

UNE CARACTERISATION VECTORIELLE-METRIQUE DES ESPACES L^1

A. GROTHENDIECK

Soit C un espace de Banach (nous ne parlerons que d'espaces sur le corps des nombres réels, pour simplifier). On dit que C possède la *propriété de Nachbin* ou est un espace (N) , si pour toute application linéaire continue u dans C d'un sous-espace vectoriel F d'un espace de Banach E , il existe une application linéaire de même norme de E dans C qui prolonge u . Une étude complète de ces espaces a été faite par Nachbin (9), qui prouve: pour tout espace compact stonien¹ K , l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur K , muni de sa norme uniforme, est un espace (N) ; et réciproquement si C est un espace (N) et si sa boule unité admet un point extrémal, alors il est isomorphe (avec sa norme) à un espace $C(K)$ construit sur un espace compact stonien K convenable. C'est surtout la réciproque qui est profonde. Quant à la partie directe, c'est une conséquence facile du résultat suivant plus fort (dont je m'excuse de ne pas me rappeler une référence précise): Si K est un espace compact stonien, et si $C(K)$ est une sous-algèbre d'une algèbre $C(L)$ (L compact quelconque), il existe une projection de norme 1 de $C(L)$ sur $C(K)$ qui est une *représentation d'algèbre*²; résultat parfois commode, et qui réduit dans une certaine mesure les propriétés algébriques-topologiques de $C(K)$ à celles d'une algèbre $l^\infty(I)$ formée de toutes les fonctions bornées sur un ensemble d'indices I (car prenant $I = K$, $C(K)$ se trouve plongé dans $l^\infty(I)$ isomorphe à $C(\hat{I})$ (\hat{I} compactifié de Stone de I), et on peut appliquer le résultat précédent). Enfin, dans le cas particulier d'un espace L^∞ construit sur une mesure arbitraire qui est isomorphe

Reçu le 27 septembre, 1954. Cet article est destiné surtout à donner une preuve correcte d'un des résultats annoncés dans une ancienne note (3, théorème 5). (Je m'étais aperçu peu après la publication de cette note que la preuve de ce résultat était incomplète.) En plus (en attendant la publication prochaine de (4)), le lecteur pourra consulter (6) pour ce qui concerne les produits tensoriels topologiques.

¹Rappelons qu'on appelle espace *stonien* un espace compact K tel que l'espace des fonctions réelles continues sur K soit complètement réticulé pour sa relation d'ordre naturelle.

²On peut donner de cet énoncé diverses variantes, telle que: soit u une représentation d'une algèbre $C(L)$ dans $C(K)$, supposons $C(L)$ plongée dans une algèbre $C(L')$, alors u se prolonge en un *homomorphisme d'algèbre* de $C(L')$ dans $C(K)$ (L, L', K sont des compacts, K stonien.) C'est vrai en effet si $C(K)$ est du type $l^\infty(I)$, algèbre des fonctions bornées sur un ensemble d'indices I , i.e. si K est le compactifié de Stone d'un ensemble discret I ; car alors on est ramené à prolonger un caractère défini sur $C(L)$, ce qui est classique. Et d'autre part, on se ramène au cas particulier précédent, grâce à la remarque du texte que $C(K)$ est plongé dans $l^\infty(I)$, quand I désigne K muni de la topologie discrète, et qu'il existe alors une projection de $l^\infty(I)$ sur $C(K)$ qui est une *représentation*. Le théorème de prolongement de Nachbin peut se démontrer de la même façon en se ramenant au cas d'un espace $l^\infty(I)$, et de là au problème de prolongement d'une *forme* linéaire continue, lequel est résolu par le théorème de Hahn-Banach.

à un espace $C(K)$, avec K compact stonien, en vertu d'un classique théorème de Gelfand-Stone, une démonstration très naturelle de la partie directe du théorème de Nachbin se présente dans la théorie des produits tensoriels topologiques, où on obtient très simplement toutes les propriétés vectorielles-métriques essentielles des espaces $C(K)$ (K compact quelconque) et L^1 , propriétés qui ne sont que des variantes diverses d'une seule quelconque entre elles, *p. ex.* celle de Nachbin (4, §2, N° 2).

Nous étudions ici une propriété duale de la propriété (N), qui nous conduira vers les espaces L^1 (au lieu des espaces L^∞). Soit u une application d'un espace de Banach L dans le quotient E/F d'un espace de Banach E par un sous-espace vectoriel fermé F , on dit qu'une application v de L dans E relève u , si u est le composé de v et de l'application canonique de E sur E/F . Considérons E/F comme un sous-espace de son bidual $(E/F)''$, lequel s'identifie, comme on sait, au quotient E''/F'' du bidual de E par le bidual de F (lui-même identifié à un sous-espace de E'' , par la bitransposée de l'application identique de F dans E). Alors une application u de L dans E/F est aussi une application de L dans le quotient E''/F'' , et la définition précédente donne un sens à l'assertion: l'application v de L dans E'' relève l'application u de L dans E/F . Ceci posé, on a l'immédiate

PROPOSITION 1. *Soit L un espace de Banach. Les conditions suivantes sur L sont équivalentes:*

(1) *Quel que soit l'espace de Banach E et le sous-espace vectoriel fermé F de E , l'application canonique*

$$L \hat{\otimes} F \rightarrow L \hat{\otimes} E$$

(4, §1, No 1 et No 3) *est un isomorphisme métrique du premier espace dans le second.*

(2) *Le dual L' possède la propriété de Nachbin.*

(3) *Quel que soit l'espace de Banach E et le sous-espace faiblement fermé F° de son dual E' (F° polaire d'un sous-espace F de E), toute application linéaire continue u de L dans E'/F° se relève en une application linéaire de même norme de L dans E' .*

(4) *Quel que soit l'espace de Banach E et le sous-espace vectoriel fermé F de E , toute application linéaire continue u de L dans E/F se relève en une application linéaire de même norme de L dans E'' .*

Démonstration. (1) signifie aussi que toute forme linéaire continue sur $L \hat{\otimes} F$ provient d'une forme de norme égale sur $L \hat{\otimes} E$, ou encore (en interprétant ces formes linéaires comme des formes bilinéaires) que toute forme bilinéaire sur $L \times F$ se prolonge en une forme bilinéaire de même norme sur $L \times E$. Interprétant les formes bilinéaires sur $L \times F$ comme des applications linéaires de F dans L' , resp. de L dans $F' = E'/F^\circ$, on trouve que (1) équivaut à (2) resp. à (3). (3) implique (4) puisque pour donner un sens à (4), il faut

par définition regarder u comme une application linéaire de L dans E''/F'' , or F'' est un sous-espace vectoriel faiblement fermé du dual E'' de E' (savoir le polaire dans E'' de $F^0 \subset E'$), et en vertu de (3) il existe bien une application linéaire de L dans E'' , de même norme que u , relevant u . Enfin prouvons que (4) implique (3). Avec les notations de (3), il existera en effet, en vertu de la condition (4), une application linéaire v de norme $\|u\|$ de L dans le bidual E''' de E' qui relève u , i.e. telle que pour $x \in L$, la forme vx sur E'' ait pour restriction à F'' l'élément ux de E'/F^0 (identifié au dual de F). Désignant par wx la restriction de vx à E , w est une application linéaire de L dans E' qui est le relèvement cherché.

Remarque 1. Il est facile de s'assurer que dans l'énoncé des conditions précédentes, il suffit de supposer que les espaces E, F sont de dimension finie (dans ce cas, les conditions (3) et (4) deviennent d'ailleurs identiques). Il existe encore un assez grand nombre de variantes de ces conditions, que le lecteur pourra énoncer et établir à titre d'exercice, en s'inspirant de (4, §2, No 2).

THÉORÈME 1. *Soit L un espace de Banach. Pour que L satisfasse aux conditions équivalentes de la proposition 1, il faut et il suffit que L soit isomorphe (avec sa norme) à un espace $L^1(\mu)$ construit sur une mesure μ convenable (sur un espace localement compact convenable).*

La condition est suffisante, car un espace L^1 satisfait à la condition 1 de proposition 1, en vertu de l'identification

$$L^1 \hat{\otimes} E = L^1_E$$

(espace de fonctions vectorielles μ -intégrables, à valeurs dans E) pour tout espace de Banach E (4, §2, No 1, Théorème 3), et du fait que l'inclusion

$$L^1_F \subset L^1_E$$

respecte la norme. Montrons la réciproque. Supposons donc prop. 1 vérifiée, L' est alors un espace (N), de plus, étant un dual, sa boule unité admet un point extrémal en vertu du théorème de Krein-Milman. Le théorème de Nachbin nous apprend que L' est isomorphe avec sa norme à un espace $C(K)$ (K compact convenable, d'ailleurs stonien, mais peu nous importera). Par cet isomorphisme, L devient un sous-espace vectoriel fermé du dual de $C(K)$, espace des mesures sur K . On va alors prouver le théorème suivant, qui a son intérêt propre:

THÉORÈME 2. *Soit K un espace localement compact, $C = C_0(K)$ l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur K , muni de la norme uniforme. Supposons que C soit isomorphe (avec sa norme) au dual d'un espace de Banach L ; on peut donc supposer $L \subset C'$, l'isomorphisme de C avec L' étant donné par l'accouplement entre C et le sous-espace L de son dual. Sous ces conditions, K est un espace*

compact stonien, C est isomorphe à une algèbre de von Neumann³, et L est exactement l'ensemble des mesures normales sur K , i.e. des combinaisons linéaires de mesures positives μ qui ont la propriété suivante: Pour toute partie filtrante croissante A de C , de borne supérieure f dans C , on a $\mu(f) = \lim \mu(f_i)$ (la limite étant prise suivant le filtre des sections croissantes dans A).

Il en résulte bien que L est isomorphe à un espace $L^1(\mu)$ construit sur une mesure μ convenable, comme il résulte par exemple d'un théorème classique de Kakutani (7).

Soit C^+ le cône positif de C , je dis qu'il est faiblement fermé (par topologie faible, nous entendons $\sigma(C, L)$). En vertu d'un théorème classique de Banach-Dieudonné (1, No. 10, th. 5; nous utilisons le corollaire bien connu qu'une partie convexe du dual E' d'un espace $\{F\}$ est faiblement fermée si et seulement si son intersection avec toute partie faiblement compacte l'est), il suffit de prouver qu'il en est ainsi de son intersection avec la boule unité de C , or cette dernière est l'ensemble des f telles que $\|f - g\| \leq 1$ pour toute g égale à 0 ou 1 d'où notre affirmation (puisque la boule unité de C est évidemment faiblement fermée, et même faiblement compacte). Il en résulte que pour toute $f \in C$, l'ensemble des éléments de C qui sont majorés (resp. minorés) par f est faiblement fermé. Soit, pour $0 \leq f \leq 1$, A_f l'ensemble des $g \in C$ telles que $f \leq g \leq 1$, A_f est aussi identique à l'intersection de la boule unité de C et de l'ensemble des éléments de C minorés par f , donc est faiblement fermé, donc faiblement compact puisque borné. Comme l'intersection d'un nombre fini des A_f est non vide, les A_f ont une intersection non vide. Donc la fonction 1 appartient à C , i.e., K est compact. Soit A un ensemble filtrant majoré dans C , soit A' l'ensemble des majorants de A , et pour $f \in A$, $f' \in A'$ soit $A_{f,f'}$ l'ensemble des $g \in C$ comprises entre f et f' . Les $A_{f,f'}$ constituent une base de filtre formés d'ensembles faiblement compacts, donc ont une intersection I non vide. Un élément ϕ de I majore A , donc appartient à A' , et minore A' , donc est un plus petit élément de A' , donc c'est une borne supérieure de A dans C . Cela montre que K est stonien. D'autre part, I étant réduit à un point, on voit que la base de filtre formé des ensembles faiblement compacts $A_{f,f'}$ converge faiblement vers ϕ , à fortiori le filtre des sections croissantes de A (qui est plus fin) converge faiblement vers ϕ . Cela prouve en particulier que tout élément positif de L est une forme normale. Prouvons maintenant que pour tout $f \in C$, l'opération de multiplication par f dans C est faiblement continue. K étant stonien, les combinaisons linéaires des fonctions caractéristiques d'ensembles à la fois ouverts et fermés (i.e. les idempotants de l'algèbre C) sont denses dans C , ce qui ramène aussitôt au cas où f est une telle fonction caractéristique (car les endomorphismes faiblement continus de C forment un sous-espace fermé de l'espace normé $L(C)$ de tous

³On appelle *algèbre de von Neumann* une algèbre autoadjointe d'opérateurs continus dans un espace de Hilbert, avec unité et faiblement fermée. Les scalaires peuvent être réels ou complexes.

les endomorphismes continus). Alors l'application correspondante de C est un projecteur dont l'image est fC et le noyau $f'C$ (ou $f' = 1 - f$), et il est bien connu⁴ qu'il suffit de prouver que ces espaces sont faiblement fermés. Il suffit de le voir pour le premier (le second est du même type), et en vertu du théorème de Banach-Dieudonné déjà utilisé, il suffit de montrer que son intersection avec la boule unité est faiblement fermée. Or cette intersection est aussi l'ensemble des g telles que $-f \leq g \leq f$, et est par suite faiblement fermé en vertu de ce qui a été dit plus haute. Soit $f \in C$. Dire que $f \rightarrow fg$ est faiblement continue, signifie aussi que pour tout $\mu \in L$, la forme $g \rightarrow \langle fg, \mu \rangle$ sur C est faiblement continue, i.e. appartient à L . Cette forme n'est autre que la mesure $f\mu$ de densité f par rapport à μ . Donc L est stable par multiplication par les $f \in C$. Or, il est bien connu (et facile à vérifier) que pour toute mesure μ sur K , $|\mu|$ est limite au sens de la norme de mesures $f\mu, f \in C$. Comme L est un sous-espace fortement fermé de C' , on en conclut que $\mu \in L$ implique $|\mu| \in L$, donc que L est un sous-lattice de C' . En particulier, L est engendré par ses éléments positifs, donc *les $\mu \in L$ sont des formes normales*. Pour tout élément positif μ de L , considérons l'espace $L^2(\mu)$, soit H leur produit hilbertien (quand μ parcourt L^+); pour $f \in C$, soit U_f l'opérateur dans H qui sur chaque facteur $L^2(\mu)$ se réduit à la multiplication par f . On a ainsi une représentation unitaire de C dans H . Cette représentation est biunivoque, car si U_f est nul, on voit aussitôt que f est orthogonale à toutes les $\mu \in L^+$, donc orthogonale à L , donc nulle (puisque C s'identifie au dual de L). De plus, pour $x \in H, y \in H$, la forme $\langle U_f x, y \rangle$ sur C est dans L . En effet, L étant fortement fermée dans le dual de C , il suffit de le prouver quand x et y parcourent une partie totale de H , en particulier quand x et y appartiennent à un des espaces $L^2(\mu)$. On peut supposer que c'est le même pour x et y (autrement on a une forme nulle sur C). Alors on a

$$\langle U_f x, y \rangle = \int fghd\mu$$

où g et h sont dans $L^2(\mu)$, i.e. en introduisant $\phi = gh \in L^1(\mu)$, on a $\langle U_f x, y \rangle = \langle f, \phi\mu \rangle$. Or les $\phi\mu, \phi \in L^1(\mu)$ sont dans L , car il en est ainsi, on l'a vu, des $\phi\mu$ avec $\phi \in C$, or l'image de C dans $L^1(\mu)$ est dense, et L est fermé dans C' . On a prouvé que la représentation U_f est continue pour la topologie faible de C et la topologie "faible" de l'espace $L(H)$ des endomorphismes de H .

⁴De façon générale, soit E un espace (F) , soient F et G deux sous-espaces vectoriels faiblement fermés de E' , dont la somme est directe et égale à E' . Alors E' , faible est somme directe topologique de ses sous-espaces vectoriels F et G . En effet, F et G sont resp. les polaires des sous-espaces vectoriels F° et G° de E , soit u l'application linéaire de E dans $(E/F^\circ) \times (E/G^\circ)$ dont les deux composantes sont les applications canoniques de E dans les quotients. Le dual du produit est le produit des duals, i.e. $F \times G$, et la transposée de u est l'application naturelle $(y, z) \leq y + z$ de $F \times G$ dans E' . Elle est biunivoque et sur par hypothèse, et on sait qu'il en résulte (toujours une conséquence du théorème de Banach-Dieudonné!) que u est un isomorphisme sur. Cela signifie aussi que F° et G° sont supplémentaires topologiques, d'ou enfin la conclusion voulue: leurs polaires F et G sont supplémentaires topologiques dans E' faible.

Par suite elle transforme la boule unité de C en une partie faiblement compacte de $L(H)$. Il en résulte (2, th. 8⁵) que l'image de C dans $L(H)$ est faiblement fermée, i.e. est une *algèbre de von Neumann*. Ainsi C est isomorphe à une algèbre de von Neumann. On sait que si C est une C^* -algèbre isomorphe à une algèbre de von Neumann, et si on désigne par C_* l'espace des formes normales sur C , alors C s'identifie avec sa norme au dual de C_* . Or on a vu que $L \subset C_*$. Cela implique $L = C_*$, car si on avait $L \neq C_*$. Il existerait une forme linéaire sur C_* non identiquement nulle, mais nulle sur le sous-espace L (Hahn-Banach), i.e. un élément de C non nul, qui s'annule sur L ; absurde puisque on suppose que C s'identifie aussi au dual de L . Le théorème 2 est complètement démontré.

Remarque 2. Si on n'avait eu en vue que le théorème 1, une partie de la démonstration du théorème 2 aurait suffi, puisqu'on savait déjà (par le théorème de Nachbin) qu'on pouvait supposer K compact stonien (ce qui dispense de le démontrer). Il suffisait alors de prouver seulement que les multiplications dans C sont des opérations faiblement continues, d'où résulte que L est stable sous les multiplications par les $f \in C$, donc est un "idéal" au sens latticiel, auquel le théorème de Kakutani s'applique alors (et même un cas particulier assez facile de ce théorème).

Remarque 3. On peut se demander si le théorème 2 se généralise à toute C^* -algèbre (non nécessairement abélienne comme dans notre énoncé): Si une telle algèbre C est isomorphe (avec sa norme) au dual d'un sous-espace L de C' , est-il vrai que C est isomorphe à une algèbre de von Neumann, et que L est exactement l'ensemble des formes normales sur C ? Si on suppose L stable sous l'involution naturelle de C' (elle le sera peut-être automatiquement), alors nos raisonnements précédents prouvent encore que C a une unité, que toute partie filtrante croissante majorée de la partie hermitienne de C a une borne supérieure, et que le filtre des sections croissantes converge vers cette dernière pour la topologie faible définie par L . La seule difficulté est dans la question si L est engendré par sa partie positive, le raisonnement donné dans le cas commutatif ne vaut pas tel quel. Il semble probable cependant que la technique des C^* -algèbres jointe au théorème de Banach-Dieudonné doive permettre de donner une réponse affirmative à notre question.

Remarque 4. Le théorème 2 montre qu'un espace $C_o(K)$ ne peut être essentiellement que "d'une seule manière" le dual d'un espace de Banach L (de façon précise, si on identifie L à un sous-espace de C' , L est uniquement déterminé). Il n'en est pas ainsi dans le cas général. Considérons par exemple l'espace $E = l^1$, je dis qu'il existe une infinité de sous-espaces vectoriels fermés F dans $E' = l^\infty$ tels que E s'identifie (avec sa norme) au dual de F . En effet, il est immédiat qu'il existe une infinité de topologies T sur l'ensemble N des entiers qui fassent de N un espace localement compact N_T . Pour toute telle

⁵Ce théorème est encore une conséquence du théorème de Banach-Dieudonné.

topologie, $C_0(N_T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l^∞ , dont le dual est l'espace des mesures bornées sur l'espace localement compact dénombrable N_T . Or il est bien connu que toute mesure sur un espace N_T est discrète, donc que le dual en question s'identifie aussi à $l^1(N_T) = l^1$.

On peut se demander si dans l'énoncé de la condition 4 de proposition 1, on ne peut pas remplacer E'' par E lui-même. La proposition qui suit donne une réponse complète:

PROPOSITION 2. *Soit L un espace de Banach qui jouit des propriétés de la proposition 1, i.e. (théorème 1) est isomorphe (avec sa norme) à un espace $L^1(\mu)$ construit sur une mesure μ convenable sur un espace localement compact convenable. Pour que toute application linéaire continue u de L dans un quotient E/F d'un espace de Banach quelconque par un sous-espace vectoriel fermé F , se relève en une application linéaire continue v de L dans E , il faut et il suffit que μ soit discrète, ou encore que L soit isomorphe (avec sa norme) à un espace $l^1(I)$ (espace des suites sommables de scalaires sur un ensemble d'indices I convenable). S'il en est ainsi, alors on peut trouver même un relèvement v de norme arbitrairement voisine de celle de u .⁶*

Démonstration. Si μ est discrète, i.e. somme d'une famille localement sommable de masses ponctuelles, il est bien connu (et facile à voir) que $L^1(\mu)$ est isomorphe avec sa norme à un espace $l^1(I)$ (on prend pour I l'ensemble d'indices de la famille précédente). D'autre part, pour un espace de Banach quelconque G , on sait que l'espace $L(l^1(I), G)$ des applications linéaires continues de $l^1(I)$ dans G s'identifie, avec sa norme, à l'espace $l^\infty(I, G)$ des familles bornées $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de G sur l'ensemble d'indices I , muni de la norme uniforme

$$\sup_{i \in I} \|x_i\|;$$

à (x_i) correspondant l'application linéaire

$$(\lambda_i) \rightarrow \sum \lambda_i x_i$$

de $l^1(I)$ dans G . Soit alors u une application linéaire continue de $l^1(I)$ dans E/F , donc définie par une famille d'éléments (x_i) de E/F de norme $\leq \|u\|$, et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $i \in I$, soit y_i un représentant de x_i dans E de norme

$$\|y_i\| \leq (1 + \epsilon)\|x_i\| \leq (1 + \epsilon)\|u\|.$$

Alors (y_i) définit une application linéaire v de norme $\leq (1 + \epsilon)\|u\|$ de $l^1(I)$ dans E , et il est immédiat que v relève l'application donnée u . Cela prouve que quand L est du type $L^1(\mu)$ avec une mesure μ discrète, il possède la propriété envisagée dans la proposition 2. (Ce résultat, ainsi que la démonstration donnée ici, sont dus à G. Köthe). Réciproquement, supposons $L = L^1(\mu)$

⁶Bien entendu, même dans le cas où L est réduit au corps des scalaires, on ne pourra en général trouver un relèvement v de même norme que u , car en général un élément x du quotient E/F n'a pas de représentant dans E de même norme que x .

tel que toute application linéaire continue de L dans un quotient E/F puisse se relever en une application linéaire continue de L dans E . On sait que tout espace de Banach, en particulier L , est isomorphe à un espace quotient E/F d'un espace $E = l^1(I)$ construit sur un ensemble d'indices I convenable (par exemple $I =$ la boule unité de L). Appliquant l'hypothèse sur L , on voit qu'il existe une application linéaire continue v de L dans E , inverse à droite de l'homomorphisme donné de E sur L , donc L est isomorphe (du point de vue vectoriel-topologique) à un facteur direct de E , donc à un sous-espace de $E = l^1(I)$. Or, dans $l^1(I)$ les parties faiblement compactes sont compactes, comme il est bien connu; il en est donc de même dans tout sous-espace vectoriel topologique de $l^1(I)$ et en particulier de $L = L^1(\mu)$. Mais on sait que ceci exige que la mesure μ soit discrète (voir par exemple dernier alinéa de (5)). Ceci achève la démonstration de proposition 2.

Remarque 5. On peut considérer aussi les espaces de Banach L qui satisfont aux variantes vectorielles-topologiques des condition (de nature métrique) de la proposition 1, telle la variante suivante de la condition 4: Toute application linéaire continue de L dans un quotient E/F d'espace de Banach se relève en une application linéaire continue de L dans E' . Utilisant le fait que l'espace de Banach L est isomorphe à un espace quotient d'un espace $l^1(I)$, on trouve facilement, en procédant comme dans la démonstration précédente, que L satisfait à la condition énoncée si et seulement si son bidual est isomorphe à un facteur direct d'un espace $L^1(\mu)$ (de façon précise, il sera isomorphe à un facteur direct du bidual de $l^1(I)$, lequel est lui-même isomorphe à un espace $L^1(\mu)$, comme il résulte par exemple du théorème de Kakutani). J'ignore si un tel espace est même isomorphe, du point de vue vectoriel-topologique, à un espace L^1 , tout comme on ignore si un espace de Banach C qui satisfait à la variante vectorielle-topologique de la propriété de Nachbin (qui est de nature métrique), est déjà isomorphe (du point de vue vectoriel-topologique) à un espace (N) .

Remarque 6. Il n'y a guère de doute que le théorème de Nachbin, ainsi que les théorèmes de ce travail, sont valables tels quels dans le cas de scalaires complexes au lieu de scalaires réels. Il n'est pas certain cependant que cette extension soit immédiate.

Un problème. Soit C un espace de Banach, considérons la condition suivante: 1'. Quel que soit l'espace de Banach E et le sous-espace vectoriel fermé F , l'application canonique

$$C \overset{\vee}{\otimes} E \rightarrow C \overset{\vee}{\otimes} E/F$$

est un homomorphisme métrique du premier sur le second. (Je suis les notations de (4), où j'emploie le signe \vee à la place du signe $\hat{\wedge}$ utilisé dans mon travail (6). On voit sans difficulté qu'une condition équivalente est: 2'. l'espace C' dual de C satisfait aux conditions de proposition 1, i.e. (théorème 1)

est isomorphe à un espace L^1 . Autres conditions équivalentes: Toute application linéaire continue (resp. compacte) d'un sous-espace normé F d'un espace de Banach quelconque E , se prolonge en une application linéaire continue de norme égale de E dans le bidual C'' (resp. se prolonge en une application linéaire compacte de norme arbitrairement voisine de E dans C) (4, §2, N° 2). Nous dirons qu'un espace qui satisfait aux propriétés précédentes est un *espace de classe C*, tandis qu'un espace qui satisfait aux conditions de proposition 1, i.e. isomorphe à un espace L^1 , est appelé un *espace de classe L*. Ainsi E est de classe C (resp. L) si et seulement si son dual est de classe L (resp. C). Par exemple l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur un compact, avec la norme uniforme, plus généralement l'espace $C_0(M)$ des fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact M , sont de classe C (car on voit en vertu du théorème de Kakutani que le dual est de classe L). Plus généralement, les "abstract M -spaces" de Kakutani sont des espaces C , car Kakutani montre que leurs duals sont des espaces L (8, p. 1021, théorème 15). Il existe d'ailleurs des espaces C qui ne rentrent pas dans ce type, p.ex. l'espace des fonctions continues *symétriques* sur la circonférence unité du plan complexe (qui n'est pas un espace (μ) , car les points extrémaux de la boule unité du dual forment un espace compact *connexe*, canoniquement isomorphe au quotient de la circonférence unité par identification des points diamétralement opposés.) Ces exemples suggèrent la validité de l'énoncé suivant: Les espaces de classe C sont exactement ceux qui sont isomorphes (avec leur norme) à un sous-espace E d'un espace $C(K)$ (K espace compact) formé par les fonctions qui satisfont à des conditions de la forme: $f(x_i) = \lambda_i f(y_i)$ (x_i et y_i éléments de K , λ_i scalaires, qu'on peut supposer compris entre -1 et $+1$). (Bien entendu, si l'espace E de classe C est donné, on prendra pour K l'adhérence faible de l'ensemble des points extrémaux de la boule unité de E' , et on est ramené à un problème d'approximation.)

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dieudonné et L. Schwartz, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)*, Ann. de Grenoble, 1 (1949), 61–101.
2. J. Dixmier, *Les fonctionnelles linéaires sur l'espace des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert*, Ann. Math., 51 (1950), 387–408.
3. A. Grothendieck, *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 233 (1951), 839–841.
4. ———, *Résumé des résultats essentiels dans la théorie métrique des produits tensoriels*, paraîtra dans "Bol. Soc. Mat. de São Paulo".
5. ———, *Sur certains sous-espaces vectoriels de L^p* , Can. J. Math., 6 (1953), 158–160.
6. ———, *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*, Ann. de l'Institut Fourier, 4 (1954), 73–112.
7. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. Math., 42 (1941), 523–537.
8. ———, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, Ann. Math., 42 (1941), 994–1024.
9. L. Nachbin, *A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 28–46.

Ajouté pendant la correction des épreuves. Monsieur Lowdenslager m'a fait observer les faits suivants. La généralisation du théorème 2 conjecturée dans la remarque 3 a été prouvée récemment par *Sakai*, dans un papier qui sera publié dans le Pacific Journal of Mathematics. Le théorème de Nachbin cité au début de ce travail a été prouvé indépendamment par D. B. Goodner; la plus jolie preuve connue semble être celle de Kelley (Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 323–326), qui ne suppose pas que la boule unité admette un point extrémal.

Institut H. Poincaré