{\log X} = +\infty. \tag{3}$$

Enfin, Ramanujan définit les nombres hautement composés supérieurs [**8**, § 32] dont nous rappelons la définition et les propriétés un peu plus loin et qui sont à la base des résultats obtenus dans cet article.

En utilisant principalement le résultat de Ingham [**4**] affirmant que pour $5/8 \leqq \tau \leqq 1$, on a:

$$\pi(x + x^\tau) - \pi(x) \sim \frac{x^\tau}{\log x} \tag{4}$$

Reçu le 7 avril 1970. L'auteur de cet article a reçu l'octroi n° A 7201 du Conseil National de recherches du Canada.

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x, Erdős et Alaoglu ont donné [**1**, *Theorem* 13] une formule permettant de déterminer a_λ à une unité près quel que soit λ, et Erdős a amélioré la formule (3) en montrant [**2**]:

$$Q(X) \geqq (\log X)^{1+c} \tag{5}$$

avec $c = \frac{1}{4}(1 - \tau) \leqq 3/32$.

L'objet de cet article est d'étudier la répartition des nombres hautement composés entre deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Nous montrerons que ce problème est lié à celui des approximations diophantiennes du nombre $\theta = \log(3/2)/\log 2$ et plus précisément à l'étude des formes linéaires à coefficients entiers $\sum u_k\theta_k$, avec $\theta_k = \log(1 + 1/k)/\log 2$. Le récent théorème de Feldmann [**3**] améliorant les travaux de Baker sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques, nous dit qu'il existe des constantes c et κ telles que l'on ait: $|q\theta - p| > c/q^\kappa$ pour tous p, q entiers. Cela nous permettra de montrer que: $Q(X) \leqq (\log X)^{c'}$ (théorème 4).

Nous améliorerons les résultats de Erdős et Alaoglu sur le calcul des exposants a_λ (théorème 2) et nous augmenterons légèrement la constante c de la formule (5). Finalement nous conjecturons que:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\log Q(X)}{\log\log X} = 1 + \frac{\log(3/2) + \log(5/4)}{4\log 2} = 1.277\ldots .$$

2. Nombres hautement composés supérieurs. On dit que N est un nombre hautement composé supérieur s'il existe un nombre réel $\epsilon > 0$, tel que, pour tout M entier, on ait:

$$\frac{d(M)}{M^\epsilon} \leqq \frac{d(N)}{N^\epsilon}.$$

Propriétés [**8**, §§ 32–34]. ϵ étant donné, $0 < \epsilon < 1$, il existe un nombre hautement composé supérieur associé à ϵ dont la décomposition en facteurs premiers, $N = \Pi\, \lambda^{a_\lambda}$ est donnée par:

$$a_\lambda = \left[\frac{1}{\lambda^\epsilon - 1}\right] = \text{partie entière de } \frac{1}{\lambda^\epsilon - 1}. \tag{6}$$

On attache à $N = N_\epsilon$ les nombres:

$$x = 2^{1/\epsilon} \quad \text{et} \quad x_k = x^{\log(1+1/k)/\log 2}. \tag{7}$$

On a alors:

$$a_\lambda = k \Leftrightarrow x_{k+1} < \lambda \leqq x_k. \tag{8}$$

Soit $p \leqq x < P$ les nombres premiers encadrant x. Le plus grand nombre premier qui divise N est p et le nombre hautement composé supérieur suivant N est inférieur ou égal à NP.

PROPOSITION 1. *Soit $N = N_\epsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit r/s une fraction irréductible telle que s divise N. On note $v_\lambda(n)$ l'exposant de λ dans la décomposition en facteurs premiers de n. On a alors, λ et μ étant premiers, et a_λ et a_μ étant déterminés par* (6)*:*

$$\log d\left(\frac{r}{s}N\right) - \log d(N) = \epsilon \log \frac{r}{s} - \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)\left(\epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right)\right)$$
$$- \sum_{\mu | s} v_\mu(s)\left(\log\left(1 + \frac{1}{a_\mu}\right) - \epsilon \log \mu\right) - \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda - \sum_{\mu | s} \log V_\mu,$$

les nombres U_λ et V_μ vérifiant $U_\lambda \geqq 1$ et $V_\mu \geqq 1$ avec égalité lorsque $v_\lambda(r) = 1$ et $v_\mu(s) = 1$.

Démonstration. En raison de l'additivité des fonctions $\log d(n)$ et $\log n$, il suffit de vérifier cette formule pour $r = \lambda^k$, $s = 1$ puis pour $r = 1$, $s = \mu^k$.
Si $r = \lambda^k$, $s = 1$, posons $a_\lambda = a$, la formule nous permet de calculer U_λ:

$$\log d\left(\frac{r}{s}N\right) - \log d(N) = \log \frac{a + k + 1}{a + 1}$$
$$= \epsilon k \log \lambda - k\left(\epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a + 1}\right)\right) - \log U_\lambda$$

d'où il vient:

$$U_\lambda = \frac{a + 1}{a + 1 + k}\left(\frac{a + 2}{a + 1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left\{\left(\frac{a + i}{a + i + 1}\right)\left(\frac{a + 2}{a + 1}\right)\right\}. \tag{9}$$

Pour $k = 1$, on a $U_\lambda = 1$ et pour $i \geqq 2$,

$$\frac{a + i + 1}{a + i} < \frac{a + 2}{a + 1}$$

d'où il vient $U_\lambda > 1$ si $k \geqq 2$.
Si $r = 1$, $s = \mu^k$, on calcule de même V_μ:

$$V_\mu = \frac{a + 1}{a + 1 - k}\left(\frac{a}{a + 1}\right)^k = \prod_{i=1}^{k} \left\{\left(\frac{a + 2 - i}{a + 1 - i}\right)\left(\frac{a}{a + 1}\right)\right\}. \tag{10}$$

On trouve de même: pour $k = 1$, $V_\mu = 1$ et pour $k > 1$, $V_\mu > 1$.

Définition. Soit $N = N_\epsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit M un entier que l'on écrit: $M = (r/s) N$ avec r et s premiers entre eux. On appelle bénéfice de M relatif à N, la quantité:

$$\text{bén } M = \sum_{\lambda | r} v_\lambda(r)\left(\epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a_\lambda + 1}\right)\right) + \sum_{\lambda | r} \log U_\lambda \tag{11}$$
$$+ \sum_{\mu | s} v_\mu(s)\left(\log\left(1 + \frac{1}{a_\mu}\right) - \epsilon \log \mu\right) + \sum_{\mu | s} \log V_\mu.$$

La proposition 1 s'écrit alors:

$$\epsilon \log \frac{M}{N} = \log \frac{d(M)}{d(N)} + \text{bén } M \tag{12}$$

avec bén $M \geqq 0$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2. *Soit A un nombre hautement composé. Soit M et M' deux nombres tels que: $d(M) \leqq d(A) \leqq d(M')$. On a:*

$$\text{bén}\, A \leqq \text{bén}\, M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}.$$

Démonstration. Le nombre A étant hautement composé, la relation (1) nous donne: $d(M') \geqq d(A) \Rightarrow M' \geqq A$. La formule (12) nous donne:

$$\text{bén}\, A = \epsilon \log \frac{A}{N} - \log \frac{d(A)}{d(N)} \leqq \epsilon \log \frac{M'}{N} - \log \frac{d(M)}{d(N)} = \text{bén}\, M' + \log \frac{d(M')}{d(M)}.$$

PROPOSITION 3. *Soit A un nombre hautement composé. Soit $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. On a:* bén $A \leqq \epsilon + \log 2$.

Démonstration. Soit P le plus petit nombre premier ne divisant pas N. On sait que $N \leqq A \leqq NP$. La formule (11) nous donne: bén $NP = \epsilon \log P - \log 2$. Posant $x = 2^{1/\epsilon}$, soit $\epsilon = \log 2/\log x$, il vient:

$$\text{bén}\, NP = \epsilon \log \frac{P}{x} \leqq \epsilon \frac{P - x}{x}.$$

D'après le postulat de Bertrand, on a: $P - x \leqq x$ donc: bén $NP \leqq \epsilon$.

Ensuite, ou bien on a: $d(N) \leqq d(A) \leqq d(NP)$ et la proposition 2 nous dit: bén $A \leqq$ bén $NP + \log 2 \leqq \epsilon + \log 2$, ou bien on a: $d(NP) < d(A)$ et comme $A \leqq NP$, la formule (12) nous dit: bén $A \leqq$ bén $NP \leqq \epsilon$.

Calcul de bénéfices. Soit $N = N_\epsilon$ un nombre hautement composé supérieur. Soit k un entier fixé. On définit x et x_k par la formule (7).

Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_k. On choisit n tendant vers l'infini avec x et $n \leqq x^\tau/\log x$ avec $\tau = 5/8$. D'après la formule (4) de Ingham on a $Q_n - x_k = O(x^\tau)$, et pour x assez grand $Q_n < x_{k-1}$, ce qui entraîne par (8) que l'exposant des Q_i dans la décomposition en facteurs premiers de N est $(k - 1)$.

Posons $W_n = NQ_1 Q_2 \ldots Q_n$. On a par la formule (11):

$$\text{bén}\, W_n = \sum_{i=1}^{n} \epsilon \log Q_i - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \epsilon \sum_{i=1}^{n} \log \frac{Q_i}{x_k}.$$

Comme on a toujours $(u - 1)/u \leqq \log u \leqq u - 1$, on obtient:

$$\text{bén}\, W_n \leqq \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{x_k} \leqq \frac{\epsilon}{x_k} n(Q_n - x_k) \leqq \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x} \tag{13}$$

et:

$$\text{bén}\, W_n \geqq \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i - x_k}{Q_i} \geqq \frac{\epsilon}{Q_n} \sum_{i=1}^{n} 2(i - 1) = \frac{\epsilon}{Q_n} (n^2 - n)$$

d'où il vient:

$$\text{bén}\, W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}. \tag{14}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

Soit, de la même façon $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les nombres premiers précédant x_k, rangés par ordre décroissant à partir de x_k. Dans les mêmes conditions, en posant

$$W_n' = \frac{N}{q_1 q_2 \ldots q_n},$$

on obtient:

$$\frac{n^2 \log 2}{x_k \log x} \lesssim \text{bén } W_n' \lesssim \frac{n \log 2}{x_k^{1-\tau} \log x}. \tag{15}$$

Proposition 4. *Soit A un nombre hautement composé, et $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. On définit x et x_k par la formule* (7). *Soit p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k. On a:*

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) = O((x_k \log x)^{1/2}),$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs à x.

Démonstration. Supposons par exemple que $p_k \geqq x_k$. Posons $n = \pi(p_k) - \pi(x_k)$. Les relations (11) et (14) donnent

$$\text{bén } A \geqq \text{bén } W_n \gtrsim \frac{n^2 \log 2}{x_k \log x}.$$

D'autre part la proposition 3 nous indique: bén $A = O(1)$, d'où le résultat.

Corollaire. *Avec les mêmes notations, si $x_k \to \infty$, on a, avec $\tau = 5/8$:*

$$p_k - x_k = O(x_k^\tau).$$

Démonstration. D'après la formule (4) de Ingham, si l'on avait $p_k - x_k \geqq x_k^\tau$, cela entraînerait

$$\pi(p_k) - \pi(x_k) \geqq \frac{x_k^\tau}{\log x},$$

ce qui contredirait la proposition 4.

3. Théorème de majoration des bénéfices et applications.

Théorème 1. *Soit A un nombre hautement composé, soit $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. Posons $x = 2^{1/\epsilon}$. Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ telles que*: bén $A \leqq Cx^{-\gamma}$.

Démonstration. Nous allons construire une famille de nombres M_h, compris entre N et NP (où P désigne le nombre premier suivant x) tels que bén M_h ne soit pas trop grand et tels que les nombres $d(M_h)$ soient assez proches les uns des autres. La proposition 2 appliquée aux nombres M_h nous donnera le résultat.

Soit y un nombre réel, on note $[y]$ la partie entière de y ($[y] \leqq y < [y] + 1$), on note $\{y\} = y - [y]$ la partie fractionnaire de y et on note

$$||y|| = \min(\{y\}, 1 - \{y\})$$

la distance de y à l'entier le plus proche. Soit $\theta = \log(3/2)/\log 2$, la formule (7) donne: $x_2 = x^\theta$. Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ les nombres premiers rangés par ordre croissant à partir de x_2 et $q_1, q_2, \ldots, q_h$ les nombres premiers précédant x_2 et rangés par ordre décroissant. Définissons de même $P_1 = P, P_2, \ldots, P_h$ et $p_1, p_2, \ldots, p_h$ à partir de x.

Pour $h > 0$, on définit

$$M_h = N\frac{Q_1Q_2\ldots Q_h}{p_1p_2\ldots p_k} \qquad \text{avec } k = [h\theta].$$

Pour $h < 0$, on pose $h' = -h$ et

$$M_h = N\frac{P_1P_2\ldots P_{k'}}{q_1q_2\ldots q_{h'}} \qquad \text{avec } k' = [h'\theta] + 1.$$

On a, pour $h > 0$:

$$\delta_h = \log\frac{d(M_h)}{d(N)} = \log\frac{(3/2)^h}{2^k} = h\log(3/2) - k\log 2 = \{h\theta\}\log 2$$

et pour $h < 0$:

$$\delta_h = \log\frac{d(M_h)}{d(N)} = \log\frac{2^{k'}2^{h'}}{3^{h'}} = k'\log 2 - h'\log(3/2) = \{h\theta\}\log 2.$$

Pour $h = 0$, on pose $M_0 = N$ et $\delta_0 = 0$.

On considère les nombres M_h, $-H \leqq h \leqq H$, H étant un entier que l'on précisera par la suite, et le nombre $M = NP$. On pose:

$$\delta_M = \log\frac{d(M)}{d(N)} = \log 2,$$

et on les range par ordre croissant de δ_h. Soit u_n/v_n le $n^{\text{ième}}$ convergent principal de θ, et choisissons n de façon que:

$$v_{n+1} < H \leqq v_{n+2}. \tag{16}$$

D'après les propriétés des fractions continues (voir, par exemple [**6**, *Chapter* 1]) l'un des convergents u_n/v_n et u_{n+1}/v_{n+1}, soit u/v va vérifier $v\theta > u$, et par suite $v\theta = u + ||v\theta||$, l'autre soit u'/v' va vérifier $v'\theta < u'$ et $v'\theta = u' - ||v'\theta||$.

Pour $h \geqq 0$, on a: $(h - v')\theta = [h\theta] + \{h\theta\} - u' + ||v'\theta||$. Si $\{h\theta\} < 1 - ||v'\theta||$, on a: $\{(h - v')\theta\} = \{h\theta\} + ||v'\theta||$ et:

$$\delta_h < \delta_{h-v'} < \delta_h + ||v'\theta||\log 2$$

le nombre $M_{h-v'}$ suivra M_h dans le rangement par ordre croissant des δ_h et l'écart entre δ_h et $\delta_{h-v'}$ est inférieur à $||v'\theta||\log 2$. Si $1 - ||v'\theta|| \leqq \{h\theta\}$, on aura: $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v'\theta||\log 2$, et le nombre $M = NP$ suivra M_h, avec un écart $\delta_M - \delta_h$ inférieur à $||v'\theta||\log 2$.

Pour $h < 0$, on a de même: $(h + v)\theta = [h\theta] + \{h\theta\} + u' + ||v\theta||$. Si $\{h\theta\} < 1 - ||v\theta||$, on aura $\delta_h < \delta_{h+v} < \delta_h + ||v\theta||\log 2$. Si $1 - ||v\theta|| \leqq \{h\theta\}$, on aura $\delta_h < \delta_M < \delta_h + ||v\theta||\log 2$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

Dans tous les cas, l'écart entre deux nombres consécutifs de la famille δ_h, $-H \leqq h \leqq H$, et δ_M rangés par ordre croissant est au plus $||v\theta|| \log 2$, ou $||v'\theta|| \log 2$, c'est-à-dire au plus $||v_n\theta|| \log 2$.

D'après le théorème de Feldmann [**3**], il existe deux constantes κ et c_1 telles que, pour tous u et v entiers, on ait:

$$|v\theta - u| > \frac{c_1}{v^\kappa}.$$

On a en particulier:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| > \frac{c_1}{v_{n+1}^\kappa}.$$

Mais, d'après les propriétés des fractions continues (voir [**6**, *Chapter* 1]), on a:

$$|v_{n+1}\theta - u_{n+1}| < \frac{1}{v_{n+2}}.$$

On en déduit:

$$v_{n+2} < (1/c_1)\, v_{n+1}^\kappa.$$

La relation (16) donne:

$$H < (1/c_1)\, v_{n+1}^\kappa, \text{ soit: } v_{n+1} > (c_1 H)^{1/\kappa}.$$

Finalement, on obtient:

$$(17) \qquad ||v_n\theta|| \log 2 \leqq ||v_n\theta|| = |v_n\theta - u_n| < \frac{1}{v_{n+1}} < c_2 H^{-1/\kappa}.$$

Choisissons H de façon à avoir: $H < x_2{}^\tau < x^\tau$. Pour $-H \leqq h \leqq H$, on aura, par les relations (13) et (15):

$$(18) \qquad \text{bén } M_h \lesssim \frac{|h| \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{([h\theta] + 1) \log 2}{x^{1-\tau} \log x} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x}.$$

Considérons le nombre hautement composé A. On pose,

$$\delta_A = \log \frac{d(A)}{d(N)}.$$

Le nombre δ_A va être compris entre deux nombres consécutifs δ_h et $\delta_{h'}$ de la famille des δ_h. On aura:

$$d(M_h) \leqq d(A) \leqq d(M_{h'})$$

et

$$(19) \qquad \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} = \delta_{h'} - \delta_h \leqq ||v_n\theta|| \log 2 < c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant l'inégalité (17).

On applique la proposition 2 aux nombres A, M_h, et $M_{h'}$:

$$\text{bén } A \leqq \text{bén } M_{h'} + \log \frac{d(M_{h'})}{d(M_h)} \lesssim \frac{H \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + c_2 H^{-1/\kappa}$$

en appliquant les inégalités (18) et (19). Si l'on choisit $H = [x^{\gamma\kappa}]$, on obtient bén $A \leqq Cx^{-\gamma}$ avec $\gamma = \theta(1 - \tau)/(\kappa + 1)$, ce qui établit le théorème 1.

PROPOSITION 5. *Soit A un nombre hautement composé assez grand, $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. Ecrivons $A = (r/s)\, N$ avec r et s premiers entre eux. Alors r et s ne sont divisibles par aucun carré.*

Démonstration. D'après la relation (11), si λ^2 divisait r, on aurait:

$$\text{bén } A \geqq 2\left(\epsilon \log \lambda - \log \frac{1}{1 + a_\lambda}\right) + \log U_\lambda \geqq \log U_\lambda$$

où a_λ est défini par (6). U_λ est donné par la formule (9), en posant $a = a_\lambda$:

$$\log U_\lambda \geqq \log\left(\frac{a+1}{a+3}\frac{(a+2)^2}{(a+1)^2}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{(a+1)(a+3)}\right) \geqq \frac{1}{(a+2)^2}.$$

Soit a_2 l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de N, on a:

$$a = a_\lambda \leqq a_2 \qquad \text{et} \qquad a_2 \sim \frac{1}{2^\epsilon - 1} \sim \frac{1}{\epsilon \log 2}.$$

On aurait donc:

$$\text{bén } A \geqq \log U_\lambda \gtrsim (\epsilon \log 2)^2 = \frac{(\log 2)^4}{(\log x)^2}$$

ce qui est en contradiction avec le théorème 1 pour x assez grand.

On démontrerait de même que s n'a pas de facteurs carrés.

PROPOSITION 6. *Soit A un nombre hautement composé assez grand. Soit $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. Soit λ un nombre premier et posons $a = a_\lambda = v_\lambda(N)$ défini par (6) et $b = b_\lambda = v_\lambda(A)$. Alors:*

Si $\epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \dfrac{1}{a+1}\right) \leqq Cx^{-\gamma}$, *on a*: $b = a$ *ou* $b = a + 1$;

Si $\log\left(1 + \dfrac{1}{a}\right) - \epsilon \log \lambda \leqq Cx^{-\gamma}$, *on a*: $b = a$ *ou* $b = a - 1$;

Sinon, on a $b = a$.

Démonstration. D'après la proposition 4, on doit avoir: $|b - a| \leqq 1$.

$$\text{Si } b = a + 1, \text{ alors: bén } A \geqq \text{bén } \lambda N = \epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a+1}\right).$$

Le cas n'est possible que si

$$\epsilon \log \lambda - \log\left(1 + \frac{1}{a+1}\right) \leqq Cx^{-\gamma}$$

d'après le théorème 1.

$$\text{Si } b = a - 1, \text{ alors: bén } A \geqq \text{bén } \frac{N}{\lambda} = \log\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \epsilon \log \lambda.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

Cela n'est possible que si

$$\log\left(1+\frac{1}{a}\right) - \epsilon \log \lambda \leqq Cx^{-\gamma}.$$

Cela nous permet de déterminer l'exposant $b = v_\lambda(A)$ avec lequel λ divise A, suivant les valeurs croissantes de λ.

λ		x_{k+1}		x_k	
$\epsilon \log \lambda$		$\log\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$		$\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$	
$\frac{1}{\lambda^\epsilon - 1}$		$k+1$		k	
$a = v_\lambda(N)$	$k+1$		k		$k-1$
$b = v_\lambda(A)$	$k+1$	$k+1$ ou k	k	k ou $k-1$	$k-1$

La demi longueur des zones hachurées dans lesquelles b peut varier de une unité est:

Pour $\epsilon \log \lambda$, la proposition 6 nous donne $Cx^{-\gamma}$,

Pour $\lambda = e^{\epsilon \log\lambda/\epsilon}$, on trouve $(\lambda/\epsilon)\, Cx^{-\gamma}$ soit $O(x_k x^{-\gamma} \log x)$,

Pour

$$\frac{1}{\lambda^\epsilon - 1} = \frac{1}{e^{\epsilon\log\lambda} - 1},$$

on trouve $(\lambda^\epsilon/(\lambda^\epsilon - 1)^2)\, Cx^{-\gamma}$ soit $O(x^{-\gamma} \log^2 x)$.

Remarque. Soit p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k. Le tableau précédent nous indique:

$$p_k - x_k = O(x_k x^{-\gamma} \log x)$$

et le corollaire de la proposition 4 nous donne:

$$p_k - x_k = O(x_k^{\tau})$$

ce qui est meilleur lorsque k est petit.

THÉORÈME 2. *Soit A un nombre hautement composé et p son plus grand facteur premier. Soit $\lambda < p$ un nombre premier, et posons: $b = v_\lambda(A)$. Alors on a:*

$$\log\left(1+\frac{1}{b}\right) \geqq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma}),$$

$$\log\left(1+\frac{1}{b+1}\right) \leqq \frac{\log \lambda \log 2}{\log p} + O(p^{-\gamma}).$$

Démonstration. Associons à A le nombre hautement composé supérieur, $N = N_\epsilon$ précédant A. Pour avoir $b = v_\lambda(A)$, le tableau précédent nous dit que:

$$\log\left(1 + \frac{1}{b+1}\right) - Cx^{-\gamma} \leqq \epsilon \log \lambda \leqq \log\left(1 + \frac{1}{b}\right) + Cx^{-\gamma}.$$

Le corollaire de la proposition 4 nous donne: $p - x = O(x^\tau)$ soit $p \sim x$ et

$$\epsilon \log \lambda - \frac{\log 2 \log \lambda}{\log p} = \log 2 \log \lambda\left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log p}\right) = O\left(\log \lambda \frac{p - x}{\log^2 x}\right) = o(x^{1-\tau})$$

et comme $\gamma < 1 - \tau$, $x^{1-\tau} \sim p^{1-\tau} = o(p^{-\gamma})$.

Cela démontre le théorème 2, qui améliore les théorèmes de Alaoglu et Erdős [**1**, *Theorems* 11, 12]. La remarque précédant le théorème 2 nous permettrait de remplacer $O(p^{-\gamma})$ par une quantité plus petite, lorsque b est petit.

THÉORÈME 3. *Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X. Soit $N = N_\epsilon$ et N' deux nombres hautement composés supérieurs consécutifs. Il existe une constante c pour laquelle on a: $Q(N') - Q(N) = O(\log N)^c$.*

Démonstration. Nous allons étudier toutes les possibilités de construire un nombre hautement composé, A entre N et N', ayant un bénéfice inférieur à $Cx^{-\gamma}$.

La première ligne du tableau suivant la proposition 6 nous indique qu'un nombre premier λ a le même exposant dans N et dans A, sauf s'il est voisin d'un nombre x_k.

Il existe un entier k', tel que pour $k > k'$ il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k, soit $x_k + O(x_k\, x^{-\gamma} \log x)$. Cela arrivera lorsque $x_k\, x^{-\gamma} \log x = o(1)$ c'est-à-dire, (compte tenu de (7)) pour $\log(1 + 1/k)/\log 2 - \gamma < 0$. Cela nous donne

$$k' = \left[\frac{1}{e^{\gamma \log 2} - 1}\right]$$

et l'on voit que k' ne dépend pas de N mais seulement de γ.

Pour k assez grand, il y aura plusieurs nombres x_k compris entre deux nombres premiers consécutifs. Cela aura lieu lorsque $x_k - x_{k+1} \leqq 2$. Définissons k'' par:

$$x_{k''-1} - x_{k''} < 2 \leqq x_{k''} - x_{k''+1}.$$

Nous allons chercher un équivalent de k''. On a:

$$\log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

et

$$(20)\quad x_k - x_{k+1} = x_k\left\{1 - \exp\left(\frac{\log(1-(k+1)^{-2})\log x}{\log 2}\right)\right\} \sim x_k \frac{\log x}{k^2 \log 2}.$$

Pour $k = C \log x/\log\log x$, on a:

$$x_k - x_{k+1} \sim x_k \frac{(\log\log x)^2}{C^2 \log x \log 2}$$

et

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \log x \frac{\log(1+1/k)}{\log 2} + 2\log_3(x) - \log\log x + O(1),$$

$$\log(x_k - x_{k+1}) = \frac{\log\log x}{C\log 2} - \log\log x + 2\log_3(x) + O(1).$$

On voit que, pour $C > 1/\log 2$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = 0$, et pour $C < 1/\log 2$, $\lim(x_k - x_{k+1}) = +\infty$. On en conclut:

$$k'' \sim \frac{\log x}{\log\log x \log 2}$$

et par la relation (20),

$$2 \sim x_{k''} \frac{\log x}{k^2 \log 2},$$

$$x_{k''} \sim \frac{2}{\log 2} \frac{\log x}{(\log\log x)^2}.$$

Regardons maintenant quel peut être l'exposant $b_\lambda = v_\lambda(A)$ de λ dans la décomposition en facteurs premiers de A par rapport à $a_\lambda = v_\lambda(N)$.

Pour $\lambda \leqq x_{k''}$ il y a trois choix au plus pour b_λ: $a_\lambda + 1$, a_λ et $a_\lambda - 1$ à cause de la proposition 5.

Pour $x_{k''} < \lambda < x_{k'}$, pour chaque valeur de k, il y aura au plus un nombre premier dans la zone hachurée de x_k. Pour un tel nombre premier, il y aura deux choix pour b_λ.

Pour $2 \leqq k \leqq k'$, pour chaque nombre k, il y aura au plus $2(x_k \log x)^{1/2}$ possibilités de choisir p_k le plus grand nombre premier divisant A avec l'exposant k, à cause de la proposition 4.

Enfin, pour $k = 1$, il y aura en général une et au plus deux possibilités de choisir p_1, le plus grand facteur premier de A, pour que le nombre A ainsi construit soit entre N et N'.

Dans ces deux derniers cas, la relation (2) montre que le choix des p_k détermine exactement les exposants b_λ pour tous les nombres λ. On aura donc:

$$(21)\qquad Q(N') - Q(N) \leqq 2\left(\prod_{k=2}^{k'} 2(x_k \log x)^{1/2}\right)(2^{k''-k'})(3^{\pi(x^{k''})}).$$

Or, on a: $x_{k''} = o(\log x)$ et $k'' = o(\log x)$ donc:

$$\log(Q(N') - Q(N)) \leqq \sum_{k=2}^{k'} \tfrac{1}{2} \log x_k + o(\log x).$$

Mais, d'après (7),

$$\sum_{k=2}^{k'} \tfrac{1}{2} \log x_k = \frac{\log x}{2 \log 2} \sum_{k=2}^{k'} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{\log \frac{1}{2}(k' + 1)}{2 \log 2} \log x,$$

On trouve donc:

$$Q(N') - Q(N) = O(x^c) \quad \text{avec } c > \frac{\log \frac{1}{2}(k' + 1)}{2 \log 2}.$$

Comme on a: $x \sim \log N$ [**8**, § 39], cela démontre le théorème 3.

THÉORÈME 4. *Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X. On a: $Q(X) = O(\log X)^{1+c}$, c ayant la même valeur que dans le théorème* 3.

Démonstration. On a, avec le théorème 3:

$$Q(X) \leqq \sum_{N \leqq X} (Q(N') - Q(N)) = O\left(\sum_{N \leqq X} (\log N)^c\right)$$

les sommations s'effectuant sur les nombres hautement composés supérieurs N précédant X, et N' désignant le nombre hautement composé supérieur suivant N. On a ensuite:

$$\sum_{N \leqq X} (\log N)^c \leqq (\log X)^c \sum_{N \leqq X} 1 \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{\log \log X}.$$

Cette dernière équivalence est donnée par Ramanujan [**8**, § 44]. Une évaluation plus précise donnerait:

$$\sum_{N \leqq X} (\log N)^c \sim \sum_{\substack{\lambda \leqq \log X; \\ \lambda \text{ premier}}} \lambda^c \sim \frac{(\log X)^{c+1}}{(c + 1) \log \log X}.$$

Cette dernière équivalence étant donnée par [**5**, § 55].

4. Minoration de $Q(X)$.

THÉORÈME 5. *Soit $Q(X)$ le nombre de nombres hautement composés inférieurs à X. Il existe une constante $c' > 0$ telle que $Q(X) \geqq (\log X)^{1+c'}$.*

Démonstration. Ce théorème a déjà été démontré par Erdős [**2**]. Nous allons obtenir ici une valeur de c' un peu plus grande. La méthode de démonstration est essentiellement la même.

Soit $\theta = \log(3/2)/\log 2$ et $\theta' = \log(5/4)/\log 2$. On considère les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$, où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y, avec u, v entiers, $|u| \leqq U$ et $|v| \leqq V$, U et V étant deux nombres que l'on déterminera par la suite. Les $(2U + 1)(2V + 1)$ nombres de cette forme sont tous distincts et tous compris entre 0 et 1. Si l'on divise le segment [0, 1] en $4UV + 2(U + V)$ intervalles de même longueur, l'un de ces intervalles contiendra deux points:

$\{u_1\theta + v_1\theta'\} < \{u_2\theta + v_2\theta'\}$ d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, et on aura:

$$\{(u_2 - u_1)\theta + (v_2 - v_1)\theta'\} \leqq \frac{1}{4UV + 2(U + V)}.$$

Posons $u = u_2 - u_1$, $v = v_2 - v_1$, et $w = -[u\theta + v\theta']$, on a: $|u| \leqq 2U$, $|v| \leqq 2V$ et

$$(22) \qquad 0 < u\theta + v\theta' + w = \{u\theta + v\theta'\} \leqq \frac{1}{4UV + 2(U + V)} \leqq \frac{1}{4UV}.$$

Soit A un nombre hautement composé, $N = N_\epsilon$ le nombre hautement composé supérieur précédant A. On définit x et x_k par (7) et, en particulier, $x_2 = x^\theta$ et $x_4 = x^{\theta'}$. Soit r, q, p les plus grands nombres premiers divisant A avec les exposants 4, 2, 1. D'après la proposition 4, on a:

$$\pi(r) - \pi(x_4) = O((x_4 \log x)^{1/2}), \ \pi(q) - \pi(x_2) = O((x_2 \log x)^{1/2}),$$

et

$$\pi(p) - \pi(x) = O((x \log x)^{1/2}).$$

Les nombres U et V étant choisis, et u et v vérifiant (22) on construit un nombre A' tel que:

$$\log d(A') = \log d(A) + (u\theta + v\theta' + w) \log 2$$

dont la forme varie avec le signe de u, v, w. Dans le cas $u > 0, v > 0, w < 0$, on a:

$$A' = A \frac{Q_1 Q_2 \ldots Q_u R_1 R_2 \ldots R_v}{p_1 p_2 \ldots p_w}$$

où Q_1, Q_2, ... sont les nombres premiers suivant q, R_1, R_2, ... les nombres premiers suivant r, et $p_1 = p$, p_2, ... les nombres premiers précédant p.

Si U est inférieur à $x_2^\tau/\log x_2$ on aura:

$$\pi(Q_u) - \pi(x_2) \leqq |u| + |\pi(q) - \pi(x_2)| = O\left(\frac{x_2^\tau}{\log x_2}\right)$$

et on aura aussi: $|Q_u - x_2| = O(x_2^\tau)$. Si, de même $V \leqq x_4^\tau/\log x_4$, on aura $|R_v - x_4| = O(x_4^\tau)$. Comme $w = O(U + V)$, on aura également $|p_w - x| = O(x^\tau)$. On peut donc appliquer les formules (13) et (15):

$$\text{bén}\, A' - \text{bén}\, A \leqq \frac{u \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{v \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x} + \frac{w \log 2}{x^{1-\tau} \log x},$$

$$(23) \qquad \text{bén}\, A' - \text{bén}\, A \leqq \left(\frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}\right)(1 + o(1)),$$

on a d'autre part:

$$\log \frac{d(A')}{d(A)} = (u\theta + v\theta' + w) \log 2 \leqq \frac{1}{4UV}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1971-012-6 Published online by Cambridge University Press

La relation (12) appliquée à A puis à A' donne:

$$\epsilon \log \frac{A'}{A} = \log \frac{d(A')}{d(A)} + \text{bén } A' - \text{bén } A \lesssim \frac{1}{4UV} + \frac{2U \log 2}{x_2^{1-\tau} \log x} + \frac{2V \log 2}{x_4^{1-\tau} \log x}.$$

On choisit $U = x^\alpha$, $V = x^\beta$ avec $\alpha = \frac{1}{3}(2\theta - \theta')(1 - \tau)$, $\beta = \frac{1}{3}(2\theta' - \theta)(1 - \tau)$ et on obtient:

$$\epsilon \log \frac{A'}{A} = O(x^{-(\alpha+\beta)}) = O(x^{\frac{1}{3}(\theta+\theta')(1-\tau)}),$$

d'où l'on tire, en posant $c' < \frac{1}{3}(\theta + \theta')(1 - \tau)$:

$$A' \leqq A\left(1 + \frac{1}{x^{c'}}\right)$$

et comme $x \sim \log A$, on obtient:

$$A' \leqq A\left(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}}\right).$$

Cette inégalité a été obtenue par Erdős [**2**] avec

$$c' = \frac{1 - \tau}{4} = \frac{3}{32}.$$

Ici nous avons $c' < \frac{1}{3}(\theta + \theta')(1 - \tau) = 0.113\ldots$. La fin de la démonstration est la même. Comme $d(A') > d(A)$, on a $A' > A$ et il existe un nombre hautement composé A'' tel que $A < A'' \leqq A'$ qui vérifie

$$A'' \leqq A\left(1 + \frac{1}{(\log A)^{c'}}\right).$$

Cela entraîne: $Q(X) \geqq (\log X)^{1+c'}$.

5. Conclusion. Si l'on supposait les nombres premiers très bien répartis, c'est-à-dire distants de $\log x$ au voisinage de x, les formules (13), (14), et (15) deviendraient:

$$\text{bén } W_n \sim \frac{n^2 \log 2}{2x_k}.$$

La formule (23) deviendrait:

$$\text{bén } A' - \text{bén } A \sim \frac{u^2 \log 2}{2x_2} + \frac{v^2 \log 2}{2x_4},$$

et l'on trouverait $c' = \frac{1}{4}(\theta + \theta') = 0.277\ldots$ dans le théorème 5.

D'autre part, si l'on avait pour les formes linéaires en θ et θ' une relation:

$$\frac{1}{K(\eta)(uv)^{1+\eta}} < |u\theta + v\theta' + w|$$

pour tout $\eta > 0$, cela nous permettrait d'obtenir $\gamma = \frac{1}{4}(\theta + \theta') - \eta$ dans le théorème 1 et on obtiendrait dans la démonstration du théorème 3, $k' = 5$. Comme les nombres

$$\frac{\log(4/3)}{\log 2} = 1 - \theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\log(6/5)}{\log 2} = \theta - \theta'$$

sont rationnellement dépendants de 1, θ, θ', les nombres premiers voisins de x_3 et x_5 n'apportent pas de valeurs nouvelles à la fonction d et le produit dans la formule (21) ne porterait que sur $k = 2$ et $k = 4$. On en déduirait alors:

$$(\log X)^{c-\eta} \leqq Q(X) \leqq (\log X)^{c+\eta} \quad \text{avec } c = 1 + \tfrac{1}{4}(\theta + \theta') = 1.277 \ldots .$$

Si, par contre les nombres $\{u\theta + v\theta'\}$ étaient mal répartis, il est vraisemblable que la quantité $\log Q(X)/\log \log X$ n'aurait pas de limite.

Bibliographie

1. L. Alaoglu and P. Erdős, *On highly composite and similar numbers*, Trans. Amer. Math. Soc. *56* (1944), 448–469.
2. P. Erdős, *On highly composite numbers*, J. London Math. Soc. *19* (1944), 130–133.
3. N. Feldmann, *Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers*, Mat. Sb. *77* (*119*) (1968), 423–436 (en russe); Math. USSR-Sb. *6* (1968), 393–406 (Traduction de l'Amer. Math. Soc.).
4. A. E. Ingham, *On the difference of two consecutive primes*, Quart. J. Math. Oxford. Ser. *8* (1937), 255.
5. E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung des Primzahlen* (Teubner, Leipzig–Berlin, 1909).
6. S. Lang, *Introduction to Diophantine approximations* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1966).
7. J.-L. Nicolas, *Ordre maximal d'un élément du groupe des permutations et highly composite numbers*, *Bull. Soc. Math. France 97* (1969), 129–191.
8. S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 *14* (1915), 347–400; Collected papers, pp. 78–128.

Université de Sherbrooke,
Sherbrooke, Québec;
116 Avenue St. Exupéry,
92 Antony, France