*Sixth Meeting, April 10th, 1895.*

JOHN M'COWAN, Esq., M.A., D.Sc., President, in the Chair.

## On the Operation of Division.

By JOHN M'COWAN, M.A., D.Sc.

## Sur les cubiques gauches équilatères.

By CH. BIOCHE.

J'appelle *cubiques gauches équilatères* les cubiques qui ont trois asymptotes rectangulaires deux à deux. Ces cubiques gauches possèdent des propriétés qui rappellent les propriétés classiques de l'hyperbole équilatère.

1. Si on prend pour origine des coordonnées un point d'une cubique équilatère E et pour axes des parallèles aux asymptotes, les coordonnées des points de cette cubique peuvent s'exprimer par

$$\text{(E)} \qquad X = \frac{A}{t-\alpha} \qquad Y = \frac{B}{t-\beta} \qquad Z = \frac{C}{t-\gamma}$$

A, B, C, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des constantes, et $t$ un paramètre variable. En effet il est visible que ces équations représentent une cubique équilatère passant par l'origine et ayant ses asymptotes parallèles aux axes. Comme une cubique est déterminée par six points, pour montrer qu'on a les équations le plus générales il suffit de montrer qu'on peut disposer des constantes de façon que la courbe E passe par deux points arbitrairement choisis $(X_1 Y_1 Z_1)$ $(X_2 Y_2 Z_2)$. On a alors trois groupes de deux équations telles que

$$A + aX_1 = t_1 X_1$$
$$A + aX_2 = t_2 X_2 .$$

Les deux équations que je viens d'écrire donnent $A$ et $a$, si $X_1$ est différent de $X_2$. D'ailleurs on peut remarquer que si on avait $X_1 = X_2$, il y aurait une droite rencontrant la courbe en trois points, cette courbe ne serait donc pas une cubique gauche.

2. Supposons que l'on considère quatre points 1, 2, 3, 4 de la courbe E, correspondant à des valeurs $t_1$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ du paramètre variable. Les coefficients directeurs de la corde (1, 2) sont proportionals à

$$\frac{A}{(t_1 - a)(t_2 - a)}, \quad \frac{B}{(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)}, \quad \frac{C}{(t_1 - \gamma)(t_2 - \gamma)}$$

Donc la condition pour que deux cordes (1, 2), (3, 4) soit rectangulaires s'exprime par l'equation

$$\text{(I)} \quad \frac{A^2}{(t_1 - a)(t_2 - a)(t_3 - a)(t_4 - a)} + \frac{B^2}{(t_1 - \beta)(t_2 - \beta)(t_3 - \beta)(t_4 - \beta)} + \frac{C^2}{(t_1 - \gamma)(t_2 - \gamma)(t_3 - \gamma)(t_4 - \gamma)} = 0$$

L'interprétation de cette équation donne diverses propriétés géométriques.

3. D'abord remarquons qu'elle est symétrique par rapport aux quatre indices. D'ici il resulte que les six arêtes du tétraèdre (1, 2, 3, 4) sont orthogonales.

Donc, *si deux cordes d'une cubique équilatère sont orthogonales, les extrémités de ces cordes sont les sommets d'un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales ;* ou autrement dit *les droites qui joignent les extrémités de ces cordes sont deux à deux orthogonales.* Sous cette dernière forme l'enoncé s'applique, sans modification, au cas de l'hyperbole équilatère.

4. L'équation( I) est du $2^e$ degré par rapport à $t_4$, par example; autrement dit, si on se donne trois points 1, 2, 3, il y a deux points M et M′ qui peuvent former avec les trois premiers un tétraèdre à arêtes opposées orthogonales. Or on sait que chaque sommet d'un tel tétraèdre se projette au point de rencontre des hauteurs de la face opposée. Donc M et M′ sont sur la perpendiculaire élevée sur le plan 1, 2, 3, au point de rencontre des hauteurs du triangle correspondant. Donc *la corde d'une cubique équilatère qui est perpendiculaire à un plan, rencontre ce plan au point de concours des hauteurs du triangle formé par ses trois points d'intersection avec la cubique.*

Inversement, *le lieu des points de concours des hauteurs des triangles déterminés par la cubique sur des plans parallèles est la corde perpendiculaire à ces plans.*

En particulier on voit qu'il y a deux plans, parmi ceux qui sont parallèles à un plan donné qui coupent une cubique équilatère en trois points formant un triangle rectangle. Ce sont ceux qui passent par les extrémités de la corde correspondante. Si cette corde devient tangente il n'y a plus qu'un plan, c'est le plan normal.

Le théorème général qui précède peut s'énoncer encore de la façon suivante, *si l'on projette orthogonalement une cubique équilatère sur un plan le point double de la projection est le point de concours des hauteurs du triangle formé par les points où le plan de projection coupe la cubique.*

5. Par chaque point de la cubique on peut mener une infinité de systèmes de trois cordes rectangulaires. Cela peut se déduire de ce qui précède, ou plus simplement de cette remarque que tout cône contenant la cubique admet évidemment trois arêtes rectangulaires paralléles aux trois asymptotes, et par suite admet une infinité de pareils systèmes.

On sait que si un angle droit est inscrit dans une hyperbole équilatère, la corde qui joint les points d'intersection des côtes de l'angle avec la courbe est parallèle à la normale au sommet de l'angle droit. On a un théorème analogue pour les cubiques équilatères. *Si un trièdre trirectangle ayant son sommet sur une cubique équilatère a ses trois arêtes s'appuyant sur la cubique, le plan qui passe par les trois points où ces arêtes rencontrent la cubique est parallèle au plan normal au sommet.*

https://doi.org/10.1017/S0013091500031564 Published online by Cambridge University Press

Il suffit de démontrer le théorème pour le cas où le sommet de l'angle est à l'origine puisque l'origine est un point quelconque de la courbe.

Soient $(X_1Y_1Z_1)$, $(X_2Y_2Z_2)$, $(X_3Y_3Z_3)$ les points où les arêtes du trièdre rencontrent la cubique. Ces arêtes étant deux à deux rectangulaires, on a trois relations de la forme

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$$

ou $$\frac{A^2}{(t_1-\alpha)(t_2-\alpha)} + \frac{B^2}{(t_1-\beta)(t_2-\beta)} + \frac{C^2}{(t_1-\gamma)(t_2-\gamma)} = 0$$

Or si l'on remarque que

$$\frac{A}{t_1-\alpha} - \frac{A}{t_2-\alpha} = \frac{(t_2-t_1)A}{(t_1-\alpha)(t_2-\alpha)}$$

on voit que l'équation précédente peut s'écrire

$$A \cdot \frac{A}{t_1-\alpha} + B \cdot \frac{B}{t_1-\beta} + C \cdot \frac{C}{t_1-\gamma} = A \cdot \frac{A}{t_2-\alpha} + B \cdot \frac{B}{t_2+\beta} + C \cdot \frac{C}{t_2-\gamma}$$

ou $$AX_1 + BY_1 + CZ_1 = AX_2 + BY_2 + CZ_2 .$$

Ces expressions sont évidemment égales à

$$AX_3 + BY_3 + CZ_3 .$$

Les trois points considerés sont donc à la même distance du plan

$$AX + BY + CZ = 0$$

or il est facile de vérifier que ce plan est le plan normal.