Can. J. Math. Vol. 45 (1), 1993 pp. 176–224

MINORATIONS DE COMBINAISONS LINÉAIRES DE LOGARITHMES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

A la mémoire du Professeur Theodor Schneider

MICHEL WALDSCHMIDT

RESUME On sait que la méthode classique de Schneider (en une variable) permet de minorer des combinaisons linéaires de deux logarithmes de nombres algébriques avec des coefficients algébriques Nous généralisons cette méthode en plusieurs variables pour minorer des combinaisons linéaires de plusieurs logarithmes

ABSTRACT It's well known that Schneider's classical method (involving functions of a single complex variable) yields lower bounds for linear combinations of two logarithms of algebraic numbers with algebraic coefficients We extend this method to functions of several variables and deduce an estimate for linear combinations of several logarithms

1. **Introduction.** La méthode de Gel'fond-Baker (voir par exemple [B]) permet de minorer des nombres de la forme

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \alpha_i$$

quand α_i et β_i, $(1 \leq i \leq n)$, sont des nombres algébriques, avec, disons, $\beta_n = -1$. Cette méthode fait intervenir des systèmes d'équations de la forme

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{L_n-1} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \beta_i)^{\tau_i} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\lambda_i h} = 0, \qquad (1.1)$$
$$0 \leq \tau_i < T, \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad 0 \leq h < H.$$

On interprète le membre de gauche de (1.1) en disant que, quand $|\Lambda|$ est petit, il est proche de la dérivée d'ordre $(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ de la fonction

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{L_n-1} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} \prod_{i=1}^{n-1} e^{(\lambda_i + \lambda_n \beta_i) z_i} \qquad (1.2)$$

au point $(h \log \alpha_1, \ldots, h \log \alpha_{n-1})$. La méthode transcendante commence par la construction de nombres (rationnels, ou algébriques) $p_\lambda = p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$, non tous nuls, tels que, pour des valeurs convenables des paramètres $L_1, \ldots, L_n$, T et H, les valeurs de toutes ces

Reçu par les éditeurs le July 11, 1991
Classification de l'AMS par sujet 11 J 86

dérivées en tous les points considérés soient petites. Les inégalités de Liouville entraînent alors que le système d'équations (1.1) est satisfait.

Un lemme de zéros avec multiplicités (voir [P], ainsi que [PW2]) montre que le système (1.1) n'a de solution non triviale p_λ que dans des cas essentiellement "dégénérés". Par exemple si

$$T^{n-1}H < L_1 \cdots L_n,$$

alors la situation est dégénérée, puisque le système (1.1) possède plus d'inconnues que d'équations.

Dans le cas $n = 2$, il s'agit de minorer une forme linéaire homogène en deux logarithmes et la méthode esquissée ci-dessus est celle de Gel'fond [G] ; on peut l'étendre à plusieurs variables pour traiter le cas général $n \geq 2$.

Cette présentation évite toute extrapolation si on construit la fonction auxiliaire en utilisant le Théorème 3.1 de [W2]. Quand on effectue les calculs, on obtient une minoration de $|\Lambda|$ de la forme

$$|\Lambda| \geq \exp\{-C(n)D^{n^2}(\log B)^{n^2-n}\log A_1 \cdots \log A_n\},$$

où $A_1, \ldots, A_n$, B sont des nombres $\geq e$, avec $B \geq D \log A_i$, $(1 \leq i \leq n)$, $\log A_i$ est un majorant de la hauteur logarithmique absolue de α_i et aussi de $|\log \alpha_i|$, $(1 \leq i \leq n)$, $\log B$ est un majorant de la hauteur logarithmique absolue de chacun des nombres $\beta_1, \ldots, \beta_n$, et D est le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$. La definition de la hauteur logarithmique absolue $h(\alpha)$ d'un nombre algébrique α est rappelée au paragraphe 2 avant le Lemme 3.5. Enfin $C(n)$ est un nombre positif qui ne dépend que du nombre n de logarithmes et peut être entièrement explicité.

Le fait nouveau essentiel dans la méthode de Baker (par opposition à celle de Gel'fond) consiste à exploiter le fait que les points de $\mathbb{C}^{n-1}$ en lesquels on a dérivé la fonction ci-dessus sont tous situés sur une même droite complexe. On peut donc utiliser une formule d'extrapolation valable pour les fonctions d'une seule variable complexe et la démonstration comporte une récurrence permettant d'augmenter progressivement le nombre de zéros de la fonction auxilliaire. On obtient ainsi :

$$|\Lambda| \geq \exp\{-C(n)D^{n+2}(\log B)^2 \log A_1 \cdots \log A_n\}.$$

Les meilleures estimations actuellement connues (*cf.* [B], [W1], [BGMMS], [LMPW], [PW2], [Wü]) sont de la forme :

$$|\Lambda| \geq \exp\{-C(n)D^{n+2}\log B \log A_1 \cdots \log A_n\}.$$

Pour obtenir cette amélioration, on remplace (1.2) par une fonction de n variables :

$$\sum_{\lambda_0=0}^{L_0-1} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{L_n-1} p_{\lambda_0,\ldots,\lambda_n} z_0^{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n-1} e^{(\lambda_i+\lambda_n\beta_i)z_i}.$$

La dérivée d'ordre $(\tau_0, \ldots, \tau_{n-1})$ de cette fonction au point $(h, h\log\alpha_1, \ldots, h\log\alpha_{n-1})$ est proche du nombre algébrique

$$(1.3)\qquad \sum_{\lambda_0=0}^{L_0-1}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{L_n-1} p_{\lambda_0,\ldots,\lambda_n}\frac{\lambda_0!}{(\lambda_0-\tau_0)!}h^{\lambda_0-\tau_0}\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i+\lambda_n\beta_i)^{\tau_i}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\lambda_i h}.$$

Si on effectue les estimations brutalement, on trouve $\log B\log\log B$ là où on attend $\log B$; pour obtenir le dernier raffinement on utilise les polynômes de Fel'dman.

Nous voulons ici obtenir des minorations de $|\Lambda|$ par une généralisation de la méthode de Schneider [S]. Le principe est exposé dans [W3] et dans le paragraphe 1 de [W4] : on transpose le système d'équations. Commençons, pour simplifier, par transposer (1.1) : nous sommes amenés à considérer le système d'équations suivant :

$$(1.4)\qquad \sum_{\tau_1=0}^{T-1}\cdots\sum_{\tau_{n-1}=0}^{T-1}\sum_{h=0}^{H-1} q_{\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},h}\prod_{i=1}^{n-1}(\lambda_i+\lambda_n\beta_i)^{\tau_i}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\lambda_i h}=0,$$
$$0\le\lambda_i<L_i,\quad (1\le i\le n).$$

Pour $n = 2$ on reconnait la méthode de Schneider, qui nous a déjà permis, dans [MW1,2,3], de donner des résultats numériques beaucoup plus précis que ceux que l'on déduit de la méthode de Gel'fond-Baker, mais seulement pour des formes linéaires homogènes en deux logarithmes et avec une dépendance en la hauteur des β_i en $(\log B)^2$.

Le lemme de zéros (sans multiplicités, mais en version multihomogène) de Philippon [P] permet d'affirmer que (1.4) n'a pas de solution non triviale en dehors de cas "dégénérés", tels que

$$T^{n-1}H > L_1\cdots L_n.$$

Il faut noter que le lemme de zéros correspondant à la situation (1.4) est plus simple que celui de (1.1), puisqu'il n'y a pas de dérivations dans (1.4). Les principaux arguments pour le démontrer se trouvent déjà dans le travail inaugural de Masser [Ma] (voir en particulier p. 94).

Il faut encore construire des entiers $q_{\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},h} = q_{\tau,h}$, non tous nuls, satisfaisant (1.4), sous l'hypothèse que $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont algébriques et que $|\Lambda|$ est petit. On introduit la fonction de $n-1$ variables

$$\varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{\tau_1=0}^{T-1}\cdots\sum_{\tau_{n-1}=0}^{T-1}\sum_{h=0}^{H-1} q_{\tau,h}\prod_{i=1}^{n-1} z_i^{\tau_i}\alpha_i^{z_i h},$$

et on interprète le membre de gauche de (1.4) en écrivant qu'il est proche du nombre

$$\varphi(\lambda_1+\lambda_n\beta_1, \ldots, \lambda_{n-1}+\lambda_n\beta_{n-1}).$$

Les minorations de $|\Lambda|$ que l'on obtient en développant ces arguments par la méthode de [W2] sont les mêmes que celles que donne la méthode de Gel'fond en plusieurs variables et donc moins bonnes que celles de la méthode de Baker.

Pour transposer l'astuce de Baker dans l'étude, par la méthode de Schneider, des formes linéaires en plusieurs logarithmes, on reprend le principe de construction de la fonction auxiliaire de [W2], mais on considère plus soigneusement le rang du système d'inégalités que l'on résout par le lemme de Siegel, comme cela est expliqué dans [W3].

On obtient alors la minoration avec $(\log B)^2$. Pour $n = 2$ on retrouve la situation de [MW1,2,3]. Le raffinement qui reste à introduire pour obtenir $\log B$ consiste à transposer (1.3). L'identité

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\tau}(z^{\lambda_0})_{z=h} = \left(\frac{d}{dz}\right)^{\lambda_0}(z^{\tau}e^{hz})_{z=0}$$

nous amène à travailler avec une fonction de n variables

$$\varphi(z_0,\ldots,z_{n-1}) = \sum_{\tau_0=0}^{T-1}\cdots\sum_{\tau_{n-1}=0}^{T-1}\sum_{h=0}^{H-1} q_{\tau,h}z_0^{\tau_0}e^{hz_0}\prod_{i=1}^{n-1} z_i^{\tau_i}\alpha_i^{z_i h},$$

et à considérer les nombres

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\lambda_0}\varphi(0,\lambda_1+\lambda_n\beta_1,\ldots,\lambda_{n-1}+\lambda_n\beta_{n-1}).$$

Pour produire notre fonction auxiliaire nous utilisons les constructions générales de [W3].

Le théorème principal (Théorème 2.18) est énoncé dans le paragraphe 2. En voici un corollaire.

COROLLAIRE 1.5. *On désigne par $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres algébriques non nuls ; pour $i = 1,\ldots,n$, on choisit une détermination $\log\alpha_i$ du logarithme complexe de α_i et on suppose que les nombres $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On pose*

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\mathbb{Q}] \text{ et } g = [\mathbb{R}(\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n):\mathbb{R}].$$

Soient $A_1,\ldots,A_n, A$, E et f des nombres réels positifs vérifiant

$$\log A_i \ge h(\alpha_i),\quad (1\le i\le n),\quad A = \max\{A_1,\ldots,A_n\}$$

et

$$e \le E \le \min\left\{A_1^D,\ldots,A_n^D,\frac{nD}{f}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\log\alpha_i|}{\log A_i}\right)^{-1}\right\}.$$

Soient $b_1,\ldots,b_n$ des nombres entiers rationnels avec $b_n \ne 0$. On pose

$$M = \max_{1\le j<n}\left\{\frac{|b_n|}{\log A_j}+\frac{|b_j|}{\log A_n}\right\},$$

$$Z_0 = \max\left\{7+3\log n,\frac{g}{D}\log E,\log\left(\frac{D}{\log E}\right)\right\},\quad G_0 = \max\{4nZ_0\,;\,\log M\}$$

et

$$U_0 = \max\{D^2\log A, D^{n+2}G_0Z_0\log A_1\cdots\log A_n(\log E)^{-n-1}\}.$$

Le nombre

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n.$$

est alors minoré par

$$|\Lambda| \geq \exp\Big\{-1500g^{-n-2}2^{2n}n^{3n+5}\Big(1+\frac{g}{f}\Big)^n U_0\Big\}.$$

Dans [LMPW] et [BGMMS] la dépendance en les b_i faisait intervenir un terme correspondant à notre paramètre M, mais avec l'hypothèse $\log A_1 \leq \cdots \leq \log A_n$; ici nous n'avons pas besoin d'une telle hypothèse. Le Corollaire 1.5 conduit à une amélioration du Théorème 2 de [LMPW] : dans la définition de Y, le terme $\big(\log(EDV_{n-1}^+)\big)^2$ peut y être remplacé par $\log(EDV_{n-1}^+)$.

Dans le présent texte, après avoir énoncé le théorème principal (Théorème 2.18), nous introduisons quelques lemmes préliminaires (paragraphe 3), nous construisons la fonction auxiliaire (Proposition 4.1), puis nous énonçons le lemme de zéros de Philippon (paragraphe 5) dans le cas particulier des groupes algébriques linéaires. Nous choisissons ensuite les paramètres (paragraphe 6), et nous utilisons la fonction auxiliaire pour résoudre non trivialement le système d'équations (1.4) (paragraphe 7). La conclusion de la démonstration du théorème principal est donnée au paragraphe 8, tandis que le Corollaire 1.5 est déduit du Théorème 2.18 dans le paragraphe 9. Enfin quelques autres corollaires sont énoncés et démontrés au paragraphe 10.

Dans une version antérieure de ce texte [W5], le paramètre M était défini par

$$\max_{i \neq j}\Big\{\frac{|b_i|}{\log A_j}\Big\},$$

qui donne un résultat moins précis ; la démonstration de [W5] demanderait aussi de remplacer le terme g/f dans la conclusion par ng/f. L'amélioration a été obtenue en adaptant une idée de Dong Ping Ping [DPP] (voir la démonstration ci-dessous de la Proposition 4.1).

Il est intéressant de comparer le résultat obtenu ici avec celui de [W4], qui reposait sur une autre méthode. La différence principale vient de la définition des deux paramètres Z_0 et M, qui fournissent ici un énoncé plus précis.

Les autres différences avec [W4] sont mineures ; plusieurs des arguments introduits ici peuvent être adaptés à [W4]. Ainsi on peut améliorer la majoration $C(n) \leq 2^{2n+21}n^{4n}$ de [W4] pour obtenir une estimation du même ordre de grandeur que dans le Corollaire 1.5. Pour cela il faut raffiner la construction de la fonction auxiliaire (Corollaire 3.2 de [W4]), d'abord en introduisant le paramètre g, puis en reprenant l'argument de Dong Ping Ping que nous venons de mentionner. Ensuite il faut remplacer l'inégalité de Liouville (Lemme 2.3 de [W4]) par la minoration plus précise donnée au Lemme 3.5 ci-dessous.

Dans les applications, par exemple pour résoudre explicitement certaines équations diophantiennes, il est important de disposer de minorations explicites précises ne conduisant pas à des calculs de longueur prohibitive. Jusqu'à présent les estimations les plus efficaces dans ce contexte étaient celles de [MW1,2,3] pour les combinaisons linéaires de 2 logarithmes, celles de [BGMMS] pour n logarithmes avec $n \geq 3$.

Les valeurs numériques que nous obtenons ici sont particulièrement intéressantes pour les petites valeurs du paramètre n. Notons à ce propos qu'une variante de notre démonstration permet d'améliorer sensiblement la constante, à condition de remplacer le facteur G_0Z_0 de la définition de U_0 par G_0^2. Pour cela on exploite le système d'équations (1.4) (c'est la méthode de Schneider à l'état pur : il n'y a pas de dérivation).

Pour obtenir un énoncé améliorant tous ceux que donne la méthode de Baker il faudrait remplacer dans la minoration de $|\Lambda|$ le terme n^{3n} par n^{2n}, et même par n^n quand les α_i satisfont une hypothèse forte d'indépendance, précisément quand le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}, \ldots, \sqrt{\alpha_n})$ est de degré 2^n sur le corps $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. En l'absence de formule d'interpolation, la solution de ce problème pourrait venir d'un raffinement du lemme de zéros. Il est d'ailleurs remarquable que le résultat final soit sensible à la qualité du lemme de zéros, ce qui n'est pas le cas pour la méthode de Baker.

Notons pour terminer que les constructions de fonctions auxiliaires dans [W3] permettent aussi d'éviter l'extrapolation dans la méthode de Baker sans perdre sur la dépendance en les coefficients b_i dans l'estimation finale, mais en perdant seulement sur la dépendance en n (on trouve n^{n^2} au lieu de n^n).

2. **Le théorème principal.** Dans tout ce texte excepté la derniere section (§ 10), on désigne par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes algébriques non nuls ; pour $1 \leq i \leq n$ on choisit une détermination $\log \alpha_i$ du logarithme complexe de α_i et on suppose que les nombres $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On désigne par D le degré du corps de nombres K engendré sur $\mathbb{Q}$ par $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et on pose

$$g = \begin{cases} 1 & \text{si } \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n \text{ sont tous réels,} \\ 2 & \text{si } \mathbb{R}(\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n) = \mathbb{C}. \end{cases}$$

On se donne d'autre part des nombres entiers $b_1, \ldots, b_n$, avec $b_n \neq 0$ et on désigne par Λ le nombre complexe

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \log \alpha_i.$$

On introduit des nombres réels positifs $A_1, \ldots, A_n$, M, f et E vérifiant

$$A_i > 1, \quad (1 \leq i \leq n), \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{h(\alpha_i)}{\log A_i} \leq n, \tag{2.1}$$

$$M \geq \max_{1 \leq j < n} \left\{ \frac{|b_n|}{\log A_j} + \frac{|b_j|}{\log A_n} \right\} \tag{2.2}$$

et

$$E \geq e, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{|\log \alpha_i|}{\log A_i} \leq \frac{nD}{fE}. \tag{2.3}$$

On choisit des paramètres v, w, η, μ, tous réels > 0, c_0, c_0', c_6, c_6' réels ≥ 1 et $c_1, c_2, \ldots, c_5$ réels > 2, vérifiant une collection d'inégalités que nous allons expliciter. On prend aussi des nombres réels G, Z et U, auxquels on impose les conditions suivantes :

(2.4) $$Z \geq \log\Big(c_0' \max\Big\{\frac{D}{\log E}, 1\Big\} + 4e\Big), \quad Z \geq \frac{c_6'}{D}(1 + \log E),$$

(2.5) $$G \geq c_5, \quad G \geq \log\Big(c_0 \frac{M \log E}{D} + e\Big), \quad G \geq \frac{c_6}{D}(1 + \log E),$$

(2.6) $$U \geq \max\Big\{c_5 DZ, D \log E, D^2 \log \max\{A_1, \ldots, A_n\}, \frac{D^2 GZ}{\log E}\Big\}.$$

Dans les paragraphes 6 et 7, nous ferons les hypothèses (2.7) à (2.12) suivantes :

(2.7) $$c_0 \geq \frac{2en^2}{(c_3 - 1)(c_4 - 1)} \max\Big\{c_2, \frac{c_1}{MZE}\Big\}, \quad c_0' \geq 4ec_3c_5,$$

(2.8) $$n(1 + \mu)^2 w \leq c_3 c_4 \mu \Big(1 - \frac{\eta}{\mu g w}\Big),$$

(2.9) $$\eta \geq n + 1, \quad \eta \geq \frac{D}{U} \log \max\Big\{c_3 c_4^n U^n \,;\, \frac{2c_2 U}{D \log A_n}\Big\},$$

(2.10) $$\eta \geq \frac{2nD}{U} \log\big((\mu + 1)wU\big) + \frac{D \log 9}{U},$$

(2.11) $$v \geq \mu w + \Big(c_1 + c_4 + \frac{107c_4}{103c_5}\Big)\frac{1}{g} + nc_2\Big(\frac{1}{g} + \frac{1}{fE}\Big) + 3\eta$$

et

(2. 12) $$w = \Big(c_1 + c_4 + \frac{107c_4}{103c_5} + nc_2\Big)\frac{1}{g} + \frac{c_1}{c_6'} + \frac{c_4}{c_6} + \frac{n}{f}c_2 + 3\eta.$$

Dans le paragraphe 8, il faudra en outre supposer

(2.13) $$\frac{D \log A_i}{\log E} \geq \frac{4c_2}{(c_4 - 2)(c_3 - 1)}, \quad (1 \leq i \leq n),$$

(2.14) $$\frac{DZ}{\log E} \geq \frac{c_1}{(c_3 - 1)(c_4 - 1)},$$

(2.15) $$G \geq \frac{(n + 1)^2 c_4 c_5}{n(c_1 c_5 - 1)} Z,$$

(2.16) $$U \geq \max\Big\{\frac{D^2 G}{\log E} \log \max\{A_1, \ldots, A_n\}, D^{n+2} GZ\Big(\prod_{i=1}^n \log A_i\Big)(\log E)^{-n-1}\Big\}$$

et

(2. 17) $$c_2^n c_1 \Big(1 - \frac{1}{c_1 c_5}\Big)\Big(1 - \frac{(2 + a)c_3}{2c_2}\Big)^n \geq (n + 1)^2 \Big(\frac{a}{2}\Big)^n c_4^n c_3^{n+1},$$

avec

$$a = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 2, \\ 2n & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Voici l'énoncé du théorème principal de cet article.

THÉORÈME 2.18. *Sous les hypothèses (2.1) à (2.17) ci-dessus, on a* $|\Lambda| \geq e^{-vU}$.

Un *mode d'emploi* de ce théorème est donné au début du paragraphe 9 quand nous en déduirons le Corollaire 1.5.

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

3. **Lemmes préliminaires.** Nous utiliserons les notations et résultats du paragraphe 2 de [W4], à l'exception de la notation $\mathbb{Z}^n(\underline{L})$, qui ici désignera l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $|\lambda_i| \leq L_i$, $(1 \leq i \leq n)$ quand $\underline{L} = (L_1, \ldots, L_n) \in \mathbb{R}^n$, $L_i \geq 0$. Si Φ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, on note encore $\Phi(\underline{L}) = \Phi \cap \mathbb{Z}^n(\underline{L})$. Avec ce petit changement la démonstration du Corollaire 2.8 de [W4] donne l'énoncé suivant :

LEMME 3.1. *Soient K un corps de caractéristique nulle, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments non nuls de K engendrant un sous-groupe multiplicatif de K^* de rang $\geq n-1$, Φ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, et $L_1, \ldots, L_n$ des nombres réels positifs. Alors*

$$\operatorname{Card}\{\alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n} \; ; \; \lambda \in \Phi(\underline{L})\} \geq \operatorname{Card} \Phi(\underline{L}) / \max_{1 \leq i \leq n} \{4L_i + 1\}.$$

Nous rappelons aussi le Lemme 2.7 de [W4] que nous utiliserons plusieurs fois.

LEMME 3.2. *Soient $\psi \colon G_1 \longrightarrow G_2$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et $\mathcal{C}$ un sous-ensemble fini de G_1 ; on note $\underline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des $\lambda - \lambda'$, $(\lambda \in \mathcal{C}, \lambda' \in \mathcal{C})$. Alors*

$$\operatorname{Card} \psi(\mathcal{C}) \cdot \operatorname{Card}(\underline{\mathcal{C}} \cap \ker \psi) \geq \operatorname{Card} \mathcal{C}.$$

Nous aurons besoin de deux lemmes supplémentaires, faisant intervenir les polynômes de Fel'dman :

$$\Delta(z \; ; s) = (z+1) \cdots (z+s)/s!$$

pour $z \in \mathbb{C}$ et s entier positif, avec $\Delta(z \; ; 0) = 1$.

LEMME 3.3. *Soient R et S deux nombres réels positifs et $z_1, \ldots, z_m$ des nombres complexes. On suppose*

$$R \geq \max_{1 \leq i \leq m} |z_i|.$$

Alors pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^m$ avec $\|\sigma\| \leq S$ on a

$$\prod_{i=1}^{m} |\Delta(z_i \; ; \sigma_i)| \leq \left(\frac{mR}{S} + 1\right)^S e^{\|\sigma\|}$$

et aussi

$$\prod_{i=1}^{m} |\Delta(z_i \; ; \sigma_i)| \leq \left(\frac{mR}{S} + 1\right)^{\|\sigma\|} e^S.$$

DÉMONSTRATION. On reprend la démonstration de [Y] Lemma 2.4 p. 128. Comme $\Delta(z \; ; 0) = 1$, on peut supposer $\sigma_i > 0$ pour $1 \leq i \leq m$. On a

$$|\Delta(z_i \; ; \sigma_i)| \leq \left(\frac{R}{\sigma_i} + 1\right)^{\sigma_i} e^{\sigma_i}, \text{ pour } 1 \leq i \leq m.$$

On majore $\sum_{\iota=1}^m \sigma_\iota \log(\frac{R}{\sigma_\iota}+1)$ par $\|\sigma\| \log(\frac{mR}{\|\sigma\|}+1)$. Donc

$$\prod_{\iota=1}^m |\Delta(z_\iota\,;\,\sigma_\iota)| \leq \left(\frac{mR}{\|\sigma\|}+1\right)^{\|\sigma\|} e^{\|\sigma\|}.$$

En posant $t = \|\sigma\|/mR$ et $T = S/mR$, on a $0 < t \leq T$. La première inégalité résulte maintenant de la majoration

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \leq \left(1+\frac{1}{T}\right)^T,$$

et la seconde de

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t e^t \leq \left(1+\frac{1}{T}\right)^t e^T$$

(le membre de droite est une fonction croissante de T). ∎

Dans le lemme suivant, on utilise la notation, pour $z \in \mathbb{C}$ et T, τ, s entiers ≥ 0 :

$$\Delta(z\,;\,T,\tau,s) = \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dz}\right)^s \Delta(z\,;\,T)^\tau.$$

LEMME 3.4. *Soient T_1, T_2, T, S, H des entiers positifs, avec $T = T_1T_2$ et p_{sh} des nombres complexes. Considérons le polynôme exponentiel en une variable*

$$\Psi(z) = \sum_{s=0}^S \sum_{h=0}^H p_{sh} z^s e^{hz}.$$

Alors, pour $0 \leq \tau_1 < T_1$ et $0 \leq \tau_2 \leq T_2$ on a

$$\sum_{\tau=0}^T \Delta(\tau_1\,;\,T_1,\tau_2,\tau)\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau \Psi(0) = \sum_{s=0}^S \sum_{h=0}^H p_{sh} s!\Delta(h+\tau_1\,;\,T_1,\tau_2,s).$$

De plus, si

$$\sum_{s=0}^S \sum_{h=0}^H p_{sh} s!\Delta(h+\tau_1\,;\,T_1,\tau_2,s) = 0$$

pour $0 \leq \tau_1 < T_1$ et $0 \leq \tau_2 \leq T_2$, on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau \Psi(0) = 0$$

pour $0 \leq \tau \leq T$, c'est-à-dire que Ψ a un zéro d'ordre au moins $T+1$ à l'origine.

DÉMONSTRATION. On utilise la relation

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau \left(z^s e^{hz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d}{dz}\right)^s \left(z^\tau\right)_{z=h}$$

(voir à ce sujet [W3] Lemmes 3.1 et 7.6). On a

$$\Delta(z+\tau_1\,;\,T_1)^{\tau_2} = \sum_{\tau=0}^T \Delta(\tau_1\,;\,T_1,\tau_2,\tau) z^\tau,$$

donc

$$\Delta(h+\tau_1\ ;\ T_1,\tau_2,s) = \frac{1}{s!}\Big(\frac{d}{dz}\Big)^s\Big(\Delta(z+\tau_1\ ;\ T_1)^{\tau_2}\Big)_{z=h}$$
$$= \frac{1}{s!}\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1\ ;\ T_1,\tau_2,\tau)\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\tau}(z^s e^{hz})_{z=0}.$$

La deuxième partie de l'énoncé résulte du fait que les polynômes 1 et $\Delta(z+\tau_1\ ;\ T_1)^{\tau_2}$, $(0 \le \tau_1 < T_1,\ 1 \le \tau_2 \le T_2)$ forment, d'après le Lemme 2.2 de [W4], une base de l'espace des polynômes de degré $\le T$. ∎

REMARQUE. Dong Ping Ping a corrigé une erreur que j'avais faite dans une version antérieure de ce Lemme 3.4. Quand on omet la valeur $(0,0)$ pour (τ_1,τ_2) en remplaçant la condition $0 \le \tau_2 \le T_2$ par $1 \le \tau_2 \le T_2$, on ne peut pas conclure que Ψ a un zéro d'ordre au moins T à l'origine.

Enfin l'inégalité de Liouville qui suit est un petit raffinement du Lemme 2.3 de [W4]. L'idée d'utiliser ce raffinement ici a été suggérée par Sinnou David.

Soit α un nombre algébrique et soit K un corps de nombres contenant α ; pour chaque place v de K, on note K_v le complété de K en v et d_v le degré local $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$. Pour chaque place v_0 de $\mathbb{Q}$ on a $\sum_{v|v_0} d_v = [K : \mathbb{Q}]$; on normalise les valeurs absolues de telle façon que la formule du produit s'écrive :

$$\sum_v d_v \log|\alpha|_v = 0 \text{ si } \alpha \neq 0.$$

La hauteur logarithmique absolue de α est alors définie par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]}\sum_v d_v \log\max\{1, |\alpha|_v\}.$$

LEMME 3.5. *Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_q]$ un polynôme en q variables, de degré au plus N_j en X_j, $(1 \le j \le q)$, et de longueur $L(P)$. Soient α_j, $(1 \le j \le q)$ des nombres algébriques, K un corps de nombres contenant $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, D le degré de K sur $\mathbb{Q}$, v_0 une place de K, et d_{v_0} le degré local de K en v_0 ; on pose $D' = D/d_{v_0}$ et*

$$D'' = \begin{cases} D'-1 & \text{si } v_0 \text{ est archimédienne,}\\ D' & \text{si } v_0 \text{ est ultramétrique.}\end{cases}$$

Si le nombre $P(\alpha_1,\dots,\alpha_q)$ n'est pas nul, alors

$$\log|P(\alpha_1,\dots,\alpha_q)|_{v_0} \ge -D''\log L(P) - D'\sum_{j=1}^{q} N_j h(\alpha_j).$$

DÉMONSTRATION. Comme $P(\alpha)$ n'est pas nul, on a, par la formule du produit,

$$d_{v_0}\log|P(\alpha)|_{v_0} = -\sum_{v\neq v_0} d_v \log|P(\alpha)|_v.$$

Pour $v \neq v_0$, on majore $\log|P(\alpha)|_v$ par

$$\log|P(\alpha)|_v \leq \sum_{j=1}^{q} N_j \log\max\{1, |\alpha_j|_v\} + \begin{cases} \log L(P) & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ 0 & \text{si } v \text{ est ultramétrique.} \end{cases}$$

On majore ensuite

$$\sum_{v \neq v_0} d_v \sum_{j=1}^{q} N_j \log\max\{1, |\alpha_j|_v\} \text{ par } D\sum_{j=1}^{q} N_j h(\alpha_j).$$

Enfin si v_0 est archimédienne on a

$$\sum_{\substack{v|\infty \\ v \neq v_0}} d_v = D - d_{v_0},$$

tandis que si v_0 est ultramétrique on a

$$\sum_{v|\infty} d_v = D. \qquad \blacksquare$$

4. **La fonction auxiliaire.** Dans toute cette section, nous utilisons les notations suivantes : K désigne soit le corps $\mathbb{R}$, soit le corps $\mathbb{C}$, g est le degré de K sur $\mathbb{R}$ (donc $g = 1$ ou 2), d est un entier positif, $\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{C}^{d-1}$ à coefficients dans K et $\mathcal{L}$ une forme linéaire sur $\mathbb{C}^d$ à coefficients dans K. Quand $r_0, \ldots, r_{d-1}$ sont des nombres réels positifs, on désigne par $D(0, \underline{r})$ le polydisque fermé de $\mathbb{C}^d$ de centre 0 et de polyrayon $\underline{r} = (r_0, \ldots, r_{d-1})$:

$$D(0, \underline{r}) = \{z \in \mathbb{C}^d \ ; \ |z_i| \leq r_i \text{ pour } 0 \leq i \leq d-1\} \ ;$$

si f est une fonction analytique dans $D(0, \underline{r})$ (c'est-à-dire continue sur le polydisque et analytique à l'intérieur), $|f|_{\underline{r}}$ désigne $\sup\{|f(z)| \ ; \ z \in D(0, \underline{r})\}$. Ensuite D, H, M, S, T_1, T_2, T seront des entiers positifs, ϱ, E, P, $r_1, \ldots, r_{d-1}$, r', $R_0, \ldots, R_{d-1}$, U_0, V_0, U, V, L des nombres réels positifs avec $E \geq e$, et $\xi_{\delta\sigma h}$, $(1 \leq \delta \leq D$, $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S$, $0 \leq h \leq H)$ seront des éléments de K. On suppose aussi

$$L \geq \max_{1 \leq j \leq d-1} \sup\{|\lambda_j(z_1, \ldots, z_{d-1})| \ ; \ |z_i| \leq r_i, (1 \leq i \leq d-1)\}.$$

Le but de cette section est de construire la fonction auxiliaire suivante :

PROPOSITION 4.1. *On suppose*

$$U_0 + V_0 \geq 2, \quad T = T_1 T_2, \quad L \geq \frac{T}{(d-1)EH},$$

$$P + \log(2E) \leq \varrho(U_0 + V_0),$$

$$P + 2d\log\big((1+\varrho)(U_0+V_0)\big) + \log 9 \leq \varrho(U_0 + V_0),$$

$$U_0 \geq \log\Big\{\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} |\xi_{\delta\sigma h}|\Big\} + EHr'$$

$$+ S\log\Big\{e^2\Big(\frac{(d-1)(2d-3)LE}{S} + 1\Big)\Big\} + T\log\Big\{e^2\Big(\frac{EH}{T_1} + 2\Big)\Big\},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

et

$$gd(1+\varrho)^2(U_0+V_0)^2 \leq (S+d-1)D(H+1)P\log E.$$

Alors il existe des entiers rationnels non tous nuls $p_{\delta\sigma h}$, *(*$1 \leq \delta \leq D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S$, $0 \leq h \leq H$*), majorés par*

$$\max_{\delta,\sigma,h} |p_{\delta\sigma h}| \leq e^P,$$

tels que, pour tout $(u_1, \ldots, u_{d-1}) \in \mathbb{C}^{d-1}$ *vérifiant*

$$|u_\iota| \leq r_\iota, \quad (1 \leq i \leq d-1) \text{ et } |\lambda_0(u)| \leq r',$$

et tout τ_1, τ_2, *avec* $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$, *on ait*

$$\left|\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1\,;\,T_1,\tau_2,\sigma_0)\Big(\prod_{\iota=1}^{d-1}\Delta\big(\lambda_\iota(u)\,;\,\sigma_\iota\big)\Big)e^{h\lambda_0(u)}\right| \leq e^{-V_0}.$$

L'outil essentiel pour la démonstration de cette Proposition 4.1 est l'énoncé suivant, que nous allons déduire du Corollaire 2.7 de [W3].

PROPOSITION 4.2. *On suppose*

$$U+V \geq 2, \quad P+\log(2E) \leq \varrho(U+V), \quad R_\iota = Er_\iota, \quad (0 \leq i < d),$$
$$P + \log 9 + 2d\log\big((1+\varrho)(U+V)\big) \leq \varrho(U+V),$$

et

$$gd(1+\varrho)^2(U+V)^2 \leq (S+d-1)MP\log E.$$

Soient $\psi_{\sigma\mu}$, *(*$\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S$, $1 \leq \mu \leq M$*) des fonctions analytiques d'une variable complexe ayant des développements de Taylor à l'origine à coefficients dans* K, *telles que les fonctions* $f_{\sigma\mu} = \psi_{\sigma\mu} \circ \mathcal{L}$ *soient analytiques dans le polydisque* $D(0,\underline{R})$ *de* $\mathbb{C}^d$ *et vérifient*

$$\sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{\mu=1}^{M} R_0^{\sigma_0}\left(\frac{(d-1)LE}{S}+1\right)^{S-\sigma_0} e^S|f_{\sigma\mu}|_{\underline{R}} \leq e^U.$$

Alors il existe des entiers rationnels $p_{\sigma\mu}$, *(*$\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S\,;\, 1 \leq \mu \leq M$*), non tous nuls, majorés par*

$$\max_{\sigma,\mu} |p_{\sigma\mu}| \leq e^P,$$

tels que la fonction

$$F(z) = \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{\mu=1}^{M} p_{\sigma\mu} z_0^{\sigma_0}\Big(\prod_{\iota=1}^{d-1}\Delta(\lambda_\iota(z)\,;\,\sigma_\iota)\Big)f_{\sigma\mu}(z)$$

vérifie

$$|F|_{\underline{r}} \leq e^{-V}.$$

DÉMONSTRATION. Quand $g = 2$, on applique le Corollaire 2.7 de [W3] aux fonctions

$$\varphi_{\sigma\mu}(z) = z_0^{\sigma_0}\Big(\prod_{\iota=1}^{d-1}\Delta\big(\lambda_\iota(z)\,;\,\sigma_\iota\big)\Big)f_{\sigma\mu}(z),$$

en prenant $f = t = 0$, $n = d$, $m = 1$, $T = 1$, $L = \binom{S+d-1}{d}M$, $J = 1$, $\Delta = P$, $\varrho' = \varrho$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}^d$, $\mathcal{W} = 0$. On majore $\sum_\sigma \sum_\mu |\varphi_{\sigma\mu}|_{\underline{R}}$ par e^U en utilisant le Lemme 3.3 et une des conditions sur U. Enfin

$$\binom{S+d-1}{d}\Big/\binom{S+d-2}{d-1} = (S+d-1)/d.$$

Quand $g = 1$, on remarque que dans le Lemme 6.1 de [PW1] (*cf.* Lemme 2.1 de [W3]), si les u_{ij} sont réels, on peut remplacer l'exposant 2ϱ de l'hypothèse par ϱ. Il en résulte que, dans l'hypothèse (2.8) du Corollaire (2.7) de [W3], on peut omettre le facteur 2 à gauche quand on suppose que les fonctions analytiques considérées ont un développement de Taylor à l'origine à coefficients réels. ∎

COROLLAIRE 4.3. *On suppose*

$$U + V \geq 2, \quad P + \log(2E) \leq \varrho(U+V), \quad r_0 \leq (d-1)L,$$
$$P + 2d\log\big((1+\varrho)(U+V)\big) + \log 9 \leq \varrho(U+V),$$
$$U \geq EH|\mathcal{L}|_{\underline{r}} + S\log\Big\{e^2\Big(\frac{(d-1)LE}{S}+1\Big)\Big\} + \log\Big\{\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H}|\xi_{\delta\sigma h}|\Big\},$$

et

$$gd(1+\varrho)^2(U+V)^2 \leq (S+d-1)D(H+1)P\log E.$$

Alors il existe des entiers rationnels non tous nuls $p_{\delta\sigma h}$, *(*$1 \leq \delta \leq D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S$, $0 \leq h \leq H$*), majorés par*

$$\max_{\delta,\sigma,h}|p_{\delta\sigma h}| \leq e^P,$$

tels que, pour tout $(z_0,\ldots,z_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$ *vérifiant* $|z_\iota| \leq r_\iota$, *(*$0 \leq i \leq d-1$*), on ait*

$$\Big|\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}\Big(\prod_{\iota=1}^{d-1}\Delta(\lambda_\iota(z)\,;\,\sigma_\iota)\Big)e^{h\mathcal{L}(z)}\Big| \leq e^{-V}.$$

DÉMONSTRATION. On utilise la Proposition 4.2 avec μ remplacé par (δ, h) et M par $D(H+1)$, pour les fonctions de d variables $f_{\delta\sigma h}(z) = \psi_{\delta\sigma h}\circ\mathcal{L}(z)$ avec

$$\psi_{\delta\sigma h}(w) = \frac{1}{\sigma_0!}\xi_{\delta\sigma h}e^{wh}, \quad (1 \leq \delta \leq D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| < S,\ 0 \leq h \leq H).$$

On majore $|\mathcal{L}|_{\underline{R}}$ par $E|\mathcal{L}|_{\underline{r}}$ et $R_0^{\sigma_0}/\sigma_0!$ par $\big(1+(d-1)LE/S\big)^{\sigma_0}e^S$ (car $S^{\sigma_0}/\sigma_0! \leq e^S$). Ceci termine la démonstration du Corollaire 4.3. ∎

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.1. Nous notons (abusivement) $|\lambda_0|_{\underline{r}}$ pour

$$\sup\{|\lambda_0(z)| \; ; \; |z_\iota| \leq r_\iota, \; 1 \leq i \leq d-1\}$$

et nous distinguons deux cas.

PREMIER CAS. Supposons $|\lambda_0|_{\underline{r}} \leq r'$.

On va démontrer un résultat légèrement plus fin (ce sera utile pour le second cas) : dans la minoration de U_0, on remplacera le terme

$$S\log\left\{e^2\left(\frac{(d-1)(2d-3)LE}{S}+1\right)\right\} \text{ par } S\log\left\{e^2\left(\frac{(d-1)LE}{S}+1\right)\right\}.$$

On applique le Corollaire 4.3 avec

$$U = U_0 - T\log\left(e\left(\frac{EH}{T_1}+2\right)\right), \qquad V = V_0 + U_0 - U$$

et $\mathcal{L}(z_0,\dots,z_{d-1}) = z_0 + \lambda_0(z_1,\dots,z_{d-1})$, $r_0 = T/EH$. Pour utiliser le Lemme 3.4, écrivons

$$\Psi(z_0) = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{z_0 h}\left(\prod_{\iota=1}^{d-1}\Delta\big(\lambda_\iota(u)\;;\;\sigma_\iota\big)\right)e^{h\lambda_0(u)} \;;$$

la quantité que l'on veut estimer n'est autre que

$$\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1\;;\;T_1,\tau_2,\tau)\left(\frac{d}{dz_0}\right)^{\tau}\Psi(0).$$

Les inégalités de Cauchy donnent

$$\left|\left(\frac{d}{dz_0}\right)^{\tau}\Psi(0)\right| \leq \frac{\tau!}{r_0^{\tau}}|\Psi|_{r_0},$$

et le Corollaire 4.3 fournit la majoration $|\Psi|_{r_0} \leq e^{-V}$. On majore $\tau!/r_0^{\tau}$ par $(EH)^{\tau}$ et on remarque que les coefficients $\Delta(\tau_1\;;\;T_1,\tau_2,\tau)$ sont ≥ 0 ; on a

$$\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1\;;\;T_1,\tau_2,\tau)(EH)^{\tau} = \Delta(EH+\tau_1,T_1)^{\tau_2},$$

que l'on majore, grâce au Lemme 3.3, par

$$\left(\frac{EH}{T_1}+2\right)^{T}e^{T}.$$

Enfin on a

$$|\mathcal{L}|_{\underline{r}} \leq \frac{T}{EH} + |\lambda_0|_{\underline{r}}.$$

Ceci termine la démonstration du premier cas.

DEUXIÈME CAS. Supposons $|\lambda_0|_{\underline{r}} \geq r'$.

L'argument que nous utilisons pour traiter ce deuxième cas est inspiré de [DPP]. Ecrivons $\lambda_0(u) = v_1u_1 + \cdots + v_{d-1}u_{d-1}$. Quitte à modifier la numérotation, on peut supposer $|v_1|r_1 \geq |v_i|r_i$ pour $1 \leq i \leq d-1$. On a donc

$$r' \leq |\lambda_0|_{\underline{r}} \leq \sum_{j=1}^{d-1} |v_j|r_j \leq (d-1)|v_1|r_1.$$

On effectue le changement de variable

$$\tilde{u}_1 = u_1 + \frac{v_2}{v_1}u_2 + \cdots + \frac{v_{d-1}}{v_1}u_{d-1}, \quad \tilde{u}_j = u_j, \quad (2 \leq j \leq d-1),$$

et on définit des formes linéaires $\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_{d-1}$ par

$$\tilde{\lambda}_i(\tilde{u}) = \lambda_i\Big(\tilde{u}_1 - \frac{v_2}{v_1}\tilde{u}_2 - \cdots - \frac{v_{d-1}}{v_1}\tilde{u}_{d-1}, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_{d-1}\Big).$$

En particulier on a $\tilde{\lambda}_0(\tilde{u}) = v_1\tilde{u}_1$. Choisissons

$$\tilde{r}_1 = r'/|v_1|, \quad \tilde{r}_i = r_i, \quad (2 \leq i \leq d-1).$$

On a

$$|\tilde{\lambda}_0|_{\underline{\tilde{r}}} = |v_1|\tilde{r}_1 = r'.$$

Posons

$$\tilde{L} = \max_{1 \leq i \leq d-1} |\tilde{\lambda}_i(\tilde{u})|_{\underline{\tilde{r}}}.$$

Montrons que l'on a $\tilde{L} \leq (2d-3)L$. Pour $\tilde{u} \in \mathbb{C}^{d-1}$ vérifiant $|\tilde{u}_i| \leq \tilde{r}_i$, $(1 \leq i \leq d-1)$, on peut écrire $\tilde{\lambda}_j(\tilde{u}) = \lambda_j(u)$ où $u \in \mathbb{C}^{d-1}$ vérifie $|u_i| \leq r_i$, $(2 \leq i \leq d-1)$,

$$|u_1| \leq \tilde{r}_1 + (d-2) \max_{2 \leq i \leq d-1}\left\{\frac{|v_i|r_i}{|v_1|}\right\} \text{ et } \tilde{r}_1 \leq \frac{r'}{|v_1|} \leq (d-1)r_1,$$

donc $|u_1| \leq (2d-3)r_1$, ce qui démontre la majoration annoncée pour $\tilde{L}$. Le premier cas avec $\tilde{r}' = r'$ nous permet alors de construire les entiers $p_{\delta\sigma h}$ tels que

$$\left|\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1\,;T_1,\tau_2,\sigma_0)\Big(\prod_{i=1}^{d-1}\Delta\big(\tilde{\lambda}_i(\tilde{u})\,;\sigma_i\big)\Big)e^{h\tilde{\lambda}_0(\tilde{u})}\right| \leq e^{-V_0}$$

pour tout $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_{d-1}) \in \mathbb{C}^{d-1}$ vérifiant $|\tilde{u}_i| \leq \tilde{r}_i$, $(1 \leq i \leq d-1)$ et tout τ_1, τ_2, avec $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$. On en déduit le résultat voulu. ■

5. **Le lemme de zéros.** Nous donnons ici un corollaire du lemme de zéros de [P] dans le cas particulier d'un groupe algébrique linéaire. Nous en déduisons ensuite le corollaire qui nous permettra au paragraphe 8 d'exploiter la construction transcendante du paragraphe 7.

Soient K un corps de caractéristique nulle, d_0 et d_1 deux entiers ≥ 0 avec $d = d_0 + d_1 > 0$. On note $G_0 = \mathbb{G}_a^{d_0}$, $G_1 = \mathbb{G}_m^{d_1}$, et $G = G_0 \times G_1$. Ainsi $G(K) = K^{d_0} \times K^{*d_1}$.

Nous noterons $K[G]$ l'anneau $K[X_1, \ldots, X_d, 1/X_{d_0+1}, \ldots, 1/X_d]$; c'est le sous-anneau du corps des fractions rationnelles $K(X_1, \ldots, X_d)$ obtenu à partir de l'anneau des polynômes $K[X_1, \ldots, X_d]$ en inversant $X_{d_0+1}, \ldots, X_d$.

Pour $u = (u_1, \ldots, u_d) \in K^d$, on définit une dérivation D_u sur $K[G]$ par

$$D_u = \sum_{i=1}^{d_0} u_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \sum_{i=d_0+1}^{d} u_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}.$$

Quand $w_1, \ldots, w_t$ sont des éléments de K^d et τ un élément de $\mathbb{N}^t$, on écrit $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_t)$ et

$$D_{\mathbf{w}}^{\tau} = D_{w_1}^{\tau_1} \cdots D_{w_t}^{\tau_t}.$$

Etant donnés un sous-espace W de K^d, un point $u \in G(K)$, un élément P de $K[G]$ et un entier $T > 0$, si les équations

$$D_{\mathbf{w}}^{\tau} P(u) = 0 \text{ pour tout } \|\tau\| < T$$

sont vérifiées pour un système générateur $\mathbf{w}$ du K-espace W, alors elles sont vérifiées pour tout système générateur $\mathbf{w}$ de W; on dit alors que *P a un zéro au point u de multiplicité $\geq T$ dans la direction W.*

L'espace tangent $T_G(K)$ de G à l'origine est le K-espace vectoriel des dérivations D de l'anneau $K[G]$ qui sont invariantes par translation :

$$(DQ)(u + X) = DQ_u(X) \text{ pour tout } Q \in K[G], \quad u \in G(K),$$

où, pour $Q \in K[G]$ et $u \in G(K)$ on a noté $Q_u(X) = Q(u + X)$:

$$Q_u(X_1, \ldots, X_d) = Q(u_1 + X_1, \ldots, u_{d_0} + X_{d_0}, u_{d_0+1} X_{d_0+1}, \ldots, u_d X_d).$$

L'espace vectoriel $T_G(K)$ est de dimension d sur K, une base étant donnée par les d dérivations

$$\frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_{d_0}}, X_{d_0+1} \frac{\partial}{\partial X_{d_0+1}}, \ldots, X_d \frac{\partial}{\partial X_d}.$$

Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de G. Alors G' s'écrit $G'_0 \times G'_1$, où G'_i est un sous-groupe algébrique connexe de G_i, $(i = 0, 1)$. On dira brièvement que G' est de codimension $\delta = \delta_0 + \delta_1$ pour signifier que δ_i est la codimension de G'_i dans G_i. Alors G'_0 est défini par δ_0 équations linéaires à coefficients dans K,

$$s_{1j} z_1 + \cdots + s_{d_0 j} z_{d_0} = 0, \quad (1 \leq j \leq \delta_0),$$

ce qui fait que $G_0'(K)$ est un sous-espace vectoriel de K^{d_0} de codimension δ_0 tandis que G_1' est défini par δ_1 équations monomiales à exposants dans $\mathbb{Z}$:

$$z_{d_0+1}^{s_{d_0+1j}} \cdots z_d^{s_{dj}} = 1, \quad (1 \leq j \leq \delta_1).$$

La condition de connexité se traduit par le fait que le sous-groupe de $\mathbb{Z}^d$ engendré par les δ_1 éléments $s_j = (s_{d_0+1j}, \ldots, s_{dj})$, $(1 \leq j \leq \delta_1)$ est *saturé*. Ceci permet d'identifier d'abord G/G' avec $\mathbb{G}_a^{\delta_0} \times \mathbb{G}_m^{\delta_1}$, ensuite $T_G(K)$ avec la somme directe $T_{G'}(K) \oplus T_{G/G'}(K)$. Quand E est un sous-ensemble de $G(K)$ on désigne par $(E + G')/G'$ son image dans le quotient $G(K)/G'(K)$.

PROPOSITION 5.1. *Soient $E_1, \ldots, E_d$ des sous-ensembles de $G(K)$ contenant l'origine, W un sous-K-espace vectoriel de $T_G(K)$ de dimension t et T, S, H des entiers positifs. On suppose qu'il existe un polynôme non nul de degré total $\leq S$ en les d_0 premières variables et de degré total $\leq H$ en les d_1 dernières variables qui s'annule avec une multiplicité $\geq T$ le long de W en chacun des points de l'ensemble*

$$E_1 + \cdots + E_d = \{x_1 + \cdots + x_d \,;\, x_i \in E_i,\ 1 \leq i \leq d\}.$$

Alors il existe un entier s et un sous-groupe algébrique connexe G' de G de codimension $\delta = \delta_0 + \delta_1$, pour lequel, si on note $\tau = \dim_K W/W \cap T_{G'}(K)$, on ait

$$\frac{(d-\delta)!}{(d_0-\delta_0)!\,(d_1-\delta_1)!}\binom{[(T-1)/d]+\tau}{\tau}\operatorname{Card}\big((E_s+G')/G'\big) \leq \frac{d!}{d_0!\,d_1!}S^{\delta_0}H^{\delta_1}$$

avec

$$1 \leq s \leq \delta \leq d.$$

REMARQUE. Quand on suppose $\operatorname{Card} E_1 \geq \cdots \geq \operatorname{Card} E_d$, on peut remplacer la conclusion par

$$\frac{(d-\delta)!}{(d_0-\delta_0)!\,(d_1-\delta_1)!}\binom{[(T-1)/d]+\tau}{\tau}\operatorname{Card}\big((E_\delta+G')/G'\big) \leq \frac{d!}{d_0!\,d_1!}S^{\delta_0}H^{\delta_1}.$$

Le fait que l'on prenne différents ensembles $E_1, \ldots, E_d$ constitue un petit raffinement par rapport aux lemmes de zéros classiques (*cf.* [P] Théorème 2.1 ; dans [Wü] on demande $E_2 = \cdots = E_d$). Un tel raffinement était suggéré dans [W4], mais une hypothèse y a été malencontreusement inversée : la condition $a_0 \geq \cdots \geq a_d > 0$ doit être remplacée par $0 < a_0 \leq \cdots \leq a_d$; heureusement dans [W4] on utilisait seulement le cas $a_0 = \cdots = a_d$, et de même ici on n'appliquera la Proposition 5.1 que dans le cas $E_1 = \cdots = E_d$. L'argument nécessaire pour obtenir ce raffinement est néanmoins expliqué en *annexe* dans un cas particulier.

DÉMONSTRATION. On plonge K dans $\mathbb{C}$ (ce que l'on peut faire sans restriction) et G dans l'espace affine de dimension d de la manière habituelle, et on identifie l'espace tangent $T_G(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^d$ en posant

$$\exp_G(z_1, \ldots, z_d) = (z_1, \ldots, z_{d_0}, e^{z_{d_0+1}}, \ldots, e^{z_d}).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

On pose $A = \exp_G W$. Comme les groupes algébriques considérés ici sont linéaires, les constantes c_1 et c_2 de [P] peuvent être prises égales à 1. S'il existe un polynôme non nul Q vérifiant les conditions de la Proposition 5.1, avec les bornes indiquées pour les degrés, alors il existe un sous-groupe algébrique connexe G' de G, de dimension disons $d-\delta$, avec $0 < \delta \leq d$ (c'est-à-dire $G' \neq G$), tel que

$$\binom{[(T-1)/d] + \operatorname{Codim}_A(A \cap G')}{\operatorname{Codim}_A(A \cap G')} \operatorname{Card}\big((E_s + G')/G'\big)\mathcal{H}(G' \,;\, S, H) \leq \mathcal{H}(G \,;\, S, H),$$

où s est un entier dans l'intervalle $1 \leq s \leq \delta$, et où la fonction $\mathcal{H}(G' \,;\, S, H)$ satisfait, d'après le Lemme 5.4 de [P] :

$$\mathcal{H}(G' \,;\, S, H) \geq \frac{(d-\delta)!}{(d_0-\delta_0)!\,(d_1-\delta_1)!} S^{d_0-\delta_0} H^{d_1-\delta_1}$$

et

$$\mathcal{H}(G \,;\, S, H) = \frac{d!}{d_0!\,d_1!} S^{d_0} H^{d_1}. \qquad \blacksquare$$

EXEMPLE. Nous explicitons ici un exemple d'application de la Proposition 5.1 avec $d_1 = t = 1$.

Soient $d_0 \geq 1$, $n \geq 1$ deux entiers, $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des éléments de K^{d_0}, Φ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments non nuls de K. D'autre part soient S, H, T, $L_1, \ldots, L_n$ des entiers positifs. Rappelons que $\Phi(\underline{L})$ est l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi$ qui satisfont $|\lambda_i| \leq L_i$, $(1 \leq i \leq n)$.

On définit une dérivation

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y\frac{\partial}{\partial Y}$$

sur l'anneau $K[X_0, \ldots, X_{d_0-1}, Y]$, de telle sorte que, dans le cas $K = \mathbb{C}$, pour tout polynôme Q dans cet anneau, la fonction de d_0+1 variables complexes

$$F(z_0, \ldots, z_{d_0}) = Q(z_0, z_1, \ldots, z_{d_0-1}, e^{z_0} z_{d_0})$$

vérifie

$$\frac{\partial}{\partial z_0} F(z) = (D_0 Q)(z_0, z_1, \ldots, z_{d_0-1}, e^{z_0} z_{d_0}).$$

On veut savoir s'il existe un polynôme non nul $Q \in K[X_0, \ldots, X_{d_0-1}, Y]$, de degré total $\leq S$ en $X_0, \ldots, X_{d_0-1}$ et de degré $\leq H$ en Y, satisfaisant

$$(5.2) \qquad \begin{cases} D_0^\tau Q(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) = 0 \\ \text{pour tout } \tau \in \mathbb{N} \text{ avec } 0 \leq \tau < T \text{ et tout } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(\underline{L}). \end{cases}$$

Si $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel de K^{d_0}, de dimension ν, on note d'une part

$$p_{\mathcal{W}} \colon K^{d_0} \times K^* \longrightarrow \frac{K^{d_0}}{\mathcal{W}} \times K^*$$

la surjection canonique et

$$\Sigma = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) \,;\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(\underline{L})\} \subset K^{d_0} \times K^*,$$

d'autre part

$$s_{\mathcal{W}}\colon K^{d_0} \longrightarrow K^{d_0}/\mathcal{W}$$

la surjection canonique et

$$\mathcal{E} = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n) \,;\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(\underline{L})\} \subset K^{d_0}.$$

On choisit des nombres réels $a_0, \ldots, a_{d_0}$ vérifiant $0 < a_0 \leq \cdots \leq a_{d_0}$ et $a_0 + \cdots + a_{d_0} \leq 1$; pour $0 \leq \nu \leq d_0$, on pose

$$\Sigma_\nu = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) \,;\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu\underline{L})\} \subset K^{d_0} \times K^*$$

et

$$\mathcal{E}_\nu = \{(\lambda_1\theta_1 + \cdots + \lambda_n\theta_n) \,;\, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu\underline{L})\} \subset K^{d_0}.$$

Noter que l'on a

$$\Sigma_0 \subset \cdots \subset \Sigma_{d_0} \text{ et } \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{d_0} \subset \Sigma.$$

COROLLAIRE 5.3. *S'il existe un polynôme non nul $Q \in K[X_0, \ldots, X_{d_0-1}, Y]$, de degré total $\leq S$ en $X_0, \ldots, X_{d_0-1}$ et de degré $\leq H$ en Y, vérifiant les conditions (5.2), alors il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^{d_0}, de dimension ν, tel que l'une au moins des conditions suivantes soit réalisée*

1)

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \leq (d_0 + 1)^2 S^{d_0-\nu} H.$$

2) On a $0 \leq \nu < d_0$, $\mathcal{W}$ ne contient pas $(1, 0, \ldots, 0)$, et

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) \leq \frac{(d_0 + 1)^2}{\nu + 1} S^{d_0-\nu}.$$

3) Le sous-espace $\mathcal{W}$ contient $(1, 0, \ldots, 0)$, il est différent de K^{d_0} et on a

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) \leq \frac{d_0 + 1}{\nu + 1} S^{d_0-\nu}.$$

DÉMONSTRATION. On applique la Proposition 5.1 avec $d_1 = 1$, $d = d_0 + 1$ et $E_{d-\nu} = \Sigma_\nu$, $(0 \leq \nu \leq d_0)$. On prend pour W la droite

$$z_{d_0} = z_0, \quad z_1 = \cdots = z_{d_0-1} = 0$$

de $\mathbb{C}^{d_0+1}$. On peut minorer $[(T-1)/(d_0+1)] + 1$ par $T/(d_0+1)$ car T est entier. La Proposition 5.1 fournit un sous-groupe algébrique connexe G' de G de codimension $\delta =$

$\delta_0+\delta_1>0$. On a $G'=\mathcal{W}\times\{1\}$ ou $G'=\mathcal{W}\times\mathbb{G}_m$, avec $\mathcal{W}$ sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_a^{d_0}$ (sous-espace vectoriel de K^{d_0}) de dimension $\nu=d_0-\delta_0$. De plus

$$\tau=\dim_K\big(W/W\cap T_{G'}(K)\big)=\begin{cases}0 & \text{si } G'\supset\mathbb{G}_a\times\{0\}^{d_0-1}\times\mathbb{G}_m,\\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si $G'=\mathcal{W}\times\{1\}$ on a $\tau=1$, $\delta_0=\delta-1$, $\delta_1=1$, donc $d-\delta=\nu$; comme

$$\frac{(d-\delta)!}{(d_0-\delta_0)!\,(d_1-\delta_1)!}=\frac{\nu!}{\nu!\,0!}=1,$$

on trouve

$$\frac{T}{d_0+1}\operatorname{Card}\big((\Sigma_\nu+G')/G'\big)\le(d_0+1)S^{d_0-\nu}H,$$

ce qui donne la première des conditions.

Si $G'=\mathcal{W}\times\mathbb{G}_m$ on a $\delta_0=\delta$, $\delta_1=0$, donc $d-\delta=\nu+1$ et

$$\frac{(d-\delta)!}{(d_0-\delta_0)!\,(d_1-\delta_1)!}=\frac{(\nu+1)!}{\nu!\,1!}=\nu+1\ ;$$

de plus $\mathcal{W}\neq K^{d_0}$, donc $\nu<d_0$. Alors si $\mathcal{W}\not\ni(1,0,\dots,0)$ (c'est-à-dire $\tau=1$) on trouve

$$(\nu+1)\frac{T}{d_0+1}\operatorname{Card}s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1})\le(d_0+1)S^{d_0-\nu},$$

ce qui est la seconde condition, tandis que si $\mathcal{W}\ni(1,0,\dots,0)$ on a $\tau=0$ et on trouve

$$(\nu+1)\operatorname{Card}s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1})\le(d_0+1)S^{d_0-\nu},$$

ce qui est la troisième condition. ∎

Dans ce texte nous utiliserons uniquement la conséquence suivante du Corollaire 5.3.

COROLLAIRE 5.4. *Soient s, d et n des entiers avec $0\le s<n$ et $d+s=n$, S, T, H, $L_1,\dots,L_n$ des entiers positifs et $b_1,\dots,b_n$ des éléments de K avec $b_n\neq0$ et* $\operatorname{pgcd}(b_1,\dots,b_n)=1$ *; de plus soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de K^n de dimension d contenant le point $b=(b_1,\dots,b_n)$. On désigne par $s_{\mathcal{V}}\colon K^n\longrightarrow K^n/\mathcal{V}$ la surjection canonique, par $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de K^n, et on suppose que $s_{\mathcal{V}}(e_1),\dots,s_{\mathcal{V}}(e_s)$ est une base de $K^n/\mathcal{V}$. On note $\Phi=\mathbb{Z}^n\cap\mathcal{V}$, on pose $L_i'=L_i/(d+1)$, $(1\le i\le n)$, et on suppose que b n'appartient pas à $\mathbb{Z}^n(2\underline{L}')$. On suppose de plus*

$$S\ge1+4\max\{L_1',\dots,L_n'\},\qquad\frac{(d+1)^2}{d}S<T\le2(d+1)SH$$

et

$$T\operatorname{Card}\Phi(\underline{L}')>(d+1)^2S^dH. \tag{5.5}$$

Enfin soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des éléments non nuls de K engendrant un sous-groupe multiplicatif de K^* de rang $\ge n-1$. S'il existe un polynôme non nul $Q\in K[X_0,X_{s+1},\dots,X_{n-1},Y]$, *de degré total* $\leq S$ *en les d variables* $X_0, X_{s+1}, \ldots, X_{n-1}$ *et de degré* $\leq H$ *en Y, satisfaisant* $D_0^{\tau}Q(\sigma) = 0$ *pour* $0 \leq \tau < T$ *et pour tout* σ *dans l'ensemble*

$$\Sigma = \{(0, \lambda_{s+1}b_n - \lambda_n b_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-1}b_n - \lambda_n b_{n-1}, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n})\ ;\ \lambda \in \Phi(\underline{L})\} \subset K^d \times K^*,$$

alors il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}'$ *de* K^n*, de dimension r avec* $2 \leq r \leq d-1$*, contenant b et contenu dans* $\mathcal{V}$*, tel que, en notant* $s_{\mathcal{V}'} \colon K^n \longrightarrow K^n / \mathcal{V}'$ *la surjection canonique, on ait*

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(\underline{L}')\big) \leq \frac{d}{r} S^{d-r}.$$

DÉMONSTRATION. Posons

$$\mathcal{E}_0 = \{(0, \lambda_{s+1}b_n - \lambda_n b_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-1}b_n - \lambda_n b_{n-1})\ ;\ \lambda \in \Phi(\underline{L}')\} \subset K^d$$

et

$$\Sigma_0 = \{(0, \lambda_{s+1}b_n - \lambda_n b_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-1}b_n - \lambda_n b_{n-1}, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n})\ ;\ \lambda \in \Phi(\underline{L}')\}.$$

Par hypothèse le polynôme Q satisfait les conditions (5.2) avec

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \cdots = \theta_s = 0, \\ \theta_{s+1} &= (0, b_n, \ldots, 0, 0) \\ &\vdots \\ \theta_{n-1} &= (0, 0, \ldots, 0, b_n) \\ \theta_n &= (0, -b_{s+1}, \ldots, -b_{n-1}). \end{aligned}$$

On utilise le Corollaire 5.3 avec $d_0 = n-s$ et $a_\nu = 1/(d+1)$, $(0 \leq \nu \leq d)$. Il nous assure de l'existence d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^d de dimension disons ν satisfaisant l'une au moins des trois propriétés suivantes :

CAS 1.

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_0) \leq (d+1)^2 S^{d-\nu} H.$$

CAS 2. On a $0 \leq \nu \leq d-1$, $\mathcal{W}$ ne contient pas $(1, 0, \ldots, 0)$, et

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0) \leq \frac{(d+1)^2}{\nu+1} S^{d-\nu}.$$

CAS 3. Le sous-espace $\mathcal{W}$ contient $(1, 0, \ldots, 0)$, sa dimension ν vérifie $1 \leq \nu \leq d-1$ et on a

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0) \leq \frac{d+1}{\nu+1} S^{d-\nu}.$$

Nous allons étudier ces trois possibilités successivement, pour obtenir le résultat désiré.

Montrons pour commencer que le premier cas ne peut pas se produire.

Comme b appartient à $\mathcal{V}$ mais pas à $\mathbb{Z}^n(2\underline{L}')$, les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}_0$, et à plus forte raison ceux de Σ_0, sont deux-à-deux distincts. Si $\mathcal{W} = 0$, alors $\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_0) = \operatorname{Card} \Phi(\underline{L}')$; la condition (5.5) montre que le premier cas est impossible avec $\nu = 0$.

Supposons maintenant $\nu \geq 1$; d'après le Lemme 3.1 on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_0) &\geq \operatorname{Card}\{\alpha_1^{\lambda_1}\cdots\alpha_n^{\lambda_n} \ ; \ \lambda \in \Phi(\underline{L}')\}\\ &\geq \operatorname{Card} \Phi(\underline{L}')/\max_{1\leq\imath\leq n}(4L'_\imath + 1) \ ;\end{aligned}$$

or on a supposé $S \geq 4L'_\imath + 1$, ce qui permet de déduire de (5.5) les minorations

$$T \operatorname{Card} \Phi(\underline{L}') > (d+1)^2 S^{d-1} H \max_{1\leq\imath\leq n}\{4L'_\imath + 1\}$$

et

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_0) > (d+1)^2 S^{d-\nu} H.$$

Donc le premier cas est exclu.

Nous allons vérifier la conclusion avec

$$\mathcal{V}' = \{z \in \mathcal{V} \ ; \ \exists z_0 \in K, (z_0, z_{s+1}b_n - z_n b_{s+1}, \ldots, z_{n-1}b_n - z_n b_{n-1}) \in \mathcal{W}\},$$

et $r = \nu + 1$ dans le deuxième cas, $r = \nu$ dans le troisième.

Dans le deuxième cas, on a $\nu \geq 1$: cela résulte de (5.5) et du fait que H est ≥ 1. D'autre part pour $r \geq 2$ on a

$$\frac{(d+1)^2}{r} S^{d-r+1} \leq \frac{d}{r} S^{d-r} T,$$

car $T \geq (d+1)^2 S/d$. Enfin, toujours dans le deuxième cas, comme $\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0) \geq 1$, on a $\nu \leq d-2$.

Dans le troisième cas, on a $\nu \geq 2$: en effet, si on avait $\nu = 1$, cela donnerait $\mathcal{W} = K(1, 0, \ldots, 0)$, et

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0) = \operatorname{Card} \mathcal{E}_0 = \operatorname{Card} \Phi(\underline{L}') > (d+1)^2 S^d H/T \geq \frac{d+1}{2} S^{d-1}$$

grâce à (5.5) et à l'hypothèse $2(d+1)SH \geq T$.

Il reste à vérifier d'une part que $\mathcal{V}'$ est de dimension $\nu + 1$ dans le deuxième cas et ν dans le troisième, d'autre part que l'on a

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(\underline{L}')\big) \leq \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0).$$

Soit $\pi\colon K^d \longrightarrow K^{d-1}$ la projection sur les $d-1$ dernières composantes. Quand $\mathcal{W} \supset \ker \pi = K(1, 0, \ldots, 0)$ (troisième cas), l'image $\mathcal{W}' = \pi(\mathcal{W})$ a pour dimension $\nu - 1$ et $\pi^{-1}(\mathcal{W}') = \mathcal{W}$, tandis que quand $\mathcal{W} \not\supset \ker \pi = K(1, 0, \ldots, 0)$ (deuxième cas), l'image $\mathcal{W}' = \pi(\mathcal{W})$ a pour dimension ν. Soit $s_{\mathcal{W}'}\colon K^{d-1} \longrightarrow K^{d-1}/\mathcal{W}'$ la surjection canonique et soit

$$\mathcal{E}'_0 = \pi(\mathcal{E}_0) = \{(\lambda_{s+1}b_n - \lambda_n b_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-1}b_n - \lambda_n b_{n-1}) \ ; \ \lambda \in \Phi(\underline{L}')\} \subset K^{d-1}.$$

On a évidemment

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}_0') \le \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0).$$

Notons ensuite $\psi\colon \mathcal{V} \longrightarrow K^{d-1}$ la surjection qui envoie $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{V}$ sur $(z_{s+1}b_n - z_n b_{s+1}, \ldots, z_{n-1}b_n - z_n b_{n-1})$; son noyau est bK, ce que l'on voit grâce à l'hypothèse que $s_{\mathcal{V}}(e_1), \ldots, s_{\mathcal{V}}(e_s)$ est une base de $K^n/\mathcal{V}$. La définition que nous avons donnée de $\mathcal{V}'$ s'écrit aussi $\mathcal{V}' = \psi^{-1}(\mathcal{W}')$. Ainsi $\mathcal{V}'$ est un sous-espace de $\mathcal{V}$ de dimension $1+\dim \mathcal{W}'$ qui contient b. Enfin on a $\mathcal{E}_0' = \psi\big(\Phi(\underline{L}')\big)$, ce qui donne

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}'}\big(\mathcal{E}_0'\big) = \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(\underline{L}')\big).$$

Le diagramme est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
K^d & \xrightarrow{\pi} & K^{d-1} & \xleftarrow{\psi} & \mathcal{V} \\
\downarrow{\scriptstyle s_{\mathcal{W}}} & & \downarrow{\scriptstyle s_{\mathcal{W}'}} & & \downarrow \\
K^d/\mathcal{W} & \longrightarrow & K^{d-1}/\mathcal{W}' & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{V}/\mathcal{V}' \\
\cup & & \cup & & \cup \\
s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_0) & & s_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}_0') & & s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(\underline{L}')\big)
\end{array}$$

■

6. **Les paramètres.** On se place sous les hypothèses (2.1) à (2.12) du paragraphe 2, et on suppose en outre

$$|\Lambda| < e^{-\nu U}.$$

On va définir des entiers positifs H, S, $L_1, \ldots, L_n$, T_1, T_2, T et des nombres réels positifs L, P, P_0, P_1, P_2, U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, V_0, V_1, u_0, v_0, q et ϱ.

On pose

$$H = [c_3 DG/\log E], \quad S = [c_4 U/DG],$$

$$T_1 = \min\left\{\left[\frac{G}{c_5}\right] ; \left[\frac{U}{c_5 DZ}\right]\right\}, \quad T_2 = [c_1 U/DZT_1], \quad T = T_1 T_2$$

et

$$L_i = [c_2 U/DH \log A_i] \quad (1 \le i \le n).$$

Il est intéressant de comparer avec le choix fait au paragraphe 6 de [W4] : les rôles de G et Z sont permutés.

Posons ensuite $q = \mu w - (\eta/g)$, de manière à remplacer (2.8) par

$$n(1+\mu)^2 w^2 \le c_3 c_4 q,$$

puis

$$P = qgU/D, \quad P_0 = \left(\eta + \frac{107c_4}{103c_5}\right)\frac{U}{D} + nU, \quad P_1 = P + P_0 - nU, \quad P_2 = P + P_0.$$

Posons aussi

$$u_0 = \frac{c_1}{c_6'} + \frac{c_4}{c_6} + \frac{nc_2}{f} + \Big(c_1 + c_4 + \frac{107c_4}{103c_5}\Big)\frac{1}{D} + 2\eta,$$
$$v_0 = \Big(qg + c_1 + c_4 + \frac{107c_4}{103c_5} + \eta\Big)\Big(\frac{1}{g} - \frac{1}{D}\Big) + \frac{nc_2}{g} + \eta,$$

de telle sorte que (2.12) s'écrive

$$u_0 + v_0 = w + \Big(qg + \eta\Big)\Big(\frac{1}{g} - \frac{1}{D}\Big),$$

et choisissons $U_0 = u_0U$, $V_0 = v_0U$, $V_1 = vU$. Enfin prenons

$$U_1 = \Big(\frac{c_1}{c_6'} + \frac{c_4}{c_6}\Big)U, \quad U_2 = (c_1 + c_4)\frac{U}{D}, \quad U_3 = P_2 + U_2 + \frac{nc_2U}{fE} + \eta\frac{U}{D},$$
$$U_4 = \Big(\frac{D}{g} - 1\Big)(P_1 + U_2) + \frac{n}{g}(c_2 + 1)U$$

et

$$L = \max\Big\{\frac{T}{EH}, \max_{1\le i<n}\{L_ib_n + L_n|b_i|\}\Big\}, \qquad \varrho = \frac{\mu g}{\mu(D-g) + D}.$$

On note aussi $d_j = [\mathbb{Q}(\alpha_j) : \mathbb{Q}]$, $(1 \le j \le n)$, et on choisit une base $\xi_1, \dots, \xi_D$ de K sur $\mathbb{Q}$, formée d'éléments de la forme $\alpha_1^{u_1} \cdots \alpha_n^{u_n}$, avec $0 \le u_j < d_j$ et $u_1 + \cdots + u_n \le D$.

LEMME 6.1. *On a*

$$U_0 + V_0 \ge 2, \quad E \ge e, \quad T = T_1T_2, \tag{6.2}$$
$$\begin{cases} P + \log(2E) \le \varrho(U_0 + V_0), \\ P + 2n\log\big((1+\varrho)(U_0 + V_0)\big) + \log 9 \le \varrho(U_0 + V_0), \end{cases} \tag{6.3}$$
$$P_0 \ge \log\Big(S^n(H+1)\sum_{\delta=1}^{D}|\xi_\delta|\Big) + \frac{107}{103}ST_1, \tag{6.4}$$
$$P_1 \ge P + \frac{107}{103}ST_1 + \log\big(DS^n(H+1)\big), \tag{6.5}$$
$$U_1 \ge (S+T)(1 + \log E), \tag{6.6}$$
$$U_0 \ge P_0 + U_1 + U_2 + EH\sum_{i=1}^{n} L_i|\log\alpha_i| + L_nEH|\Lambda|, \tag{6.7}$$
$$gn(1+\varrho)^2(U_0 + V_0)^2 \le (S+1)D(H+1)P\log E, \tag{6.8}$$
$$U_2 \ge S\log\Big\{e\Big(\frac{2n^2L}{S} + 1\Big)\Big\} + T\log\Big\{2e\Big(\frac{H}{T_1} + 2\Big)\Big\}, \tag{6.9}$$
$$U_3 \ge \log(2L_nH) + P_2 + U_2 + \sum_{i=1}^{n} L_iH|\log\alpha_i|, \tag{6.10}$$
$$U_4 \ge \Big(\frac{D}{g} - 1\Big)(P_1 + U_2) + \frac{D}{g}\sum_{i=1}^{n}(L_iH + d_i)h(\alpha_i), \tag{6.11}$$

et

$$U_4 + \log 2 \le V_0, \quad U_3 + U_4 + \log 2 \le V_1. \tag{6.12}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

VÉRIFICATION DE (6.3). Commençons par vérifier

$$\mu g w = D\varrho(u_0+v_0) \text{ et } (1+\mu)w = (1+\varrho)(u_0+v_0). \tag{6.13}$$

La définition de ϱ s'écrit

$$\frac{g\mu}{1+\mu} = \frac{D\varrho}{1+\varrho},$$

donc les deux formulations de (6.13) sont équivalentes. Elles se déduisent de

$$u_0+v_0 = w\left(1+\mu g\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{D}\right)\right) \text{ et } D\varrho\left(1+\mu-\frac{\mu g}{D}\right) = \mu g.$$

Enfin on a $\log(2E) \leq \eta U/D$ car $U \geq D\log E$ et $\eta \geq 2$. Il ne reste plus qu'à utiliser (2.10) avec la définition de $q = \mu w - (\eta/g)$.

VÉRIFICATION DE (6.4) ET (6.5). On majore d'abord $\log\max_{\delta=1}^{D}|\xi_\delta|$ par $nD^2\log\max\{A_1,\ldots,A_n\} \leq nU$, ensuite $H+1$ par $c_3D(G+1) \leq c_3DG^2$, et on trouve en utilisant (2.9) :

$$DS^n(H+1) \leq c_3c_4^nU^n \leq e^{\eta U/D}.$$

Enfin ST_1 est majoré par c_4U/c_5D.

VÉRIFICATION DE (6.6) ET (6.9). Il s'agit de vérifier d'une part

$$e\left(\frac{2n^2L}{S}+1\right) \leq e^G \text{ et } eE \leq e^{DG/c_6}, \tag{6.14}$$

d'autre part

$$2e\left(\frac{H}{T_1}+2\right) \leq e^Z \text{ et } eE \leq e^{DZ/c_6'}. \tag{6.15}$$

On majore $L_\iota b_n + L_n|b_\iota|$ par

$$c_2\frac{U}{DH}\left(\frac{b_n}{\log A_\iota}+\frac{|b_\iota|}{\log A_n}\right).$$

Notre Définition (2.2) de M permet de majorer $(|b_\iota|/\log A_n) + (b_n/\log A_\iota)$ par M. On minore ensuite H par $(c_3-1)DG/\log E$ et S par $(c_4-1)U/DG$, ce qui permet de majorer c_2U/DHS par $c_2\log E/(c_3-1)(c_4-1)D$. On en déduit, grâce à la première des conditions (2.7),

$$\frac{L_\iota b_n + L_n|b_\iota|}{S} \leq \frac{c_2M\log E}{(c_3-1)(c_4-1)D} \leq \frac{c_0M\log E}{2n^2eD}.$$

D'autre part T/HS est majoré par $c_1\log E/(c_3-1)(c_4-1)DZ$; de nouveau la première des conditions (2.7) entraîne

$$\frac{T}{HES} \leq \frac{c_1\log E}{(c_3-1)(c_4-1)DZE} \leq \frac{c_0M\log E}{2n^2eD} ;$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

ainsi on trouve

$$\frac{2n^2L}{S} \leq \frac{c_0 M \log E}{eD}.$$

L'inégalité (6.14) résulte ainsi du choix (2.5) de G.

Passons à (6.15). Si $G \leq U/DZ$, alors $T_1 = [G/c_5]$; pour $x \geq 1$ on a $[x] > x/2$, donc $T_1 \geq G/2c_5$ et on a

$$\frac{H}{T_1} \leq \frac{2c_5 H}{G} \leq \frac{2c_3c_5 D}{\log E}.$$

Si $G \geq U/DZ$, alors $T_1 = [U/c_5DZ]$, et la condition $U \geq c_5DZ$ nous autorise à minorer T_1 par $U/2c_5DZ$; alors l'hypothèse $U \geq D^2GZ/\log E$ donne

$$\frac{H}{T_1} \leq \frac{2c_5DZH}{U} \leq \frac{2c_3c_5D^2GZ}{U \log E} \leq 2c_3c_5.$$

Dans les deux cas on obtient, en utilisant la seconde des conditions (2.7),

$$\frac{2eH}{T_1} \leq c_0' \max\left\{\frac{D}{\log E}, 1\right\}.$$

Compte tenu de (2.4), ceci démontre (6.15).

VÉRIFICATION DE (6.7). Pour $1 \leq i \leq n$, on majore $EH\sum_{i=1}^n L_i|\log \alpha_i|$ par nc_2U/f à cause de (2.3).

Montrons que l'on peut majorer $L_nEH|\Lambda|$ par U. Il s'agit de voir que l'on a (*)

$$c_2E|\Lambda| \leq D \log A_n. \tag{6.16}$$

Si α_n est une racine de l'unité, alors

$$\frac{\pi}{D^2} \leq |\log \alpha_n| \leq \frac{nD\log A_n}{fE}.$$

Sinon, on a

$$10^{-D} \leq h(\alpha_n) \leq n \log A_n.$$

D'autre part on a $U \geq D \log E$ et

$$v > \frac{nc_2}{fE} + 6 > 1 + \log\left(\frac{nc_2}{\pi f E}\right), \quad v > \frac{nc_2}{2} + 6 > 1 + \log(10nc_2),$$

ce qui permet de vérifier

$$e^{vU} \geq E^{Dv} \geq nc_2 E \max\left\{10^D, \frac{D^2}{\pi f E}\right\}.$$

L'inégalité (6.16) résulte ainsi de l'hypothèse $|\Lambda| < e^{-vU}$.

Pour compléter la démonstration de (6.7), on majore $(\eta/D) + n + 1$ par 2η.

(*) Une correction, due à T Okada, dans la vérification de (6 16), a été incluse lors de la lecture des épreuves

VÉRIFICATION DE (6.8). C'est l'hypothèse (2.8), en tenant compte de (6.13) et de l'inégalité

$$(S+1)(H+1) > c_3c_4U/\log E.$$

VÉRIFICATION DE (6.10). On utilise les majorations (*cf.* (2.9) et (2.3))

$$2L_nH \leq \frac{2c_2U}{D\log A_n} \leq \exp\{\eta U/D\} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} L_iH|\log\alpha_i| \leq nc_2U/fE.$$

On conclut en utilisant la définition de U_3.

VÉRIFICATION DE (6.11). L'inégalité (6.11) résulte des majorations

$$\sum_{i=1}^{n} DL_iHh(\alpha_i) \leq nc_2U \text{ et } \sum_{i=1}^{n} d_ih(\alpha_i) \leq nD\max\{\log A_i\} \leq nU/D.$$

et de la définition de U_4.

VÉRIFICATION DE (6.12). On commence par majorer $\log 2$ par U. Pour la première inégalité, on majore $(n/g)+1$ par η et on utilise la définition de ν_0 ; pour la seconde, on majore $(\eta/D)+(n/g)+n+1$ par 3η et on utilise la définition (2.11) de ν. ∎

7. **Résolution d'un système d'équations.** On reprend les hypothèses du paragraphe 6 ; en particulier les contraintes (2.1) à (2.12) sont satisfaites, et on a

$$|\Lambda| \leq e^{-\nu U}.$$

On se donne un entier s, $0 \leq s \leq n-2$ et un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension $d = n-s$ avec $2 \leq d \leq n$, qui contient $(b_1, \ldots, b_n)$ et qui est défini par des équations

$$z_j = \sum_{i=s+1}^{n} u_i^{(j)} z_i \quad (1 \leq j \leq s).$$

On suppose donc

$$b_j = \sum_{i=s+1}^{n} u_i^{(j)} b_i \quad (1 \leq j \leq s).$$

(Le cas "générique" est celui où $s=0, d=n$.) On définit des nombres ϑ_i, $(s+1 \leq i \leq n)$, par

$$\vartheta_i = \log\alpha_i + \sum_{j=1}^{s} u_i^{(j)} \log\alpha_j.$$

Ainsi, pour $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{V}$, on a

$$\sum_{i=s+1}^{n} z_i\vartheta_i = z_1\log\alpha_1 + \cdots + z_n\log\alpha_n.$$

En particulier

$$\sum_{i=s+1}^{n-1} b_i\vartheta_i = -b_n\vartheta_n + \Lambda. \tag{7.1}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 7.2. *Il existe des entiers rationnels* $q_{\delta\sigma h}$, *(*$1 \leq \delta \leq D$, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| < S$, $0 \leq h \leq H$*), non tous nuls, majorés par*

$$\max_{\delta,\sigma,h} |q_{\delta\sigma h}| \leq e^{P_1},$$

tels que

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\sigma_0=0}^{\min\{\tau,S\}} \sum_{\sigma_{s+1}} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}} \sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta \binom{\tau}{\sigma_0} h^{\tau-\sigma_0} \prod_{\iota=s+1}^{n-1} \Delta(\lambda_\iota b_n - \lambda_n b_\iota \,;\, \sigma_\iota) \prod_{\iota=1}^{n} \alpha_\iota^{\lambda_\iota h} = 0,$$

pour $0 \leq \tau \leq T$ *et pour tout* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 7.2.

PREMIÈRE ÉTAPE: CONSTRUCTION DES $q_{\delta\sigma h}$. On va appliquer la Proposition 4.1 avec

$$\lambda_0(u) = (\vartheta_{s+1}u_{s+1} + \cdots + \vartheta_{n-1}u_{n-1})/b_n,$$
$$\lambda_\iota(u) = u_\iota, \quad u_\iota = \lambda_\iota b_n - \lambda_n b_\iota, \quad r_\iota = L_\iota b_n + L_n|b_\iota|, \quad (s+1 \leq i \leq n-1),$$
$$\xi_{\delta\sigma h} = \nu(T_1)^{\sigma_0}\xi_\delta,$$
$$r' = \sum_{\iota=1}^{n} L_\iota|\log\alpha_\iota| + L_n|\Lambda|,$$

où, pour k entier positif, $\nu(k)$ désigne le plus petit commun multiple des entiers $1, 2, \ldots, k$. En utilisant l'inégalité $\log \nu(k) \leq 107k/103$ du Lemme 2.2 de [W4], on trouve, grâce à (6.4),

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} |\xi_\delta|\nu(T_1)^{\sigma_0} \leq S^d(H+1)\sum_{\delta=1}^{D}|\xi_\delta| \cdot e^{107T_1S/103} \leq e^{P_0}.$$

Les conditions (6.2) à (6.9) permettent de vérifier les hypothèses de la Proposition 4.1. On en déduit l'existence d'entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$, avec

$$\max_{\delta,\sigma,h} |p_{\delta\sigma h}| \leq e^{P},$$

tels que, si on pose

$$q_{\delta\sigma h} = \nu(T_1)^{\sigma_0} p_{\delta\sigma h},$$

on ait

$$\left|\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta \Delta(h+\tau_1 \,;\, T_1, \tau_2, \sigma_0) \prod_{\iota=s+1}^{n-1} \Delta(\lambda_\iota b_n - \lambda_n b_\iota \,;\, \sigma_\iota) e^{\vartheta_\iota(\lambda_\iota b_n - \lambda_n b_\iota)h/b_n}\right| \leq e^{-V_0}$$

pour tout $\tau_1, \tau_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ entiers avec

$$0 \leq \tau_1 < T_1, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T_2 \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}.$$

Notons que l'on a, grâce à (6.5),

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|<S} \sum_{h=0}^{H} |q_{\delta\sigma h}| \leq e^{P_1}, \tag{7.3}$$

et aussi

$$\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H}|q_{\delta\sigma h}\xi_\delta| \le e^{P_2}. \tag{7.4}$$

DEUXIÈME ÉTAPE: MAJORATION D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE. Pour chaque $(n+2)$-uplet $(\tau_1,\tau_2,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ d'entiers rationnels avec $0 \le \tau_1 < T_1$, $0 \le \tau_2 \le T_2$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}$, posons

$$\nu_{\tau\lambda} = \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\Delta(h+\tau_1\,;T_1,\tau_2,\sigma_0)\prod_{\iota=s+1}^{n-1}\Delta(\lambda_\iota b_n-\lambda_n b_\iota\,;\sigma_\iota)\prod_{\iota=1}^{n}\alpha_\iota^{\lambda_\iota h}.$$

Nous allons vérifier la majoration

$$|\nu_{\tau\lambda}| \le e^{-V_0}+e^{-V_1+U_3}.$$

D'après (7.1), on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n$,

$$\sum_{\iota=s+1}^{n-1}(\lambda_\iota b_n-\lambda_n b_\iota)\vartheta_\iota/b_n = \sum_{\iota=s+1}^{n}\lambda_\iota\vartheta_\iota-\frac{\lambda_n\Lambda}{b_n},$$

donc pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{V}$,

$$\prod_{\iota=s+1}^{n-1} e^{(\lambda_\iota b_n-\lambda_n b_\iota)\vartheta_\iota h/b_n} = e^{-\lambda_n h\Lambda/b_n}\prod_{\iota=1}^{n}\alpha_\iota^{\lambda_\iota h}.$$

On va maintenant utiliser l'inégalité

$$|e^z-1| \le \frac{e^R-1}{R}|z| \text{ pour } |z| \le R.$$

D'après (6.10) et (6.12) on a $L_nH|\Lambda|/b_n \le L_nHe^{-V_1} < 1$, donc

$$|e^{-\lambda_n h\Lambda/b_n}-1| \le 2L_nHe^{-V_1}.$$

Il reste à constater que la quantité

$$2L_nH\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|<S}\sum_{h=0}^{H}|q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\Delta(h+\tau_1\,;T_1,\tau_2,\sigma_0)|\prod_{\iota=s+1}^{n-1}|\Delta(\lambda_\iota b_n-\lambda_n b_\iota\,;\sigma_\iota)|\prod_{\iota=1}^{n}|\alpha_\iota|^{\lambda_\iota h}$$

est majorée par e^{U_3}, comme le montrent les conditions (6.10) et (7.4), jointes aux majorations

$$|\Delta(h+\tau_1\,;T_1,\tau_2,\sigma_0)| \le \left(\frac{H}{T_1}+2\right)^T(2e)^T \tag{7.5}$$

(*cf.* Lemme 2.2 de [W4]) et

$$\prod_{\iota=s+1}^{n-1}|\Delta(\lambda_\iota b_n-\lambda_n b_\iota\,;\sigma_\iota)| \le \left(\frac{dL}{S}+1\right)^S e^S \tag{7.6}$$

(*cf.* Lemme 3.3).

TROISIÈME ÉTAPE: MINORATION D'UN NOMBRE ALGÉBRIQUE (LIOUVILLE). Fixons $\tau_1, \tau_2, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme au début de la deuxième étape et montrons que, si le nombre algébrique $\nu_{\tau\lambda}$ n'est pas nul, alors il est minoré par

$$|\nu_{\tau\lambda}| \geq e^{-U_4}.$$

En effet, $\nu_{\tau\lambda}$ est la valeur d'un polynôme en $2n$ variables $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$, évalué au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})$. Les coefficients de ce polynôme sont entiers rationnels, car les nombres $q_{\delta\sigma h}$ sont divisibles par $\nu(T_1)^{\sigma_0}$ (*cf.* [W4] Lemme 2.2). Le degré en X_ι de ce polynôme est au plus $L_\iota H + d_\iota$ si $\lambda_\iota \geq 0$, et d_ι si $\lambda_\iota \leq 0$, tandis que le degré en Y_ι est au plus 0 si $\lambda_\iota \geq 0$, et $L_\iota H$ si $\lambda_\iota \leq 0$. Les conditions (6.9), (7.3), (7.5) et (7.6) permettent de majorer la longueur de ce polynôme par $\exp\{P_1 + U_2\}$.

Soit v_0 la place archimédienne du corps $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ correspondant au plongement de ce corps dans $\mathbb{C}$ associé au fait que les α_j sont des nombres complexes. Montrons que l'on peut supposer $d_{v_0} = g$. Si $g = 1$, alors $\alpha_j = \exp(\log \alpha_j) \in \mathbb{R}$ et $d_{v_0} = 1$. Si $d_{v_0} = 1$, alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont réels et $\log \alpha_j = \log|\alpha_j| + i\pi k_j$ avec $k_j \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n} b_j \log|\alpha_j| + 2i\pi k$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme $\sum_{j=1}^{n} b_j \log|\alpha_j| \in \mathbb{R}$, l'hypothèse $|\Lambda| < e^{-\nu U}$ assure $k = 0$. Dans ce cas, quitte à remplacer $\log \alpha_j$ par $\log|\alpha_j|$, on peut supposer $g = 1$.

Ainsi on peut utiliser le Lemme 3.5 avec $d_{v_0} = g$; la condition (6.11) fournit la conclusion.

QUATRIÈME ÉTAPE: CONCLUSION. Grâce à (6.12), les deux étapes précédentes montrent que l'on a $\nu_{\tau\lambda} = 0$ pour tout $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}$. Posons, pour $0 \leq \sigma_0 \leq S$ et $0 \leq h \leq H$,

$$p_{\sigma_0 h} = \frac{1}{\sigma_0!} \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\sigma_{s+1}} \cdots \sum_{\sigma_{n-1}} q_{\delta\sigma h} \xi_\delta \prod_{\iota=s+1}^{n-1} \Delta(\lambda_\iota b_n - \lambda_n b_\iota \,;\, \sigma_\iota) \prod_{\iota=1}^{n} \alpha_\iota^{\lambda_\iota h}.$$

On a donc

$$\nu_{\tau\lambda} = \sum_{\sigma_0=0}^{S} \sum_{h=0}^{H} p_{\sigma_0 h} \sigma_0! \Delta(h + \tau_1 \,;\, T_1, \tau_2, \sigma_0).$$

On utilise la seconde partie du Lemme 3.4 :

$$\sum_{\sigma_0=0}^{\min\{S,\tau\}} \sum_{h=0}^{H} p_{\sigma_0 h} \frac{\tau!}{(\tau - \sigma_0)!} h^{\tau - \sigma_0} = 0$$

pour $0 \leq \tau \leq T$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}$. Ceci termine la démonstration de la Proposition 7.2. ∎

8. **Démonstration du Théorème 2.18.** On va utiliser la construction précédente une première fois avec $d = n$; elle permettra de conclure dans le cas $n = 2$. Dans le cas $n \geq 3$, cette construction produit un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension d ; on utilise une deuxième fois la machine transcendante pour terminer la démonstration du Théorème 2.18.

Commençons par exploiter les inégalités du paragraphe 2 pour vérifier les hypothèses du Corollaire 5.4.

LEMME 8.1. *Sous les contraintes (2.1) à (2.17), on a*

$$S \geq \max_{1 \leq \iota \leq n} (4L_\iota + 1), \tag{8.2}$$

$$T > \frac{(n+1)^2}{n} S, \tag{8.3}$$

et

$$T \leq 2(n+1)SH \; ; \tag{8.4}$$

de plus, si on pose $\underline{L}' = (L'_1, \ldots, L'_n)$ *avec* $L'_\iota = L_\iota / a$, $(1 \leq i \leq n)$, *alors*

$$T \operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(\underline{L}') > (n+1)^2 S^n H \; ; \tag{8.5}$$

enfin pour démontrer le Théorème 2.18 il n'y a pas de restriction à supposer

$$\operatorname{pgcd}(b_1, \ldots, b_n) = 1 \text{ et } b \notin \mathbb{Z}^n(2\underline{L}). \tag{8.6}$$

DÉMONSTRATION. a) *Vérification de (8.2).* On minore S et on majore L_ι :

$$S - 1 \geq \left(c_4 - \frac{2}{c'_6}\right) \frac{U}{DG} \text{ et } L_\iota \leq \frac{c_2 U}{DH \log A_\iota}.$$

Il s'agit donc de vérifier

$$\left(c_4 - \frac{2}{c'_6}\right) H > \frac{4c_2 G}{\log A_\iota}.$$

Comme

$$H \geq \left(c_3 - \frac{1}{c_6}\right) \frac{DG}{\log E},$$

il reste plus qu'à minorer c_6 et c'_6 par 1 et à utiliser (2.13).

b) *Vérification de (8.3).* De l'inégalité $T_1 \leq U / c_5 DZ$ on déduit

$$T > c_1 \frac{U}{DZ} - T_1 \geq \frac{U}{DZ}\left(c_1 - \frac{1}{c_5}\right) \; ;$$

alors, grâce à l'hypothèse (2.15), on a

$$T > \left(c_1 - \frac{1}{c_5}\right) \frac{U}{DZ} \geq \frac{(n+1)^2}{n} \frac{c_4 U}{DG} \geq \frac{(n+1)^2}{n} S.$$

c) *Vérification de (8.4).* L'inégalité (2.14) permet de minorer HS par $T/2(n+1)$, car

$$HS > (c_3-1)(c_4-1)\frac{U}{\log E} \geq \frac{c_1 U}{2(n+1)DZ} \geq \frac{T}{2(n+1)}.$$

d) *Vérification de (8.5).* On a

$$\operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(\underline{L}') > \prod_{\imath=1}^{n}\left(\frac{2L_\imath}{a}-1\right)$$

avec

$$L_\imath \geq \frac{c_2 U \log E}{c_3 D^2 G \log A_\imath} - 1, \quad (1 \leq i \leq n).$$

En minorant $U\log E$ par $D^2 G \log A_\imath$ avec (2.16), on déduit

$$\frac{2L_\imath}{a} - 1 \geq \frac{2c_2 U \log E}{ac_3 D^2 G \log A_\imath}\left(1 - \frac{(2+a)c_3}{2c_2}\right), \quad (1 \leq i \leq n).$$

On déduit ainsi facilement (8.5) des hypothèses (2.16) et (2.17).

e) *Vérification de (8.6).* Si b appartenait à $\mathbb{Z}^n(2\underline{L})$ l'inégalité de Liouville (Lemme 3.5) donnerait

$$\log|\Lambda| \geq -D\log 2 - 2D\sum_{\imath=1}^{n} L_\imath h(\alpha_\imath).$$

Mais alors les inégalités

$$D\log 2 \leq \eta U, \quad 2D\sum_{\imath=1}^{n} L_\imath h(\alpha_\imath) \leq \frac{2nc_2}{c_3-1}U, \quad \nu \geq \frac{2nc_2}{c_3-1} + \eta$$

montrent que la conclusion du Théorème 2.18 est satisfaite.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.18. Supposons que la conclusion du Théorème 2.18 ne soit pas satisfaite.

PREMIÈRE UTILISATION DE LA MACHINE. Nous utilisons la construction transcendante conjointement avec le lemme de zéros pour montrer qu'*il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension ν avec $2 \leq \nu \leq n-1$, contenant $(b_1, \ldots, b_n)$ et vérifiant*

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\Big(\mathbb{Z}^n\big(\underline{L}/(n+1)\big)\Big) \leq \frac{n}{\nu} S^{n-\nu}. \tag{8.7}$$

On remarquera que l'inégalité (8.7) est trivialement vérifiée dans le cas $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$, mais il s'agit de la montrer avec un sous-espace $\mathcal{V}$ de dimension $< n$. En particulier cette première étape termine la démonstration du Théorème 2.18 dans le cas particulier $n = 2$.

Pour démontrer (8.7) on utilise la Proposition 7.2, avec $d = n$, $s = 0$, $\mathcal{V} = \mathbb{C}^n$: il existe un polynôme non nul

$$Q(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}, Y) = \sum_{\delta}\sum_{\sigma}\sum_{h} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta \frac{1}{\sigma_0!} X_0^{\sigma_0}\left(\prod_{\imath=1}^{n-1}\Delta(X_\imath\,;\sigma_\imath)\right) Y^h,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

de degré $\leq S$ en $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ et de degré $\leq H$ en Y, tel que la fonction

$$\Psi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = Q(z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, e^{z_0} z_n)$$

vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\tau \Psi(0, \lambda_1 b_n - \lambda_n b_1, \ldots, \lambda_{n-1} b_n - \lambda_n b_{n-1}, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) = 0$$

pour $0 \leq \tau \leq T$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n(\underline{L})$. Ce polynôme Q satisfait donc l'hypothèse principale du Corollaire 5.4. Les autres hypothèses de ce corollaire sont vérifiées grâce au Lemme 8.1 ; en particulier la condition (5.5) résulte de (8.5). Ce corollaire nous permet de trouver un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension ν avec $2 \leq \nu \leq d - 1$, contenant $b = (b_1, \ldots, b_n)$, et satisfaisant

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\Big(\mathbb{Z}^n\big(\underline{L}/(n+1)\big)\Big) \leq \frac{n}{\nu} S^{n-\nu}.$$

DEUXIÈME UTILISATION DE LA MACHINE. On peut donc maintenant supposer $n \geq 3$. On remarque que $\mathbb{Z}^n\big(\underline{L}/(n+1)\big)$ contient $\mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n)$. On choisit pour d le plus petit entier dans l'intervalle $2 \leq d \leq n-1$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}^n$, de dimension d, contenant $(b_1, \ldots, b_n)$ et vérifiant

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n)\big) \leq \frac{n}{d} S^{n-d}. \tag{8.8}$$

La codimension de $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{C}^n$ est $s = n - d$: on peut donc trouver un sous-ensemble J de $\{1, \ldots, n\}$ ayant s éléments tel que $\mathcal{V}$ soit intersection de $s = n - d$ hyperplans

$$z_j = \sum_{i \notin J} u_i^{(j)} z_i, \quad (j \in J) ;$$

de plus, comme $b_n \neq 0$ et que $(b_1, \ldots, b_n)$ appartient à $\mathcal{V}$, on peut supposer $n \notin J$ (noter qu'il n'est pas utile de connaître la majoration fournie par le Lemme 2.5 de [W4]). Pour utiliser la construction du paragraphe 7, on supposera $J = \{1, \ldots, s\}$, ce qui simplifie les notations, mais ne restreint pas la généralité.

Les hypothèses de la Proposition 7.2 étant vérifiées, on dispose d'un polynôme non nul

$$Q(X_0, X_{s+1}, \ldots, X_{n-1}, Y) = \sum_\delta \sum_\sigma \sum_h q_{\delta\sigma h} \xi_\delta \frac{1}{\sigma_0!} X_0^{\sigma_0} \Big(\prod_{i=s+1}^{n-1} \Delta(X_i ; \sigma_i)\Big) Y^h,$$

de degré $\leq S$ en $X_0, X_{s+1}, \ldots, X_{n-1}$ (dans la somme sur σ, on a $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^d$ avec $\|\sigma\| \leq S$) et de degré $\leq H$ en Y, tel que la fonction

$$\Psi(z_0, z_{s+1}, \ldots, z_n) = Q(z_0, z_{s+1}, \ldots, z_{n-1}, e^{z_0} z_n)$$

vérifie

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^\tau \Psi(0, \lambda_{s+1} b_n - \lambda_n b_{s+1}, \ldots, \lambda_{n-1} b_n - \lambda_n b_{n-1}, \alpha_1^{\lambda_1} \cdots \alpha_n^{\lambda_n}) = 0$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

pour $0 \leq \tau \leq T$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}^n(\underline{L}) \cap \mathcal{V}$. Par conséquent Q satisfait l'hypothèse principale du Corollaire 5.4. Il faut encore vérifier (5.5). En utilisant le Lemme 3.2, on trouve

$$\operatorname{Card}\big(\Phi(\underline{L}/n)\big) \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n)\big) \geq \operatorname{Card} \mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n),$$

ce qui, joint à (8.5) et (8.8), donne

$$T \operatorname{Card}\big(\Phi(\underline{L}/n)\big) > (n+1)^2 \frac{d}{n} S^d H.$$

A plus forte raison on a

$$T \operatorname{Card}\Big(\Phi\big(\underline{L}/(d+1)\big)\Big) > (d+1)^2 S^d H,$$

ce qui est la contrainte (5.5).

On trouve ainsi en utilisant le Corollaire 5.4 un sous-espace $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ de dimension r, avec $2 \leq r \leq d-1$, contenant $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et satisfaisant

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\Big(\Phi\big(\underline{L}/(d+1)\big)\Big) \leq \frac{d}{r} S^{d-r}\,;$$

le Lemme 3.2 permet maintenant d'écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n)\big) &\leq \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}\big(\Phi(\underline{L}/n)\big) \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}\big(\mathbb{Z}^n(\underline{L}/2n)\big)\\ &\leq \frac{n}{d} S^{n-d} \cdot \frac{d}{r} S^{d-r}\\ &\leq \frac{n}{r} S^{n-r},\end{aligned}$$

contredisant la minimalité de d. Ceci termine la démonstration du Théorème 2.18. ∎

9. **Démonstration du Corollaire 1.5.** a) *Mode d'emploi du Théorème 2.18.* Avant de procéder à la démonstration du Corollaire 1.5 nous donnons quelques explications sur le choix des paramètres que nous allons faire pour vérifier les hypothèses (2.1) à (2.17).

Certains choix se reflètent dans l'énoncé du Corollaire 1.5 ; par exemple nous constaterons plus loin que nos paramètres c_3 et c_5 satisfont $4c_3c_5 < e^6n^3 - 4$; on peut donc prendre $c_0' = e^7n^3 - 4e$ pour satisfaire la seconde partie de (2.7), et, à cause de (2.4), c'est ce terme qui est directement à l'origine du $7 + 3\log n$ dans la définition de Z_0. Dans cette même définition, le terme $(g/D)\log E$ vient de ce que nous allons prendre (c'est un choix arbitraire) $c_6' = g$; la deuxième condition de (2.4) nous amène naturellement à prendre $Z = 2Z_0$.

Nous verrons que la condition (2.15) impose essentiellement $G \geq 2(n+1)^2 Z/n$ (car c_4 sera voisin de $2c_1$) ; il est alors naturel de prendre $c_6 = 2(n+1)^2 c_6'/n$. Nous avons demandé $G_0 \geq 4nZ_0$; nous pouvons donc choisir $G = (1 + 1/n)^2 G_0$; Les contraintes (2.5) et (2.6) vont nous amener à choisir $c_5 = 4g(n+1)^2/n$, tandis que (2.7) sera satisfait avec $c_0 = 2e$. Dans les applications, on peut généralement choisir les paramètres c_5, c_6 et c_6' plus grand, ce qui améliore légérement les estimations.

Quand on écrit (comme dans le paragraphe 7 b de [W4]) les termes prépondérants de (2.8), (2.12) et (2.17), et que l'on cherche à minimiser v dans (2.11), on trouve qu'il est naturel de poser

$$c_3 = \gamma_3 \frac{n^2}{g}, \quad c_2 = \gamma_2 2^{2n} n^{3n+4} g^{-n-1}\Big(1+\frac{g}{f}\Big)^{n-1},$$

puis

$$c_1 = \gamma_1\Big(1+\frac{g}{f}\Big)c_2, \quad c_4 = \gamma_4\Big(1+\frac{g}{f}\Big)c_2, \quad w = \gamma_0\Big(1+\frac{g}{f}\Big)\frac{n}{g}c_2,$$

avec des nombres réels $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_4$ à déterminer. Ce recentrage des paramètres a pour avantage que les γ_i, $(0 \le i \le 4)$ vont pouvoir être choisis dans des intervalles bornés fixes(*), à savoir :

$$1 \le \gamma_0 < 2.1, \quad 0.5 \le \gamma_1 \le 0.54, \quad 8e^2 < \gamma_2 < 130, \quad 4 \le \gamma_3 < 10, \quad 0.87 \le \gamma_4 < 1,$$

alors que w et les c_i, $(1 \le i \le 4)$ tendent vers l'infini avec n. On réécrit maintenant les contraintes (2.8), (2.12) et (2.17). Il se trouve que nos paramètres vérifieront

$$2g(1+\mu)^2\gamma_0 > \gamma_3\gamma_4, \text{ donc } 2gn(1+\mu)^2 w > c_3c_4\ ;$$

alors (2.8) représente une majoration de w, par conséquent on peut remplacer l'égalité dans (2.12) par une minoration de w. Maintenant on pose

$$\eta = 2n + \frac{n}{67}\log\Big(1+\frac{g}{f}\Big), \quad \epsilon_1 = \frac{107}{103c_5} + \frac{n}{2(n+1)^2}$$

et on choisit

$$\epsilon_2 \ge \frac{\eta}{\mu g w}, \quad \epsilon_3 \ge \frac{3\eta g}{nc_2}\Big(1+\frac{g}{f}\Big)^{-1}, \quad \epsilon_4 \ge \frac{1}{c_1c_5} + \frac{(2+a)nc_3}{2c_2},$$

de manière à remplacer (2.8) par

(9.1) $$(1+\mu)^2\gamma_0 \le \mu\gamma_3\gamma_4(1-\epsilon_2),$$

tandis que (2.12) devient

(9.2) $$\gamma_0 = 1 + \frac{2}{n}\gamma_1 + \frac{1+\epsilon_1}{n}\gamma_4 + \epsilon_3$$

et que (2.17) s'écrit

$$\gamma_1\gamma_2(1-\epsilon_4) \ge \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2\Big(\frac{a}{2n}\Big)^n \gamma_4^n\gamma_3^{n+1}2^{-2n}.$$

(*) Précisons que ces intervalles ne sont pas imposés dans certaines applications il peut être préférable d'utiliser d'autres bornes La connaissance préalable des ces encadrements sert seulement à vérifier que les choix de ϵ, ϵ_1 et η sont licites

En tenant compte de (9.1), on demandera

$$\gamma_2 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{a}{2n}\right)^n \frac{(1+\mu)^{2n+2}\gamma_0^{n+1}}{2^{2n}\mu^{n+1}\gamma_1\gamma_4\left(1-\epsilon_4-(n+1)\epsilon_2\right)}. \tag{9.3}$$

La stratégie est la suivante : on choisit γ_1, γ_4 et μ, on calcule γ_0 par (9.2), puis γ_2 par (9.3) (on ne connait pas encore les valeurs exactes des ϵ_i, mais il suffit de les minorer pour satisfaire (9.2) et (9.3)) ; enfin on pose

$$\gamma_5 = 1+\mu\gamma_0+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_4}{n}\left(1+\frac{107}{103c_5}\right)+\epsilon_3,$$

de manière à pouvoir prendre

$$v = \gamma_5\left(1+\frac{g}{f}\right)\frac{n}{g}c_2$$

et vérifier (2.11).

On obtient ainsi la conclusion du Théorème 2.19 sous la forme $|\Lambda| > e^{-CU_0}$ avec

$$C = \Gamma g^{-n-2}2^{2n}n^{3n+5}\left(1+\frac{g}{f}\right)^n \text{ et } \Gamma = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\gamma_5\gamma_2.$$

Le choix de γ_1, γ_4 et μ est fait de manière à rendre Γ aussi petit que possible.

b) *Choix des paramètres*. Pour plus de clarté nous rappelons les choix que nous venons de faire et nous les complétons. Nous posons d'abord

$$Z = 2Z_0, \quad G = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 G_0, \quad U = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 U_0,$$

ensuite

$$c_0 = 2e, \quad c_0' = e^7n^3-4e, \quad c_5 = 4g(n+1)^2/n, \quad c_6' = g, \quad c_6 = 2g(n+1)^2/n,$$

puis

$$\eta = 2n+\frac{n}{67}\log\left(1+\frac{g}{f}\right), \quad \epsilon_1 = \frac{107}{103c_5}+\frac{n}{2(n+1)^2}, \quad \epsilon = 2^{-2n}n^{-3n-4}g^{n+1}.$$

On choisit maintenant des nombres réels γ_1, γ_4, μ de la manière suivante : pour $2 \leq n \leq 4$, on prend les valeurs dans le tableau ci-dessous tandis que pour $n \geq 5$, on pose

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_4 = 1-\frac{\epsilon}{29c_5} \text{ et } \mu = 1.$$

On pose ensuite, pour $n \geq 2$,

$$\gamma_0 = 1+\frac{2}{n}\gamma_1+\frac{1+\epsilon_1}{n}\gamma_4+\epsilon, \quad \gamma_3 = \frac{(1+\mu)^2\gamma_0}{\mu\gamma_4(1-\epsilon)}$$

et

$$\gamma_2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{a}{2n}\right)^n\frac{(1+\mu)^{2n+2}\gamma_0^{n+1}}{2^{2n}\mu^{n+1}\gamma_1\gamma_4\left(1-n^4\epsilon\right)}.$$

Voici le choix des paramètres γ_1, γ_4 et μ pour $n = 2, 3, 4$, avec les valeurs correspondantes de γ_3, γ_0 et γ_2, d'abord pour $g = 1$, puis pour $g = 2$; nous donnons aussi les valeurs pour $n = 5$ qui résultent des choix ci-dessus. Pour γ_1, γ_4 et μ, les valeurs sont exactes (sauf γ_4 pour $n = 5$, où la valeur exacte est $1-\epsilon/29c_5$ avec $\epsilon/29c_5 < 2\cdot 10^{-18}$), tandis que pour γ_3, γ_0 et γ_2, les valeurs sont arrondies.

				$g=1$			$g=2$		
n	γ_1	γ_4	μ	γ_3	γ_0	γ_2	γ_3	γ_0	γ_2
2	0.54	0.87	0.73	9.65	2.05	99.84	9.60	2.04	98.76
3	0.53	0.88	0.79	7.78	1.69	130.98	7.75	1.68	128.78
4	0.53	0.90	0.83	6.80	1.52	110.06	6.78	1.51	108.37
5	0.50	1.00	1.00	5.68	1.42	94.89	5.67	1.42	93.45

Pour $n \geq 5$ on a

$$4 < \gamma_3 < 4\left(1+\frac{3}{n}\right), \quad 1 < \gamma_0 < 1+\frac{3}{n} \text{ et } 8e^2 < \gamma_2 < 8e^2\left(1+\frac{3}{n}\right).$$

On prend maintenant

$$c_3 = \gamma_3\frac{n^2}{g}, \quad c_2 = \gamma_2 2^{2n} n^{3n+4} g^{-n-1}\left(1+\frac{g}{f}\right)^{n-1},$$
$$c_1 = \gamma_1\left(1+\frac{g}{f}\right)c_2, \quad c_4 = \gamma_4\left(1+\frac{g}{f}\right)c_2$$

puis

$$w = \gamma_0\left(1+\frac{g}{f}\right)\frac{n}{g}c_2, \quad \gamma_5 = 1+\mu\gamma_0+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_4}{n}\left(1+\frac{107}{103c_5}\right)+\epsilon,$$
$$v = \gamma_5\left(1+\frac{g}{f}\right)\frac{n}{g}c_2, \qquad \Gamma = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\gamma_5\gamma_2$$

et

$$C = \Gamma g^{-n-2} 2^{2n} n^{3n+5}\left(1+\frac{g}{f}\right)^n.$$

Un petit calcul fournit les majorations suivantes :

	$n =$	2	3	4	≥ 5
$g = 1,$	$\Gamma <$	1450	1320	910	750
$g = 2,$	$\Gamma <$	1430	1290	890	740

et

$$\Gamma < 2^5 e^2\left(1+\frac{10}{n}\right) \text{ pour } n \geq 6.$$

c) *Vérification des contraintes (2.1) à (2.6) et (2.13) à (2.16).* Les conditions (2.1), (2.2) et (2.3) sont vérifiées par hypothèse. Comme $Z = 2Z_0$ avec d'une part

$$Z_0 \geq \log\max\left\{1, \frac{D}{\log E}\right\} \text{ et } Z_0 \geq \log(c_0' + 4e),$$

d'autre part

$$Z_0 \geq \frac{g}{D}\log E \geq \frac{g}{D},$$

les inégalités (2.4) sont satisfaites. Ensuite on a

$$G = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 G_0 \geq 4n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 Z_0 \geq c_5,$$

$$G_0 \geq \max\left\{\log M, \frac{4n}{D}\log E, 4n\log(c_0+4e)\right\},$$

donc

$$G \geq \left(1+\frac{2}{n}\right)G_0 \geq \log\max\{M,1\} + \log\max\left\{\frac{\log E}{D}, 1\right\} + \log(c_0+e)\ ;$$

enfin

$$G \geq 2n\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 Z \geq \frac{c_6}{D}(1+\log E),$$

ce qui démontre (2.5).

Comme $D\log A_i \geq \log E$, on a $U_0 \geq D^2 G_0 Z_0 / \log E$ et

$$U \geq \frac{D^2 GZ}{\log E} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{DG_0}{\log E} DZ$$

avec

$$\frac{DG_0}{\log E} \geq 4n\frac{DZ_0}{\log E} \geq 4ng,$$

et c'est pourquoi nous avons pris $c_5 = 4gn(1+1/n)^2$. Finalement (2.6) résulte des inégalités $U_0 \geq D^2\log A \geq D\log E$.

Les conditions (2.13) et (2.14) proviennent des majorations

$$4c_2 < (c_4-2)(c_3-1) \text{ et } c_1 < 2g(c_3-1)(c_4-1).$$

Pour démontrer (2.15) on constate que l'on a $c_4c_5 \leq 2(c_1c_5-1)$ car $\gamma_2 > 58$ et

$$\gamma_4 \leq 2\gamma_1 - \frac{2\epsilon}{\gamma_2 c_5} \leq 2\gamma_1\left(1-\frac{1}{c_1c_5}\right).$$

Enfin (2.16) provient des définitions de U et U_0 grâce aux inégalités $DZ \geq 2g\log E$ et $D\log E \geq \log A_i$.

d) *Vérification de (2.7).* Grâce au choix $c_0 = 2e$, la première inégalité $c_0 \geq 2en^2c_2/(c_3-1)(c_4-1)$ résulte de la minoration

$$\gamma_3\left(1-\frac{1}{c_4}\right) \geq 4\gamma_4 - \frac{2}{n^2}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

En utilisant l'inégalité de Liouville, nous allons montrer qu'il n'y a pas de restriction à supposer

$$M(\log E)^3 \geq 2^n n^{3n+4} D^3 G_0 Z_0. \tag{9.4}$$

En effet, si la conclusion du Corollaire 1.5 n'est pas satisfaite, alors, en posant $A^* = \max\{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$, on a

$$|\Lambda| \leq \exp\{-2^{n+1} n^{3n+5} U_0\} \leq \exp\{-2^{n+1} n^{3n+5} D^4 G_0 Z_0 \log A^* \log A_n (\log E)^{-3}\} ;$$

par ailleurs, en appliquant le Lemme 3.5, on trouve

$$|\Lambda| \geq \frac{1}{2} |\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1| \geq 2^{-D} \exp\Big(-D \sum_{j=1}^{n} |b_j| \log A_j\Big),$$

avec $|b_j| \log A_j \leq M \log A_n \log A^*$; la minoration

$$D^3 G_0 Z_0 \log A^* \log A_n (\log E)^{-3} \geq 1$$

suffit pour conclure que (9.4) est bien satisfaite. Ceci démontre la minoration de c_0 dans (2.7). La minoration de c_0' s'écrit, en tenant compte des définitions de c_3 et c_5 :

$$16\gamma_3 n(n+1)^2 \leq e^6 n^3 - 4.$$

On constate en effet que l'on a toujours choisi $\gamma_3 < 11$.

e) *Vérification de (2.12), (2.8) et (2.17).* Nous avons ramené la vérification de (2.8), (2.12) et (2.17) à celle de (9.2) et (9.3). Un calcul simple montre que notre choix de ϵ, avec $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$ et $\epsilon_4 = (n^4 - n - 1)\epsilon$ convient.

f) *Vérification de (2.9) et (2.10).* Notons déjà que $D \log A_n \geq 1$ et $2c_2 U < c_3 c_4^n U^n$. La définition de U et les hypothèses sur G_0 et Z_0 permettent d'écrire

$$\frac{U}{D} \geq \frac{DGZ}{\log E} \geq 2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2 \frac{DG_0 Z_0}{\log E} \geq \frac{8(n+1)^2 D Z_0^2}{n \log E} \geq 8g \frac{(n+1)^2}{n} Z_0,$$

donc

$$\frac{U}{D} \geq 8g \frac{(n+1)^2}{n} (7 + 3\log n) \geq 134 gn.$$

On a aussi

$$U = 2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2 U_0 > 2D \log E$$

et

$$U \geq 8g \frac{(n+1)^2}{n} D Z_0 \geq 8g \frac{(n+1)^2}{n} D \log\Big(\frac{D}{\log E}\Big) \geq 36 D \log\Big(\frac{D}{\log E}\Big),$$

ce qui entraîne $U > 4D \log D$ et $U > 2D \log U$. On a choisit η de manière à vérifier

$$\frac{U}{D}\Big(\eta - \frac{n}{2}\Big) > \log c_3 + n \log c_4 \text{ et } \frac{U}{D}\Big(\eta - n\Big) > 2n \log\big((\mu + 1)w\big) + \log 9.$$

g) *Vérification de (2.11) et conclusion.* Le Théorème 2.9 nous permet de conclure $|\Lambda| > e^{-vU}$, où v est soumis à (2.11). On majore $1/(fE)$ par $1/f$ (on pourrait faire mieux si on imposait une minoration à f), ce qui justifie la définition de γ_5 et fournit la conclusion $|\Lambda| > e^{-CU_0}$.

10. **Autres corollaires.** Dans cette dernière section nous énonçons et nous démontrons des conséquences du Corollaire 1.5. Le premier énoncé supprime l'hypothèse d'indépendance linéaire des $\log\alpha_i$. Le second enlève la condition $G_0 \geq 4nZ_0$. Le troisième raffine un résultat de [LMPW]. Enfin nous donnons un exemple de minoration de $|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}-1|$.

COROLLAIRE 10.1. *Dans le Corollaire 1.5, on peut supprimer l'hypothèse d'indépendance linéaire des* $\log\alpha_j$, *à condition de remplacer la définition de* G_0 *par*

$$G_0 = \max\{4nZ_0\ ;\ \log M\ ;\ \log D\}.$$

Ce corollaire repose sur le fait que des logarithmes $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants de nombres algébriques satisfont une relation de dépendance avec des coefficients que l'on sait majorer (*cf.* par exemple le Lemme 4.1 de [W1]).

Pour les trois derniers corollaires, on désigne par $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des nombres algébriques non nuls ; on pose

$$D = [\mathbb{Q}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n):\mathbb{Q}] \text{ et } g = [\mathbb{R}(\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n):\mathbb{R}]\ ;$$

on considère des nombres réels positifs $A_1,\ldots,A_n$, A et A^* qui vérifient

$$\log A_i \geq h(\alpha_i),\quad (1\leq i\leq n),\quad A=\max\{A_1,\ldots,A_n\},\quad A^*=\max\{A_1,\ldots,A_{n-1}\}.$$

De plus soient $b_1,\ldots,b_n$ des nombres entiers rationnels avec $b_n>0$.

Pour les Corollaires 10.2 et 10.3, on pose

$$B' = \max\{2, |b_1|,\ldots,|b_{n-1}|\}\ ;$$

on choisit des déterminations $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n$ des logarithmes des nombres $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ et on choisit un nombre f avec

$$\log A_i \geq \frac{ef}{D}|\log\alpha_i|,\quad (1\leq i\leq n)\ ;$$

on suppose que le nombre

$$\Lambda = b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n$$

n'est pas nul, et on désigne par E, Z_0 et $\tilde{Z}_0$ des nombres réels positifs satisfaisant

$$e\leq E\leq \min\left\{A_1^D,\ldots,A_n^D,\frac{nD}{f}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{|\log\alpha_i|}{\log A_i}\right)^{-1}\right\},$$

$$Z_0\geq\max\left\{7+3\log n\ ;\ \frac{g}{D}\log E\ ;\ \log\left(\frac{D}{\log E}\right)\right\},$$

et

$$\tilde{Z}_0=\max\{4nZ_0\ ;\ 1+\log D\ ;\ \log E\}.$$

Enfin $C(n)$ désigne la constante du Corollaire 1.5 :

$$C(n)=\Gamma g^{-n-2}2^{2n}n^{3n+5}\left(1+\frac{g}{f}\right)^n,$$

où Γ a été estimée au paragraphe 9.

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 10.2. *Posons*

$$X = C(n)D^{n+2}Z_0\tilde{Z}_0 \log A_1 \cdots \log A_n (\log E)^{-n-1}.$$

Alors on a

$$|\Lambda| \geq \left(b_n + \frac{B'}{\log A_n} + 2\right)^{-X}.$$

COROLLAIRE 10.3. *On définit*

$$Y = 13n^2C(n)\left(1 + \frac{g}{f}\right)D^{n+2}Z_0\tilde{Z}_0$$
$$\left(1 + \log D + \log\left(\frac{D\log A^*}{\log E}\right)\right) \log A_1 \cdots \log A_n (\log E)^{-n-1}.$$

Soit δ un nombre réel avec $0 < \delta \leq 1/2$. Alors

$$|\Lambda| \geq e^{-\delta B'}(\delta/b_n)^Y.$$

Par conséquent, si ϵ est un nombre réel, $0 < \epsilon < 1$, tel que

$$0 < |\Lambda| < e^{-\epsilon B'},$$

alors

$$B' \leq \frac{2Y}{\epsilon} \log\left(\frac{2b_n}{\epsilon}\right).$$

Le Corollaire 10.3 raffine le Théorème 2 de [LMPW] ; en particulier, dans Y, la dépendance en A^* fait ici intervenir au plus $\log A^* \log\log A^*$ au lieu de $\log A^*(\log\log A^*)^2$.

Le Corollaire 10.1 fournit aussi des minorations de la différence $|\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1|$; nous donnerons ici seulement un exemple :

COROLLAIRE 10.4. *On suppose*

$$\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} \neq 1.$$

On pose

$$B = \max\{2, |b_1|, \ldots, |b_n|\}.$$

Alors

$$|\alpha_1^{b_1} \cdots \alpha_n^{b_n} - 1| \geq \exp\{-C'(n)D^{n+2}(1 + \log D)(\log B + \log D) \log A_1 \cdots \log A_n\},$$

avec

$$C'(n) = \begin{cases} 2^{4n+18}n^{3n+6} & si\ g = 1, \\ 2^{6n+32}n^{3n+6} & si\ g = 2. \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 10.1. Par récurrence sur n on peut supposer que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_n$ est de dimension $n-1$. Il existe alors une unique relation linéaire

$$t_1\log\alpha_1+\cdots+t_n\log\alpha_n=0$$

avec des entiers rationnels $t_1,\ldots,t_n$ premiers entre eux dans leur ensemble. Le Lemme 4.1 de [W1] donne la majoration

$$\max\{|t_1|,\ldots,|t_n|\}\le T$$

avec

$$T\le(9nD^3\max_j\log A_j)^{n-1},$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des indices j, $1\le j\le n$, pour lesquels $t_j\ne 0$. Nous distinguons alors deux cas :

PREMIER CAS. $t_n\ne 0$ et $T\le\left(9nD^3\log A_n\right)^{n-1}$. On élimine b_n en écrivant

$$t_n\Lambda=\tilde b_1\log\alpha_1+\cdots+\tilde b_{n-1}\log\alpha_{n-1}$$

avec $\tilde b_j=t_nb_j-b_nt_j$, $(1\le j\le n-1)$. Comme $t_n\ne 0$, les nombres $\log\alpha_1,\ldots,\log\alpha_{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et on peut utiliser l'hypothèse de récurrence :

$$|t_n\Lambda|\ge\exp\{-C(n-1)\tilde U_0\},$$

avec

$$\tilde U_0=\max\{D^2\log A\ ;\ D^{n+1}\tilde G_0Z_0\log A_1\cdots\log A_{n-1}(\log E)^{-n}\},$$
$$\tilde G_0=\max\{4nZ_0\ ;\ \log\tilde M,\log D\}$$

et

$$\tilde M\le 2T(M+D\max_{1\le j\le n-1}|b_j|).$$

Pour $1\le j\le n-1$ on a $|b_j|\le M\log A_n$, ce qui donne

$$\tilde M\le(9nD^3\log A_n)^nM.$$

On majore $\log|t_n|$ par $\log T\le\tilde U_0$, de telle sorte que

$$|\Lambda|\ge\exp\left\{-\left(C(n-1)+1\right)\tilde U_0\right\}.$$

On utilise les inégalités suivantes :

$$D\log A_n\ge\log E,\quad G_0\ge n\log(9n),\quad G_0\ge\log M,$$
$$G_0\ge\log D,\quad DG_0\ge\log E,\quad \log A_n\ge\log\log A_n.$$

On trouve ainsi

$$\log M + n\log(9n) + 3n\log D + n\log\log A_n \le (4n+2)DG_0\log A_n(\log E)^{-1}$$

et par conséquent

$$\tilde{G}_0 \le (4n+2)DG_0\log A_n(\log E)^{-1}.$$

Comme $C(n) > (4n+2)\big(C(n-1)+1\big)$, on a

$$\big(C(n-1)+1\big)\tilde{U}_0 < C(n)U_0.$$

DEUXIÈME CAS. Quitte à changer la numérotation de $\log\alpha_1,\dots,\log\alpha_{n-1}$, on peut supposer que A_1 est le plus grand des A_j, $(1 \le j \le n-1)$, pour lesquels $t_j \neq 0$. On suppose ici soit $t_n = 0$, soit $A_n \le A_1$, de telle sorte que l'on ait

$$T \le (9nD^3\log A_1)^{n-1}.$$

On élimine b_1 en posant $\tilde{b}_j = t_1b_j - b_1t_j$, $(2 \le j \le n)$:

$$t_1\Lambda = \tilde{b}_2\log\alpha_2 + \cdots + \tilde{b}_n\log\alpha_n.$$

On utilise l'hypothèse de récurrence :

$$|t_1\Lambda| \ge \exp\{-C(n-1)\tilde{U}_0\},$$

avec

$$\tilde{U}_0 = \max\{D^2\log A\ ;\ D^{n+1}\tilde{G}_0Z_0\log A_2\cdots\log A_n(\log E)^{-n}\},$$
$$\tilde{G}_0 = \max\{4nZ_0\ ;\ \log\tilde{M}\ ;\ \log D\}.$$

On majore $\tilde{M}$ de la manière suivante :

a) Si $t_n = 0$, alors $\tilde{b}_n = t_1b_n$ et

$$\tilde{M} \le \max_{2\le j\le n-1}\left\{\frac{|\tilde{b}_n|}{\log A_j} + \frac{|\tilde{b}_j|}{\log A_n}\right\} \le T\max_{2\le j\le n-1}\left\{\frac{b_n}{\log A_j} + \frac{|b_j|}{\log A_n} + \frac{|b_1|}{\log A_n}\right\} \le 2TM.$$

b) Si $t_n \neq 0$ et $\tilde{b}_n \neq 0$ alors

$$\tilde{M} \le T\left(\frac{b_n}{\log A_j} + \frac{|b_1|}{\log A_j} + \frac{|b_j|}{\log A_n} + \frac{|b_1|}{\log A_n}\right).$$

Comme $t_n \neq 0$ on a $A_n \le A_1$ et $|b_1| \le M\log A_n \le M\log A_1$; d'autre part la minoration $\log A_j \ge 1/D$, donne $|b_1|/\log A_j \le DM\log A_1$ et

$$\tilde{M} \le TM(2 + D\log A_1).$$

c) Enfin si $t_n \neq 0$ et $\tilde{b}_n = 0$ on choisit un indice m, $2 \le m \le n-1$, pour lequel $\tilde{b}_m \neq 0$:

$$\tilde{M} \le \max_{\substack{2\le j\le n-1\\ j\neq m}}\left\{\frac{|\tilde{b}_m|}{\log A_j} + \frac{|\tilde{b}_j|}{\log A_m}\right\} \le 4DT\max\{|b_1|,\dots,|b_{n-1}|\}\ ;$$

mais, pour $1 \leq j \leq n-1$, on a $|b_j| \leq M \log A_n \leq M \log A_1$.

Ainsi on a toujours

$$\tilde{M} \leq (9nD^3 \log A_1)^n M.$$

Les mêmes estimations que dans le premier cas permettent de vérifier

$$\log \tilde{M} \leq (4n+2)DG_0 \log A_1 (\log E)^{-1}$$

et de conclure. ∎

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 10.2. On considère deux cas :

a) Si

$$(1+\log D)\log\Big(b_n + \frac{B'}{\log A_n} + 2\Big) \geq 4nZ_0,$$

il suffit d'utiliser le Corollaire 10.1 avec

$$G_0 = \max\{1+\log D\,;\,\log E\}\log\Big(b_n + \frac{B'}{\log A_n} + 2\Big).$$

En effet on a alors $G_0 \geq \log M$ car $b_n/\log A_j \leq Db_n$ pour $1 \leq j \leq n$. On utilise enfin les majorations $1+\log D \leq \tilde{Z}_0$ et $\log E \leq \tilde{Z}_0$; cette dernière sert à vérifier

$$D^{n+2} Z_0 \tilde{Z}_0 \log A_1 \cdots \log A_n (\log E)^{-n-1} \geq D^3 Z_0 \log A (\log E)^{-1} \geq D^2 \log A.$$

b) Dans le cas contraire, on prend $G_0 = \max\{4nZ_0, \log D\}$. On a alors $\tilde{Z}_0 \geq G_0 \geq \log M$, et le Corollaire 10.1 fournit de nouveau le résultat annoncé.

REMARQUE. On peut obtenir une valeur de X légèrement plus petite en utilisant l'inégalité de Liouville (*cf.* (9.4)) quand $b_n + (B'/\log A_n) + 2$ est petit ; un exemple se trouve dans la démonstration du Corollaire 10.4 ci-dessous.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 10.3. On commence par montrer que le paramètre Y vérifie

$$Y \geq 2X \log\Big(\frac{X}{\log A_n}\Big), \tag{10.5}$$

où X a été défini dans le Corollaire 10.2. En effet, on a d'abord

$$\log\Big(\frac{X}{\log A_n}\Big) \leq \log C(n) + \log\Big(\frac{D^3 Z_0 \tilde{Z}_0}{(\log E)^2}\Big) + (n-1)\log\Big(\frac{D\log A^*}{\log E}\Big).$$

On vérifie ensuite les inégalités

$$4n(7+3\log n)^2 < e^{2n^2} \text{ et } (\Gamma+1)2^{2n}n^{3n+5} < e^{9n^2/2},$$

puis

$$\log C(n) < \frac{9}{2}n^2\Big(1+\frac{g}{f}\Big) \text{ et } \log\Big(\frac{D^3 Z_0 \tilde{Z}_0}{(\log E)^2}\Big) < 2n^2(1+3\log D),$$

donc

$$\log\left(\frac{X}{\log A_n}\right) \leq \frac{13}{2}n^2\left(1+\frac{g}{f}\right)\left(1+\log D+\log\left(\frac{D\log A^*}{\log E}\right)\right).$$

On obtient ainsi (2.5). Nous allons en déduire l'inégalité

$$Y\log 2 \geq X\log\left(\frac{5Y}{\log A_n}\right).$$

Il suffit pour cela de noter que $X/\log A_n$ est toujours supérieur à $3\cdot 10^5$, donc $\log(X/\log A_n) > 12.5$, et

$$\left(\frac{X}{\log A_n}\right)^{2\log 2-1} > 10\log\left(\frac{X}{\log A_n}\right).$$

Pour conclure la démonstration du Corollaire 10.3 il ne reste plus qu'à établir le lemme suivant (avec $\ell = \log A_n$, $B = B'$, $b = b_n$) :

LEMME 10.6. *Soient X, Y, ℓ, B des nombres réels positifs avec $Y \geq X \geq \ell$ et*

$$Y\log 2 \geq X\log\left(\frac{5Y}{\ell}\right).$$

Soit b un entier > 0. On pose

$$M = b + \frac{B}{\ell} + 2.$$

Alors pour tout nombre réel δ vérifiant $0 < \delta \leq 1/2$, on a

$$X\log M \leq \delta B + Y\log\left(\frac{b}{\delta}\right).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 10.6. Etant donné que la fonction réelle de variable réelle positive $x \longmapsto xB - Y\log x$ atteint son minimum au point $x = Y/B$, nous sommes amenés à distinguer deux cas :

1. Pour $B \leq 2Y$ on doit vérifier

$$X\log M \leq \frac{1}{2}B + Y\log(2b).$$

Or on a d'une part $b+2 \leq 3b \leq 3bY/\ell$, car $Y \geq \ell$, et d'autre part $B/\ell \leq 2Y/\ell \leq 2bY/\ell$, donc $M \leq 5bY/\ell$. On ajoute les inégalités $Y\log 2 \geq X\log(5Y/\ell)$ et $Y\log b \geq X\log b$ pour obtenir

$$Y\log(2b) \geq X\log\left(\frac{5bY}{\ell}\right) \geq X\log M.$$

2. Si $B \geq 2Y$ on doit vérifier

$$X\log M \leq Y + Y\log\left(\frac{bB}{Y}\right).$$

On a cette fois-ci

$$Y\log\Big(\frac{bB}{2Y}\Big) \geq X\log\Big(\frac{bB}{2Y}\Big)$$

car $bB \geq B \geq 2Y$; on ajoute cette inégalité à $Y\log 2 \geq X\log(5Y/\ell)$ et on trouve

$$Y\log\Big(\frac{bB}{Y}\Big) \geq X\log\Big(\frac{5bB}{2\ell}\Big).$$

D'autre part, comme $B \geq 2Y \geq 2\ell$ et que $b \geq 1$, on a $b+2 \leq 3b \leq 3bB/2\ell$ et $B/\ell \leq bB/\ell$, d'où $M \leq 5bB/2\ell$. Finalement

$$Y\log\Big(\frac{bB}{Y}\Big) \geq X\log M. \qquad \blacksquare$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 10.4. Il n'y a pas de restriction à supposer qu'aucun des b_i ne s'annule. On numérote les A_i de telle sorte que $A_n = A$ soit le plus grand. Commençons par le cas plus facile $g = 1$; on peut alors supposer que les nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont tous positifs. On prend les logarithmes (usuels) ; on a

$$|\log\alpha_i| \leq h(\alpha_i) \leq D\log A_i, \quad (1 \leq i \leq n),$$

ce qui permet d'utiliser le Corollaire 10.1 avec $f = 1/e$, $g = 1$, $E = e$ et

$$Z_0 = (7 + 3\log n)(1 + \log D), \quad G_0 = \max\{4nZ_0\,;\,\log(2DB)\}\;;$$

on obtient

$$|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n} - 1| \geq \frac{1}{2}|b_1\log\alpha_1 + \cdots + b_n\log\alpha_n| \geq \exp\{-\tilde{C}(n)U_0\}$$

avec

$$U_0 = D^{n+2}Z_0G_0\log A_1\cdots\log A_n$$

et

$$\tilde{C}(n) = (\Gamma+1)\cdot 2^{2n}n^{3n+5}(1+e)^n.$$

a) Si $\log(2DB) \geq 4nZ_0$, on obtient le résultat annoncé car $\log(2DB) \leq 2\log(DB)$ et $C'(n) > 2(7+3\log n)\tilde{C}(n)$.

b) Si $2e^{5n}D^3 \leq 2DB \leq e^{4nZ_0}$, on majore G_0 par

$$G_0 = 4nZ_0 \leq 4n(7+3\log n)(1+\log D) \leq \frac{4}{3}n(7+3\log n)\log(DB)\;;$$

l'inégalité $\frac{4}{3}(\Gamma+1)(7+3\log n)^2(1+e)^n < 2^{2n+18}$ montre que la constante $C'(n)$ satisfait

$$C'(n) > \frac{4n}{3}(7+3\log n)^2\tilde{C}(n).$$

c) Enfin si $B < e^{5n}D^2$, on a

$$\frac{DB}{\log(DB)} \leq \frac{e^{5n}}{5n}D^3 \leq \frac{C'(n)}{5n}D^3.$$

On utilise l'inégalité de Liouville sous la forme

$$|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}-1|\geq 2^{1-D}e^{-nDB\log A}\ ;$$

il ne reste plus qu'à vérifier

$$D\log 2+nDB\log A<C'(n)D^{n+2}(1+\log D)(\log D+\log B)\log A_1\cdots\log A_n$$

pour $B<e^{5n}D^2$; or le membre de droite est supérieur à $C'(n)D^3(\log D+\log B)\log A$, et l'inégalité désirée résulte de la majoration ci-dessus de $DB/\log(DB)$.

Venons-en au cas $g=2$. Désignons par $\log\alpha_\iota$ la détermination principale (de partie imaginaire $\in[-\pi,\pi[$) du logarithme de α_j $(1\leq j\leq n)$. On a

$$|\log\alpha_j|^2\leq\pi^2+(\log|\alpha_j|)^2\leq(\pi^2+1)(D\log A_j)^2,$$

ce qui amène à choisir $f=1/e\sqrt{\pi^2+1}$ pour que

$$|\log\alpha_j|\leq\frac{1}{ef}D\log A_j.$$

On peut supposer que la distance du nombre $\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}$ à 1 est inférieure à 10^{-3} ; il existe alors un entier pair $b_0\in 2\mathbb{Z}$ tel que le nombre

$$\Lambda=i\pi b_0+b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n$$

satisfasse

$$|\Lambda|\leq 2|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}-1|.$$

On a de plus

$$|b_0|\leq\frac{D}{\pi ef}\sum_{j=1}^{n}|b_j|\log A_j+\frac{|\Lambda|}{\pi}\leq\frac{21}{20}nDB\log A_n$$

car $A_j\leq A_n$, $1/\pi ef<1.0495$ et $|\Lambda|<\pi\cdot 10^{-3}$. On va encore utiliser le Corollaire 10.1, mais avec n remplacé par $n+1$, et

$$\log A_0=1/D,\quad \alpha_0=-1,\quad \log\alpha_0=i\pi,\quad E=e,$$
$$Z_0=\big(7+3\log(n+1)\big)(1+\log D),\quad G_0=\max\{4(n+1)Z_0\ ;\log M\}.$$

Montrons que le paramètre M, défini par

$$M=\max_{0\leq\iota\leq n-1}\left\{\frac{|b_\iota|}{\log A_n}+\frac{b_n}{\log A_\iota}\right\},$$

est majoré par $\frac{31}{20}nDB$. En effet, on a

$$|b_\iota|/\log A_n\leq DB,\quad b_n/\log A_\iota\leq DB,\quad (1\leq i\leq n-1),$$

et

$$\frac{|b_0|}{\log A_n}+\frac{b_n}{\log A_0}\leq\Big(\frac{21n}{20}+1\Big)DB.$$

On déduit donc du Corollaire 10.1 la minoration

$$|\alpha_1^{b_1}\cdots\alpha_n^{b_n}-1| \geq \frac{1}{2}|b_1\log\alpha_1+\cdots+b_n\log\alpha_n| \geq \exp\{-\tilde{C}(n)U_0\}$$

avec

$$U_0 = D^{n+3}Z_0G_0\log A_0\cdots\log A_n$$

et

$$\tilde{C}(n) = (\Gamma+1)\cdot 2^{-n-3}\cdot 2^{2n+2}(n+1)^{3n+8}\Big(1+2e\sqrt{\pi^2+1}\Big)^{n+1}.$$

On reprend les arguments du cas $g=1$:

a) Si $\log\big(\frac{31}{20}nDB\big) \geq 4(n+1)Z_0$, il suffit d'utiliser les inégalités

$$\log\Big(\frac{31}{20}nDB\Big) \leq 2\log(DB)$$

et

$$C'(n) > 2\big(7+3\log(n+1)\big)\tilde{C}(n).$$

b) Si $B \geq e^{5n}D^2$ et $\frac{31}{20}nDB \leq e^{4(n+1)Z_0}$, on a

$$G_0 = 4(n+1)Z_0 \leq 4(n+1)\big(7+3\log(n+1)\big)(1+\log D) \leq \frac{4}{3}(n+1)\big(7+3\log(n+1)\big)\log(DB)\ ;$$

l'inégalité

$$\frac{4}{3}(\Gamma+1)\big(7+3\log(n+1)\big)^2(n+1)^{3n+9}\Big(1+2e\sqrt{\pi^2+1}\Big)^{n+1} \leq 2^{5n+33}n^{3n+6}$$

montre que notre constante $C'(n)$ satisfait

$$C'(n) > \frac{4}{3}(n+1)\big(7+3\log(n+1)\big)^2\tilde{C}(n).$$

c) Enfin si $B < e^{5n}D^2$, on utilise comme ci-dessus l'inégalité de Liouville avec la majoration

$$D\log 2 + nDB\log A < C'(n)D^{n+2}(1+\log D)(\log D+\log B)\log A_1\cdots\log A_n. \qquad \blacksquare$$

REMARQUES FINALES. 1. Insistons sur le fait que, pour une application numérique concrète, si on veut une estimation numériquement précise, il est certainement avantageux d'utiliser le Théorème 2.18 plutôt que l'un des corollaires, pour lesquels nous n'avons pas cherché à obtenir des estimations très fines.

2. On peut espérer améliorer le lemme de zéros (Corollaire 5.4) (*cf.* le calcul d'une valeur optimiste des constantes au paragraphe 7 c de [W4]) ; si on pouvait y remplacer la condition $L_\iota' = L_\iota/(d+1)$ par $L_\iota' = L_\iota$, on pourrait prendre $a = 1$ dans (2.17) ; cela permettrait de gagner un facteur $(2n)^n$ et de remplacer $2^{2n}n^{3n+5}$ par 2^nn^{2n+5} dans la conclusion du Corollaire 1.5.

RÉFÉRENCES

[B] A Baker, *The theory of linear forms in logarithms*, Chap 1 de Transcendence Theory, Advances and Applications, (ed A Baker and D W Masser), Academic Press (1977), 1–27

[BGMMS] J Blass, A M Glass, D K Manski, D B Meronk and R P Steiner, *Constants for lower bounds for linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Acta Arith **55**(1990), 1–22, Problemes Diophantiens 1987–1988, Publ Univ P et M Curie, Paris VI, (2) **88**, 31p

[G] A O Gel'fond, *Transcendental and algebraic numbers*, Moscou, 1952, Dover, New York, 1960

[LMPW] J H Loxton, M Mignotte, A J van der Poorten and M Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, C R Acad Sci Canada **11**(1987), 119–124

[Ma] D W Masser, *On polynomials and exponential polynomials in several variables*, Invent Math **63**(1981), 81–95

[MW1] M Mignotte and M Waldschmidt, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method*, Math Ann **231**(1978), 241–267

[MW2] ———, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method, II*, Acta Arith **53**(1989), 251–287

[MW3] ———, *Linear forms in two logarithms and Schneider's method, III*, Ann Fac Sci Toulouse **97**(1989), 43–75

[P] P Philippon, *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull Soc Math France **114**(1986), 355–383, et **115**(1987), 397–398

[PW1] P Philippon et M Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algebriques commutatifs*, Illinois J Math **32**(1988), 281–314

[PW2] ———, *Lower bounds for linear forms in logarithms* In Chap 18 de New Advances in Transcendence Theory, (ed A Baker), Cambridge Univ Press (1988), 280–312

[DPP] Dong Ping Ping, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algebriques p adiques*, manuscrit, 1991

[S] Th Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I Transzendenz von Potenzen*, J reine angew Math **172**(1934), 65–69

[W1] M Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith **37**(1980), 257–283

[W2] ———, *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables*, Invent Math **63**(1981), 97–127

[W3] ———, *Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques*, J Analyse Math **56**(1991), 231–279

[W4] ———, *Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons lineaires de logarithmes de nombres algébriques*, Sém Th Nombres Bordeaux **3**(1991), 129–185

[W5] ———, *Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons lineaires de logarithmes de nombres algébriques (II)*, Problèmes Diophantiens 1989-1990, Publ Univ P et M Curie, Paris VI, (2) **93**(1991), 36p

[Wü] G Wustholz, *A new approach to Baker's theorem on linear forms in logarithms (III)*, In Chap 25 de New Advances in Transcendence Theory, (ed A Baker), Cambridge Univ Press, (1988), 399–410

[Y] Yu Kunrui, *Linear forms in p-adic logarithms*, Acta Arith **53**(1989), 107–186

Université P et M Curie (Paris VI)
C N R S "Problèmes Diophantiens"
Institut Henri Poincaré
11, rue P et M Curie
75231 Paris Cedex 05

https://doi.org/10.4153/CJM-1993-010-1 Published online by Cambridge University Press